

柱梁接合部のせん断変形を考慮した場合の

ラーメンの変形性状と略算法

武田 寿一

概要

地震、風などの水平力を受けた場合、ラーメンの柱梁接合部には大きなせん断力を生ずる。その結果生ずるせん断変形を考慮して高層均等ラーメンを有限差方程式を用いて解き、せん断力分布係数を求めた。この分布係数を拡張して適用すれば柱、梁の剛比、スパン、階高が異なる一般の場合にも応用できる。

1. 序

地震力、風力など水平力に対するラーメン構造物の応力解析は一般には撓角法、固定法などによって行なわれ、武藤博士のせん断分布係数にもとづく水平略算法により完全に実用化されている。さらには梁柱節点に剛域を導入して曲げ、せん断、剛域を考慮した解法につながっている。

最近鉄骨構造に限らず鉄筋コンクリート構造においてもこの梁柱接合部に関する研究が盛んで、この部分が水平加力時には大きなせん断力を受け、剛というよりもむしろ非常に柔らかい場合があると考えられるようになった。

これまで接合部については、鉄骨構造、鉄骨鉄筋コンクリート構造では一部の人を除いてほとんど関心が払われていなかったが、地震工学の発達とともに、建物の固有周期、層間変形などが設計と関連するようになると、この部分の剛性の建物の剛性に及ぼす影響などが重要になってくる。

この接合部の変形、応力などに関する論文が現在までに多少あるが、建物全体に適用するには、やや複雑の感がある。

本論文では、接合部のせん断変形をとり入れた高層ラーメンの変形と剛性およびせん断力分布係数などについて述べ均等ラーメンについての解析例を示してその一般的性状を検討した。

2. 記号

- n: 第n層
- m: 第m層建物の全階数
- $u_n l$: 第n層下部の接合部につづく柱の応力中心距離 (上下に柱があればその平均値)
- $V_n h_n$: 第n層床梁の応力中心距離
ただし $V_{m+1} h_{m+1} = V_{m+1} h_m$
- h_n : 第n層階高
- l: 梁スパン長さ

- $s\gamma_n$: 第n層下部の接合部パネルのせん断変形
- $s\theta_n$: せん断変形 $s\gamma_n$ のうち梁材軸方向となす角度
- $s\alpha_n$: せん断変形 $s\gamma_n$ のうち柱材軸方向となす角度
- k_{bn} : 第n層床梁の剛比 $= I_b / l K_0$
- I_b : 梁の断面二次モーメント。 K_0 : 標準剛度
- k_{Bn} : $2 k_{bn}$
- k_{cn} : 第n層の剛比
- M_{bFn} : パネル中心から $u_n l / 2$ 離れた点での梁のモーメント
- M_{Bn} : 左右の梁のパネル中心におけるモーメント和
- M_n : 第n層柱脚モーメント
- Q_n : 第n層せん断力

