

多層トラス構造物の地震時における弾塑性応答解析

森 高 勇
武 田 寿 一

概 要

高層建物の地震時における応答を解析する場合、建物全体を純せん断系に置換するという方法が従来取られてきた。本報告は、高層ピン節トラスの弾塑性応答解析に関するもので、各部材の復元力特性を与えて、フレーム解析の中に応答解析を組み入れたものである。

1. 序

高層建物の地震時における応答を解析する場合、建物全体を純せん断系に置換するという方法が一般に採用されてきた。ところで、この仮定は建物が純ラーメン構造のように、全体的にせん断的性状の強い場合にはよいが、建物が耐震壁とかブレースを含む場合、あるいは建物が1スパン構造である場合などのときには、全体的な曲げの影響も考慮する必要が生じてくる。この全体的な曲げの影響も弾性解析の場合には、建物全体の性状マトリックスが与えられれば、建物全体を1本の曲げせん断棒に置換して応答解析すればよい。

ところで、弾塑性解析の場合になると、建物全体を1本の曲げせん断棒に置換してしまったのでは、復元力特性の定義がむづかしくなる。そこでさらに基本に戻って、フレーム解析自体を応答計算の中に組み入れるという方法¹⁾によって、上記の問題点は解決される。

本報告は、ピン節多層トラス構造物の弾塑性応答解析に関するもので、式の誘導とその数値解法についてまず記し、開発したプログラムによる計算例によって、多層トラス構造物の弾塑性応答性状についても若干触れたものである。

2. 解析上の仮定

図-1に示すようなK状ブレースを持つ対称多層1スパントラス構造物の地震時における応答解析を試みる。簡単のため、鉛直荷重を無視すれば、図-2のようなトラスに置換できる。以下、図-2の置換トラスについて論を進める。

解析上の諸仮定を次に列挙すると、

(i) 鉛直荷重は考慮せず、梁とブレースとの接点の鉛直変位は起らないとする。

(ii) 節点は全てピン接合で、梁の剛性は無限大とする。

(iii) 各部材の復元力特性は、図-3に示すようなBi-Linear型とする。

(iv) 質量は、梁とブレースとの節点に集中し、水平方向のみに有効である。すなわち、慣性力は水平方向のみに発生し、鉛直方向には発生しない。ただし、質量が零のレベルがあってもよい。

(v) 減衰は質量と剛性とに比例する項の和とし、慣性力の発生しないレベルでのその方向には、減衰力も零とする。

(vi) 数値解析上の仮定として、各計算時間内では、慣性力の存在する方向には Linear Acceleration、慣性力の存在しない方向には Linear Velocity の仮定による。

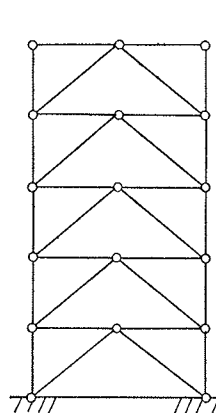


図-1 対称トラス

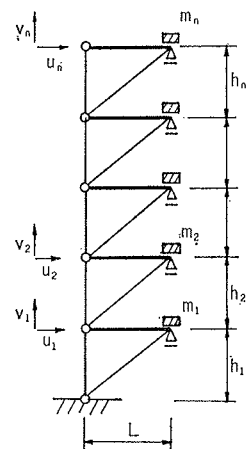


図-2 置換トラス

3. 式の誘導

演算は一定微小時間 dt 間隔で行ない、その間での

各変数の増分に関する釣合方程式を次に誘導する。

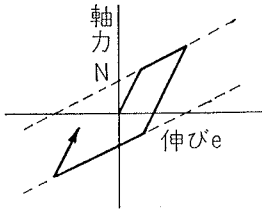


図-3 部材の復元力特性

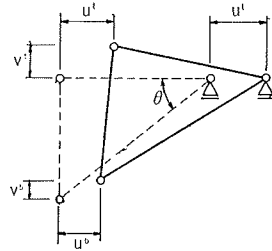


図-4 一般層の変位

3.1. 静的釣合方程式

図-4に示すように、一般層の各部材の軸方向力と伸びとの間には、次式が成立する。

$$\begin{Bmatrix} \Delta N_c \\ \Delta N_b \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} k_c & 0 \\ 0 & k_b \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \Delta e_c \\ \Delta e_b \end{Bmatrix}_i, (i=1 \sim n) \quad (1)$$