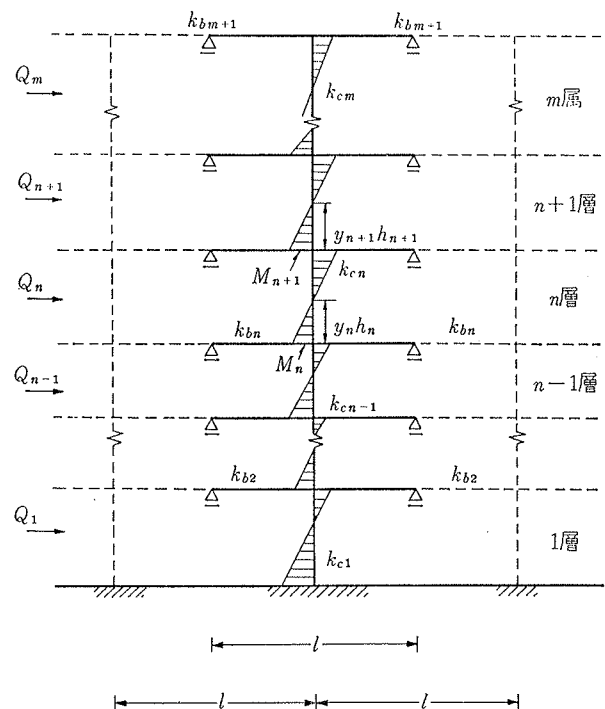


図-1 架構図

A_n : 第 n 層下部の接合部分のせん断力負担断面積

K_n : 形状指数

G : せん断弾性係数

ϕ : $2EK_0$ E : ヤング係数

y_n : 第 n 層反曲点高

V_n : $u_n k_n A_n$

H_u : $\phi k_c \kappa (1-u^2)/GV$

H : $\phi k_c \kappa /GV$

なお梁材のサフィックス k_{Bn} などは従来の $n-1$ を n にとってある。

3. 解法方針

3.1 考えている柱の左右の梁はスパン，剛比がそれぞれ等しいものとする。また梁の反曲点はスパン中央と仮定すると反曲点の鉛直方向の移動はない。したがってこの反曲点をローラ支持として取り出すと図-1の実線のようになる。

3.2 接合部パネルのせん断変形を考慮したラーメンの変形は次の2つの変形の和とする。

(a) 従来の各部材を弾性線材としたラーメン変形で，せん断，曲げ，剛域を考慮してもよいが，ここでは簡単のため従来の曲げ変形のみを考慮する。

(b) 部材は変形せず，接合部パネルのせん断変形のみを考慮したラーメン変形。

(a) については，既知のことであるから，(b)について述べる。図-3は n 層 ($n-1$) 層の柱の反曲点間を取り出した図である。パネルは一樣なせん断変形 γ_n を受け，柱，梁はパネル各辺に直交するとする。

柱，梁の応力中心距離を $u_n l$, $V_n h_n$, 柱，梁のそれぞれの回転を $s\theta_n$, $s\alpha_n$ とすると図-3から微少量を無視し，

$$\gamma_n = s\theta_n + s\alpha_n \dots \dots \dots (1)$$

$$s\theta_n = (1-u_n) s\alpha_n / u_n \dots \dots \dots (2)$$

式(1)，(2)から

$$s\theta_n = (1-u_n) \gamma_n \dots \dots \dots (1')$$

$$s\alpha_n = u_n \gamma_n \dots \dots \dots (2')$$

が得られる。

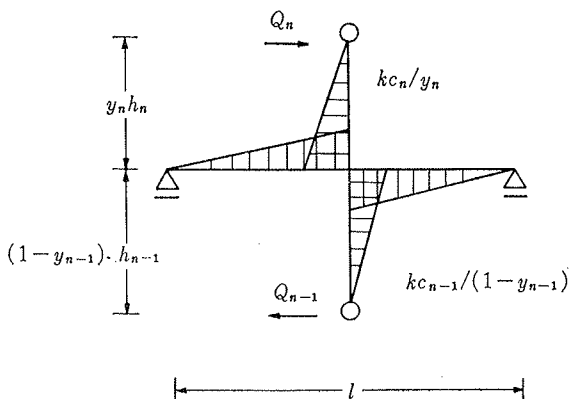


図-2 分解図

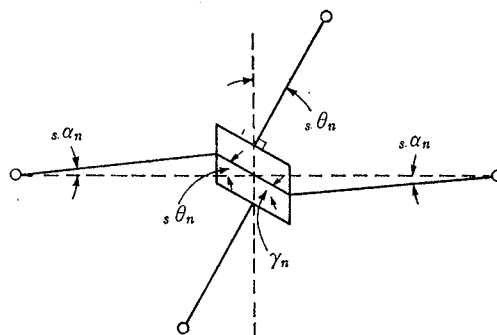
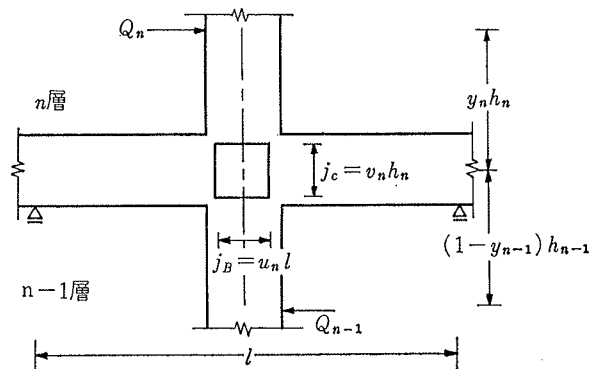


図-3 パネルのせん断変形

3.3 架構の連続条件としては柱反曲点での回転角の連続を考える。

以上から M_{n+1} , M_n , M_{n-1} の三モーメント式が成立し最上階および最下階からの境界条件によりラーメンの応力解析がなされる。以下の節で詳細について述べる。

4. 接合部パネルのせん断変形

パネルのせん断変形 γ_n は従来の次式で表わされるものとする。

$$\gamma_n = \frac{2 M_{bFn} - (Q_n + Q_{n-1}) v_n h_n / 2}{G A_n v_n h_n / \kappa_n} \dots \dots \dots (3)$$

ここに M_{bFn} はパネル中心から $u_n l / 2$ の位置での梁の左，右モーメントで，これは節点での梁のモーメント和 M_{Bn} で表わされる。

$$M_{bFn} = (1-u_n) M_{Bn} / 2 \dots \dots \dots (4)$$

ここで， $V_n = v_n h_n A_n$ とすると式(3)，(4)から γ_n は

$$\gamma_n = \frac{\kappa_n}{G V_n} \left\{ (1-u_n) M_{Bn} - (Q_n + Q_{n-1}) \frac{v_n h_n}{2} \right\} \dots \dots \dots (3')$$

また M_{Bn} については層モーメント式から次式が成り立つ。

$$M_{Bn} = -M_n + M_{n-1} + Q_{n-1} h_{n-1} \dots \dots \dots (5)$$

5. 一般式の誘導

5.1. 三モーメント式

第 n 層柱反曲点の回転角 $\bar{\theta}_n$ ，第 n 層反曲点より上から導いた θ_n と，反曲点より下から導いた θ'_n とは

$$\theta_n = \bar{\theta}_n = \theta'_n \dots \dots \dots (6)$$

でなければならない。これが前項(3)に述べた変形の連続条件である。これらはパネルのせん断変形のみを考慮した $s\theta$ と線材に置換した場合の曲げによる $B\theta$ との和である。したがって次式が成り立つ。

$$\overline{B\theta}_n - B\theta_n = s\theta_n - \overline{s\theta}_n \dots\dots\dots (6')$$

$\phi = 2EK_0$ とすると、それぞれ

$$B\theta_n = \frac{M_{Bn}}{3\phi k_{Bn}} + \frac{Q_n h_n y_n^2}{\phi k_{cn}} \dots\dots\dots (7)$$

$$\overline{B\theta}_n = \frac{M_{Bn+1}}{3\phi k_{Bn+1}} + \frac{Q_n h_n (1-y_n)^2}{\phi k_{cn}} \dots\dots\dots (8)$$

$$s\theta_n = (1-u_n)\gamma_n \dots\dots\dots (9)$$

$$\overline{s\theta}_n = (1-u_{n+1})\gamma_{n+1} \dots\dots\dots (10)$$

式(6')に式(7), (8), (9), (10)を代入し、式(3'), (5)を用いると $Q_n h_n y_n = -M_n$ として結局次式を得る。

$$\begin{aligned} M_{n+1} \left\{ \frac{1}{3\phi k_{Bn+1}} + E_{n+1} \right\} - M_n \left\{ \frac{1}{3\phi k_{Bn+1}} + \frac{1}{3\phi k_{Bn}} \right. \\ \left. + \frac{2}{\phi k_{cn}} + E_n + E_{n+1} \right\} + M_{n-1} \left\{ \frac{1}{3\phi k_{Bn}} + E_n \right\} \\ - \left\{ \frac{Q_n h_n}{3\phi k_{Bn+1}} - \frac{Q_{n-1} h_{n-1}}{3\phi k_{Bn}} + \frac{Q_n h_n}{\phi k_{cn}} \right\} \\ + E_n \left\{ Q_{n-1} h_{n-1} - \frac{(Q_n + Q_{n-1}) v_n h_n}{2(1-u_n)} \right\} \\ - E_{n+1} \left\{ Q_n h_n - \frac{(Q_{n+1} + Q_n) v_{n+1} h_{n+1}}{2(1-u_{n+1})} \right\} = 0 \dots (11) \end{aligned}$$