ここに、N=部材の軸方向力

e= " の伸び

k= " の軸方向剛性=(EA/l) × p

(suffix) c=柱

(") b=ブレース

なお、軸方向剛性kは弾性時と弾塑性時とでその値を異にし、pによってそれをコントロールする

p=1, …… (弾性時)

p≠1, …… (弾塑性時)

次に、各節点変位と各部材伸びとの間には、図-4より、次式が成立する。

$$\begin{Bmatrix} \Delta e_c \\ \Delta e_b \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & c & -s & -c \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \Delta v^t \\ \Delta u^t \\ \Delta v^b \\ \Delta u^b \end{Bmatrix}_i, (i=1 \sim n) \quad (2)$$

ここに、v=節点の鉛直変位

u= " の水平変位

s=sinθ

c=cosθ

(右肩のsuffix) t=top の意

(" suffix) b=bottomの "

ここで、(1)、(2)式のマトリックスを

$$[k]_i = \begin{bmatrix} k_c & 0 \\ 0 & k_b \end{bmatrix}_i$$

$$[a^t a^b]_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & c & -s & -c \end{bmatrix}_i$$

とおき、

$$\begin{Bmatrix} K^t & C \\ C^T & K^b \end{Bmatrix}_i = [a^t a^b]_i^T [k]_i [a^t a^b]_i, (i=1 \sim n) \quad (3)$$

とおけば、(3)式のマトリックスは外力と変位との関係

を表わす層の剛性マトリックスで、次式が成立する。

$$\begin{Bmatrix} \Delta R^t \\ \Delta R^b \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} K^t & C \\ C^T & K^b \end{bmatrix}_i \cdot \begin{Bmatrix} \Delta r^t \\ \Delta r^b \end{Bmatrix}_i, (i=1 \sim n) \quad (4)$$

ここに、R=外力ベクトル

r={v, u}^T=変位ベクトル

次に、

$$\Delta r_n = \Delta r_n^t$$

$$\Delta r_i = \Delta r_i^t = \Delta r_{i+1}^b, (i=1 \sim n-1)$$

$$\Delta R_n = \Delta R_n^t$$

$$\Delta R_i = \Delta R_i^t + \Delta R_{i+1}^b, (i=1 \sim n-1)$$

という関係を利用し、

$$K_n = K_n^t$$

$$K_i = K_i^t + K_{i+1}^b, (i=1 \sim n-1)$$

とおけば、(4)式は次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta R_n \\ \Delta R_{n-1} \\ \vdots \\ \Delta R_2 \\ \Delta R_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_n & C_n & & & \\ C_n^T & K_{n-1} & C_{n-1} & & \\ & & & & \\ & & & C_2^T & K_2 & C_2 \\ & & & & & C_1^T & K_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta r_n \\ \Delta r_{n-1} \\ \vdots \\ \Delta r_2 \\ \Delta r_1 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

すなわち、(5)式は静的釣合方程式であるが、簡単のため(5)式を次のように表わす。

$$\{\Delta R\} = [S] \{\Delta r\} \quad (5')$$

3.2. 振動方程式

前記の仮定(iv)、(v)に基づき、振動方程式を次のようにおく。

$$[M] \{\Delta \ddot{r}\} + [\Gamma] (c_e [M] + c_i [S]) \{\Delta \dot{r}\} + [S] \{\Delta r\} = -[M] \{\Delta \ddot{Y}_0\} \quad (6)$$

ここに、

$$[M] = \begin{bmatrix} M_n & & \\ & \ddots & \\ & & M_1 \end{bmatrix}, M_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_i \end{bmatrix}$$

$$[\Gamma] = \begin{bmatrix} \Gamma_n \Gamma_n & & \\ & \ddots & \\ & & \Gamma_2 \Gamma_2 \Gamma_2 \\ & & & \Gamma_1 \Gamma_1 \end{bmatrix}, \Gamma_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \gamma_i & \gamma_i \end{bmatrix}, \gamma_i = \begin{cases} 0, & (m_i=0) \\ 1, & (m_i \neq 0) \end{cases}$$

$$\{\Delta \ddot{Y}_0\} = \{\{0, \ddot{y}_0\}, \dots, \{0, \ddot{y}_0\}\}^T, \ddot{y}_0 = \text{地動加速度}$$

c_e=外部減衰係数

c_i=内部減衰係数

3.3. 数値解法

前記の仮定(vi)のLinear Acceleration, Linear Velocityの仮定から、(6)式の{\Delta \ddot{r}}, {\Delta \dot{r}}, {\Delta r}相互間に次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \{\Delta \ddot{r}\} &= -\frac{6}{\Delta t} [A] \{\Delta r\} + \{C_A\} \\ \{\Delta \dot{r}\} &= \frac{1}{\Delta t} [B] \{\Delta r\} + \{C_v\} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここに、

$$[A] = \begin{bmatrix} A_n \\ \vdots \\ A_1 \end{bmatrix}, A_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_i \end{bmatrix}, a_i = \begin{cases} 0, & (m_i=0) \\ 1, & (m_i \neq 0) \end{cases}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} B_n \\ \vdots \\ B_1 \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & b_i \end{bmatrix}, b_i = \begin{cases} 2, & (m_i=0) \\ 3, & (m_i \neq 0) \end{cases}$$

$$\{C_A\} = -[A] \left(\frac{6}{\Delta t} \{\dot{r}\}_0 + 3\{\ddot{r}\}_0 \right)$$

$$\{C_v\} = -[B] \{\dot{r}\}_0 - \frac{\Delta t}{2} [A] \{\ddot{r}\}_0$$

{ }₀ = 前回のベクトル

次に、(7)式を(6)式に代入して整理すると、

$$[S^*] \{\Delta r\} = \{\Delta R^*\} \quad \dots\dots\dots(8)$$

ここに、

$$[S^*] = [M] \left(\frac{6}{\Delta t^2} [A] + \frac{c_0}{\Delta t} [B] \right) + \frac{c_1}{\Delta t} [\Gamma] [S] [B] + [S]$$

$$\{\Delta R^*\} = -[M] (\{C_A\} + c_0 \{C_v\} + \{\Delta \ddot{Y}_0\}) - c_1 [\Gamma] [S] [C_v]$$

すなわち、(6)式の振動方程式は(8)式の行列計算に帰し、(8)式を解くには、Tri-Diagonal Matrix Method²⁾によればよい。

ところで、(8)式は(5)式と形が同じであるから、(5)式についてその解法をここに簡単に説明する。今、

$$\Delta R_n' = \Delta R_n$$

$$K_n' = K_n$$

$$\Delta R_i' = \Delta R_i - C_{i+1}^T K_i^{-1} K_{i+1}' \Delta R_{i+1}'$$

$$K_i' = K_i - C_{i+1}^T K_{i+1}' K_{i+1}'^{-1} C_{i+1}, \quad (i=n-1 \sim 1)$$

とおけば、

$$\Delta r_i = K_i'^{-1} \Delta R_i'$$

$$\Delta r_i = K_i'^{-1} (\Delta R_i' - C_i \Delta r_{i-1}), \quad (i=2 \sim n)$$