ここに

$$E_n = \frac{\kappa_n (1-u_n)^2}{GV_n} \dots\dots\dots (12)$$

すなわち三モーメント式が得られた。

境界条件式としては m 層、柱脚固定 ($\gamma=0$) ならば、

$$(1) \quad n=m \text{ で } M_{n+1}=0 \quad Q_{m+1}=0 \quad (h_{n+1}=h_m)$$

$$(2) \quad n=1 \text{ で } M_0=0 \quad Q_0=0 \quad E_1=0 \quad k_{B1}=\infty$$

を式(11)に代入すればよい。以上から各部のモーメントがわかり、 M_{Bn} , y_n , γ_n , Q_n などが求められる。式(11)で $E_n = E_{n+1} = 0$ とすれば接合部のせん断変形を無視した通常の場合と一致する。

5. 2 部材角

この際各層の部材角はどうかというと、各接合部パネル中心の水平変位をとって部材角とすれば次式で与えられる。

$$\begin{aligned} R_n = \frac{1}{3\phi} \left[\frac{M_{Bn} y_n}{k_{Bn}} + \frac{M_{Bn+1} (1-y_n)}{k_{Bn+1}} \right. \\ \left. + \frac{2Q_n h_n \{ y_n^3 + (1-y_n)^3 \}}{k_{cn}} \right] \\ + \left\{ s\theta_n y_n + s\theta_{n+1} (1-y_n) - \frac{1}{2} \gamma_n v_n \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \gamma_{n+1} v_{n+1} (h_{n+1}/h_n) \right\} \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

ここでも第2項を0とすれば通常の場合と一致する。

6. せん断力分布係数

6. 1 一般層の場合

まずパネルのせん断変形の影響を検討するために、つぎのような均等ラーメンについて考える。式(13)において

$$\begin{aligned} k_{Bn} = k_B \quad u_n = u \quad v_n = v \quad h_n = h \\ k_{cn} = k_c \quad V_n = V \quad \kappa_n = \kappa \end{aligned}$$

とすると

$$E_n = \kappa (1-u)^2 / GV$$

$$\phi k_c \kappa (1-u^2) / GV = H_u \quad k_B / k_c = \bar{k} \quad \text{とおき}$$

式(11)に代入すると一般式として次式が得られる。

$$\begin{aligned} M_{n+1} \left(\frac{1}{3\bar{k}} + H_u \right) - 2M_n \left(\frac{1}{3\bar{k}} + 1 + H_u \right) \\ + M_{n-1} \left(\frac{1}{3\bar{k}} + H_u \right) = \left\{ \frac{Q_n - Q_{n-1}}{3\bar{k}} h + Q_n h \right\} \\ - H_u \left\{ (Q_{n-1} - Q_n) h + \frac{v h (Q_{n+1} - Q_{n-1})}{2(1-u)} \right\} \dots (14) \end{aligned}$$

境界条件式として m 層、柱脚固定とすれば5項の1の(1), (2)条件を三モーメント式、式(11)に直接代入することにより、次式が得られる。

$$\begin{aligned} -2M_m \left(\frac{1}{3\bar{k}} + 1 + H_u \right) + M_{m-1} \left(\frac{1}{3\bar{k}} + H_u \right) \\ = \left\{ \frac{(Q_m - Q_{m-1}) h}{3\bar{k}} + Q_m h \right\} \\ - H_u \left\{ (Q_{m-1} - Q_m) - \frac{v h Q_{m-1}}{2(1-u)} \right\} \dots (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_2 \left(\frac{1}{3\bar{k}} + H_u \right) - M_1 \left(\frac{1}{3\bar{k}} + 2 + H_u \right) \\ = Q_1 h \left(\frac{1}{3\bar{k}} + 1 \right) + H_u \left\{ Q_1 h - \frac{(Q_2 + Q_1) v h}{2(1-u)} \right\} \dots (16) \end{aligned}$$