すなわち、上層の未知数から順次消去してゆき、1層の未知数をまず求め、次にそれを代入して順次上層の未知数を求めてゆく。

4. 式の考察

以上、式の誘導と数値解法について記したが、次に式自体の説明と数値解析上の問題点について、若干ここに記す。

(i) 慣性力の発生しない点でのその方向には、静的釣合のみを考えているから、(6)式は静、動両者の釣合式が混在したものである。そこで、静的釣合のその方向の未知数は、あらかじめ(6)式から消去でき、動的釣合式のみにもすることもできる。その場合には、Band Matrix ではなく、別の解法による必要がある。

(ii) (6)式には、弾性時では Modal Analysis ができるような減衰項を考慮してあり、Modal Analysis 上は固有周期に比例する項と逆比例する項との和にな

っている。ただ、弾塑性時では、剛性に比例して変化する。

(iii) 数値解析には種々の解法が考えられるが、解法によっては、解の発散とか計算時間の長いものなど実用化できないものもある。たとえば、ここでも全ての未知数に Linear Acceleration の仮定を適用すると、解が発散した。そこで、前記の仮定(vi)に記したように、慣性力の発生しない方向の未知数には、Linear Velocity の仮定を適用すると、解の発散が防止できた。この操作は、具体的には(7)式の[A],[B]によって行なっている。

ここで新たに、Linear Velocity という仮定が混在した数値解析上の誤差問題が発生する。この点については、(i)に記したように慣性力が発生しない方向の未知数をあらかじめ消去した振動方程式、すなわち、1本の曲げせん断棒としての数値解析を別に行なうことによって検討することができる。これを6質点のものについて比較してみたところ、純内部減衰で $\eta=0.05$ の場合、両者の誤差は4%以下であった。ゆえに、設計などで慣用されている減衰値を採用するかぎりは、Linear Velocity という仮定が混在したものでも、誤差上は問題にならない。

(iv) ここに適用した Band Matrix によって、応答解析を行なえば、メモリーの数も少なく、かつ演算時間も短くなるという利点がある。事実、ここに実行した計算例では、20層で演算回数が1600回の場合で、計算時間は数分(IBM7090)であった。

	m (ton)	h (cm)	Ac (cm ²)	Ab (cm ²)
20	19.33	249.0	164.9	95.0
19	39.96	249.0	164.9	95.0
18	37.63	249.0	164.9	95.0
17	113.83	412.4	450.0	100.0
16	80.67	366.0	450.0	100.0
15	79.17	366.0	607.2	100.0
14	79.17	366.0	607.2	100.0
13	79.17	366.0	840.0	109.0
12	79.17	366.0	840.0	109.0
11	79.17	366.0	840.0	109.0
10	79.17	366.0	840.0	109.0
9	79.17	366.0	1032.0	109.0
8	79.17	366.0	1032.0	132.0
7	79.17	366.0	1175.0	132.0
6	79.17	366.0	1175.0	132.0
5	79.17	366.0	1350.0	132.0
4	79.36	378.5	1350.0	132.0
3	256.21	294.0	1350.0	132.0
2	0.	294.0	1350.0	132.0
1	0.	335.3	1350.0	132.0

L=405.5cm, E=2100 ton/cm²

表一 計算例モデルの諸元

Case	各部材の復元力特性		弾塑性剛性と弾性剛性の比p
	Linear or Bi-Linear	降伏軸方向力	
L	Linear	∞	1.
BL5	Bi-Linear	Case Lの最大応答値の7割	0.5
BL1	"	"	0.1

表二 各 Case の仮定条件

MAX. VALUE										
STORY	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
H-R-DEFL(CM)	1.11179 3.08751	1.16591 3.16572	1.32919 3.22016	1.77826 3.30953	1.92827 3.31470	2.13448 3.26978	2.34117 3.61921	2.51502 2.04340	2.84581 2.00124	2.96858 1.94458
V-VELO(CM/SEC)	0.977 8.924	1.751 9.490	2.452 9.933	3.274 10.384	4.101 10.688	4.991 10.927	5.811 11.024	6.661 11.098	7.420 11.117	8.233 11.117
H-VELO(CM/SEC)	9.491 70.211	18.325 74.117	27.562 82.964	37.864 92.901	47.095 104.884	55.193 116.825	61.904 130.087	66.831 137.491	70.371 144.714	71.470 151.680
H-ACCE(GAL)	0. 692.56	0. 636.38	518.45 559.73	600.52 644.28	649.17 500.16	670.17 548.30	673.15 600.90	705.86 630.14	727.87 658.67	723.90 686.34
H-ABS-ACC(GAL)	392.80 376.22	392.80 325.41	418.32 274.31	428.52 262.39	442.24 287.45	456.60 335.94	466.44 390.95	467.13 421.86	455.67 451.90	426.51 502.61
V-P FORCE(TON)	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00
H-P FORCE(TON)	0.00 27.79	0.00 23.87	99.31 21.41	31.55 21.03	32.55 23.01	33.69 27.33	34.47 44.76	34.54 15.95	33.71 18.11	31.54 9.30
COLUMN-N(TON)	2795.61 832.52	2605.43 665.97	2416.03 510.03	2180.86 367.90	1957.75 242.99	1739.73 138.79	1550.21 94.17	1367.48 22.54	1185.76 5.71	1006.71 0.00
BRACE-N(TON)	451.39 262.90	429.68 248.67	429.68 232.76	402.90 212.12	371.90 186.43	344.91 155.52	321.61 125.68	309.63 50.88	295.99 32.18	280.45 10.92
COLUMN-DL(CM)	0.33064 0.17273	0.27019 0.13818	0.25055 0.10582	0.29117 0.10560	0.25275 0.06975	0.25805 0.05375	0.22994 0.02146	0.23094 0.01621	0.20025 0.00411	0.20887 0.00000
BRACE-DL(CM)	0.85682 0.62738	0.77638 0.59343	0.77638 0.55546	0.80623 0.55177	0.73286 0.48494	0.67968 0.40453	0.63375 0.34615	0.61015 0.12134	0.70634 0.07572	0.66927 0.02684
SHEAR(TON)	347.87 195.16	347.87 184.60	347.87 172.79	294.53 157.47	276.08 138.40	256.04 115.45	238.74 88.12	229.85 43.36	219.72 27.41	208.19 9.30
COLUMN-DUC.F.	0.6427 0.3304	0.5990 0.2643	0.5554 0.2024	0.5013 0.2021	0.4501 0.1335	0.4935 0.1028	0.4398 0.0364	0.4441 0.0569	0.3875 0.0144	0.3995 0.0000
BRACE-DUC.F.	1.1399 0.8040	1.0851 0.7605	1.0851 0.7118	1.0174 0.7071	0.9391 0.7768	0.8710 0.6480	0.8121 0.5237	0.7919 0.2232	0.9052 0.1411	0.8576 0.0479

表-3 Case L の最大値 out put

Case	topのbaseに対する最大変位
L	47.91cm
BL5	45.70cm
BL1	44.69cm

表-4 top の最大変位

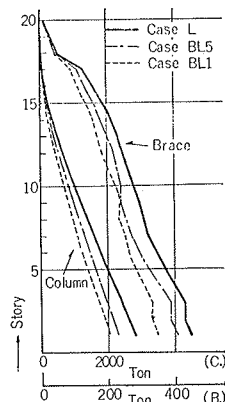


図-5 部材の最大応答軸方向力

5. 計算例

次に、開発したプログラムによる計算例とその結果について若干記す。

5.1. モデル

骨組モデルは20層で、その諸元を表-1に示す。このモデルに、地震波El Centro 1940, NS, 0.4gを作用させた応答計算を数例行ったが、その中表-2に示す3Caseをここに記す。なお、すべて計算時間ピッチは0.005secで、8sec間の地震継続で計算を打切った。減衰は純内部減衰となるように $C_e=0\text{sec}^{-1}$, $C_i=0.378\text{sec}$ としたが、これは1次の減衰定数が $h=0.05$ で、高次の h は周期に逆比例して大きくなるものに相当している。