ここで特に $Q_n = Q$ すなわち最上階にのみ水平外力が加えられる場合を考えると式(14)はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} M_{n+1} \left(\frac{1}{3\bar{k}} + H_u \right) - 2M_n \left(\frac{1}{3\bar{k}} + 1 + H_u \right) \\ + M_{n-1} \left(\frac{1}{3\bar{k}} + H_u \right) = Q h \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

この式と境界条件の式(15), (16)から各部のモーメントが得られる。しかし他方この有限差方程式の解は特解と余関数の和で表わされ、特解はその架構の一般の性質、余関数は境界部分の乱れを一般に示す。式(17)の場合の特解は次式となる。

$$M_n = \bar{M} - 0.5Qh \dots\dots\dots (18)$$

すなわち柱の反曲点高比 $y_n = 0.5$ で、これを部材角の式(13)に代入すると

$$R_n = \frac{Qh}{3\phi k_c} \left(\frac{1}{\bar{k}} + 0.5 \right) + (1-u-v)\gamma \dots\dots\dots (19)$$

$$\therefore 12EK_0 k_c R_n = Qh \left[\frac{2+\bar{k}}{\bar{k}} + 6H(u+v-1)^2 \right]$$

ここに $H = H_u / (1-u)^2 = \phi k_c \kappa / GV$

したがってせん断力分布係数 D はつぎのように求まる

$$D = a \cdot k_c = \frac{Q}{\delta} \left[\frac{h^2}{12EK_0} \right]$$

$$a = \frac{1}{\frac{2+k}{k} + 6H(1-u-v)^2} \dots\dots\dots (20)$$

このD値は一般層についてのもので、H=0 とすれば通常のせん断分布係数に当然一致する。

6. 2. 柱脚固定の最下層のせん断力分布係数

式(16)から $Q_p = Q_l = Q$ として最下層の境界条件式が得られる。

$$M_2 \left(\frac{1}{3k} + H_u \right) - M_1 \left(\frac{1}{3k} + 2 + H_u \right) = Qh \left(\frac{1}{3k} + 1 + H_u \right) - \frac{QH_u v h}{(1-u)} \dots\dots\dots (21)$$

いま $M_1 + Qh = \alpha M_{B2}$ とし、これを式(5)に代入すると、

$$M_2 = -(M_1 + Qh) (1/\alpha - 1)$$

式(21)で $y_1 = -M_1/Qh$ により

$$y_1 = 1 - \frac{\left(\frac{1}{3k} + H_u \right) + \frac{H_u v}{2(1-u)} + 1}{\left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \left(\frac{1}{3k} + H_u \right) + 2} \dots\dots\dots (22)$$

一方このときの一階の部材角は式(13)で $k_{B1} = \infty$ などにより

$$6\phi k_c R_1 = 4 \left\{ \frac{M_{B2}(1-y_1)}{2k} + Qh \{ y_1^3 + (1-y_1)^3 \} \right\} + 3\phi k_c \gamma_2 \{ 2(1-u)(1-y_1) - v \} \dots\dots\dots (23)$$

したがって最下層のせん断力分布係数Dは $D = \alpha k_c$

$$a = \frac{1}{4 \left\{ \frac{(1-y_1)^2}{2\alpha k} + \{ y_1^3 + (1-y_1)^3 \} \right\} + 3H \{ 2(1-u)(1-y_1) - v \} \left\{ \frac{(1-u)(1-y_1)}{\alpha} - v \right\}} \dots\dots\dots (24)$$