5.2. 計算結果とその考察

表-3に、一例としてCase Lのout putを示す。図-5に、3Caseの各部材の最大応答軸方向力を、図-6に、3Caseの各部材の最大応答伸びを示す。図-7には、図-6のCase BL5とCase BL1とをそれぞれその層のCase Lで割った伸びの比率を示している。

図-5を見ると、当然のことながら、Bi-Linearの弾塑性性剛性が小さくなるに従って、最大応答軸方向力も小さくなっていることが判る。

図-6, 7を見ると判るように、Case LとBL5とでは、部材の伸びにほとんど差が見られない。ところが、Case LとBL1とでは、部材の伸びに差を生じ、特に下層部では後者が前者よりも柱、ブレースともに大きくなり、中間層では後者が前者よりもブレースでは

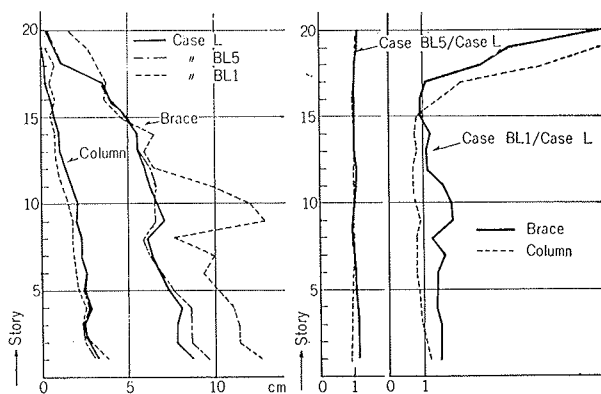


図-6 部材の最大応答伸び 図-7 部材の最大応答の伸び比

大きい、柱では逆に小さくなっている。

ところで、上層の3層はペントハウスに相当し、質量、剛性ともに他の一般層よりも小さく、Case Lの弾性応答最大軸方向力も他層よりも非常に小さいものであり、これの7割を降伏軸方向力と仮定したため、他層に比し、降伏値が非常に小さくなっている。このため、Case BL1で伸びが上層で大きくなったとも考えられる。

一般的には、部材の剛性が比較的小さいものは、弾塑性時には、弾性応答値よりも大きくなり、部材の剛性が比較的大きいものは、逆に弾性応答値よりも弾塑性応答の方が小さくなっている。

ところで、表-4にtopのbaseに対する最大変位量を示すが、3Caseを比較してCase L, BL5, BL1

の順に小さくなっている。これは、図-6のブレースの伸びの結果と一見矛盾しているようではあるが、これは time lag のあることを逆に示している。

6. まとめ

以上、式の誘導とその数値解法およびその計算例について述べてきたが、ここにそれらを要約すると、

(i) 弾塑性応答解析も Band Matrix を有効に利用すれば、計算自体も簡単になり、計算時間も短くなる。

(ii) 解析上の仮定によって、微分方程式の未知数の次数が必ずしも同一にならない場合が生じる。このような時には、数値解法によっては解の求まらない場合もある。

(iii) 構造物を構成する部材の剛性、耐力について、比較的小さい部材があると、そこに変形が集中することもある。

以上、最も単純な構造フレームについて論じてきたが、ラーメン構造とか耐震壁のある構造物でも同様の手法で解析できる。また、鉛直荷重を考慮する場合でも、初期値の修正だけで済み、操作は簡単である。

終りに、本研究にあたり、東大教授梅村博士のご指導を、また当組東京支店設計部久納職員、当組機械技術計算東京分室板橋、白石両職員にご協力を得ました。ここに深く謝意を表します。

参考文献

- (1) R. W. Clougu, K.L. Benusha, E.L. Wilson
“Inelastic Earthquake Response of Tall Building”
The 3rd W.C.E.E.
- (2) R.W. Clougu, E.L. Wilson, I.P. King “Larg
Capacity Multistory Frame Analysis Programs” J. of
S.D., Proc. of the ASCE