ここで y_1 は式(22)に与えられているが α の値はこれだけではきまらない。パネルのせん断変形があまり大きくなければ $\alpha = 1/3$ にとってよいであろう。

しかし式(24)は複雑であるので次に略算値を示す。すなわち式(22)において $H=0$ として反曲点高比 y_1 を求め式(24)中で一般には微小項VをOとして、次式を得る。

$$a = \frac{1}{\frac{2+3\alpha k}{0.5+3\alpha k} + \frac{54\alpha k^2 H_u}{(1+6\alpha k)^2}} \dots\dots\dots (25)$$

さらに $\alpha = 1/3$ として

$$a = \frac{1}{\frac{2+k}{0.5+k} + \frac{18kH_u}{(1+2k)^2}} \dots\dots\dots (26)$$

ここで $H_u = 0$ とすれば通常のD値と一致する。結局aの値としては一般層、最下層に対し式(20)、(26)をそれぞれ用いればよい。

6. 3. 曲げ、せん断、剛域を考えた場合

前二項までは均等ラーメンから導いたせん断力分布係数Dであるが、これは線材としての曲げ変形を考えた場合のせん断力分布係数 $M D$ とパネルのせん断変形を考えた $s D$ とに分れ、つぎの形をとる。

$$1/D = 1/M D + 1/s D$$

柱、梁の剛比が各層で異なる場合は \bar{k} として

$$\bar{k}_n = (k_{bn+1} + k_{bn}) / k_{cn}$$

$$\bar{k}_1 = 2k_{b2} / k_{c1} \quad (\text{柱脚固定})$$

をとればよい。すなわち通常の場合に準ずればよい。

さらに材の曲げ、せん断、剛域を考える場合にも柱・梁に有効剛比を用いる方法により行なえばよい。詳しくは建築学大系14巻を参照されたい。

7. 略 算

これは全く武藤博士の方法を適用し、せん断力分布係数(20)式、(26)式を用いて、各柱のせん断力を決定し、反曲点高比に応じて各部のモーメントを決定する。反曲点高比についてはまだ計算を行っていないが、層数と層位置、 \bar{K} 、パネルのせん断剛性Hの変数となろう。さしあたり通常反曲点高比を用いてもさほど影響はないと考える。また、一般に左右の梁のスパン比と丈、上下の柱の丈が異なる場合、せん断力分布係数の値を求めるには、梁については接合部左右の梁の平均値、柱についてはその上下の柱の平均値を用いれば良いと考える。

8. 計 算 例

梁スパン中央を反曲点として取り出した7階建鉄筋コンクリート均等ラーメン ($H=0.177$, $k=1.0$) の最上階にQなる水平力が働く場合のモーメント図、変位図を図-4に示す。これは柱 $40 \text{ cm} \times 60 \text{ cm}$, $h=300 \text{ cm}$ 梁 $40 \text{ cm} \times 60 \text{ cm}$, スパン $l=600 \text{ cm}$, 応力中心距離比 $*u=0.075$, $v=0.150$, $u_n l = v_n l = 45 \text{ cm}$, $\kappa=1.0$, $E/G=2.3$ とし、材のせん断、剛域を無視して計算した場合である。

*応力中心距離Jは弾性体としては $j = \frac{2}{3} D = 40 \text{ cm}$
鉄筋コンクリート材の慣用式では $j = \frac{7}{8} d = 49 \text{ cm}$
この中間の値 45 cm をとった。

図-4をみるとパネルせん断変形を考慮した場合はせん断変形無視の場合に比べ各層変形量は約15%程度大きい。またモーメントについてみると最下層柱脚、最下層柱頭の値がそれぞれ6%, 11%程度増減している。

その他の位置でのモーメントはそれほど変わっていない。つぎにこの建物の略算法から求めたせん断分布係数についてパネルのせん断変形を考慮した場合としない場合についてみると表-1のようになる。せん断変形を考慮した場合略算法では最上層でD値が21%小さく、一層で9%, 二層で8%小さいが、中間層は比較的よく精解に一致している。この誤差の原因は最上層

