

曲げ・せん断・剛域を考慮したフレーム解析法

表 佑太郎
板橋 肇二
(機械計算部)

概要

開口のある耐震壁、または壁式ラーメンのように、材長にくらべて材丈が相当大きい部材をもつ構造体では、そのせん断変形が、曲げ変形に比較して無視できないばかりか、時には支配的となる。したがってこのような構造体では、材端に剛域をもつ部材の曲げ・せん断変形を考慮したラーメン解法によらなければならない。本報告は、当社機械計算部で開発された断面一様材からなる汎用骨組の解析プログラム（STEP01）に上記理論を適用して、従来は略算的に取り扱ってきた剛域ラーメンの応力、変形計算を曲げ・せん断・剛域を考慮したラーメン解法として修正し、二・三の計算例について検討した結果、実用化された STEP 01-SP プログラムの解析法について述べたものである。

1. 序

開口のある耐震壁、または壁式ラーメンをもつ構造体をラーメン理論で解くには、曲げ変形のみを考えた普通の解法では不十分である。このような材長にくらべて材丈が相当大きい部材になると、そのせん断変形が曲げ変形に比較して無視できないばかりか、時には支配的になるからである。

この解法に適するためには、曲げおよびせん断変形を考慮した一般ラーメンの解法が必要となる。理論的には、古くは内藤博士により発表され、武藤博士によるラーメンの実用的略算法が示されているが¹⁾、応力計算は手計算でも容易であるが、正確な変形計算はめんどうである。

また、最近の電子計算機の発達により大規模な連層耐震壁の解法プログラムも一般に広く開発されているが、いづれも純矩形ラーメンであること、とか、階高、スパン数に制約を受けるなど、利用範囲がせまい難点がある。

一方、現在当社機械計算部と日本電気で共同開発され、使用されている汎用骨組解析システム（STEP01）では、断面一様な材によって形成される汎用骨組の応力、変形計算を容易に行なうことができる。

本報告は、この STEP 01 プログラムに上記の曲げ・せん断・剛域を考慮したラーメン解法を適用した解析法について記し、計算例と精度チェックを行なって実用化された修正 STEP 01（名称；STEP 01-SP）について述べたものである。

なお、材端にハンチのついた梁や、抛物線形のアーチ梁のような変断面材をもつラーメンにおいても、この部分を剛域を持つ材と考えれば、同様な方法で STEP01-SP を使用することができる。

2. STEP01 の概要

現在使用されている汎用骨組解析プログラム STEP 01 についてその概略を記し、後で述べる STEP01-SP での修正点を明確にする。

2.1. 解析可能構造物

このプログラムは断面一様な直線で構成された二次元架構構造物の応力変形解析を行なうためのものである。架構の形は任意のものが許され、さらに部材端部の結合法も、剛接合、ピン接合の二種類が混用も含めて許される。したがって異形ラーメン、ピン・ジョイントをもつブリース付ラーメン、トラス、格子桁構造物等が解析可能となる。

支点については、節点が架構の境界において外部より拘束されているかどうかを示すもので、固定支持、自由支持、弾性支持の 3 種類が考慮できる。

平面架構に働く荷重としては、架構の面内に働く場合、または架構の面に直角に働く場合の 2 つのタイプを取り扱う。荷重形式としては、集中荷重、線形分布荷重、スラブ荷重、集中モーメントの 4 種類とする。

2.2. 解析可能範囲

- 1) 面内の荷重を受ける平面骨組
- 2) 面に直交する荷重を受ける平面骨組
- 3) 部材のせん断変形を考慮した応力変形解析

- 4) 部材端部接合条件
 　すべて剛接合の場合
 　ピン接合を含む場合

5) 弹性支持条件下の応力解析

6) 支点に強制変位を与えた場合の応力解析

7) 温度変化による応力解析

8) 影響係数マトリックスの作成

以下の説明では、1)の面内荷重を受ける平面骨組を
 TYPE-1, 2)の面に直交する荷重を受ける平面骨組を
 TYPE-2 として略記する。

2.3. 解析法の概略

このプログラムで用いている解析法は変形法で、一
 般に Direct Stiffness Matrix Method と呼ばれてい
 る方法である。これは、部材に関する力と変形の関係
 式 $f = k \cdot d$ (1)

(f ; 応力, k ; 部材剛性マトリックス, d ; 変形) を
 作成し、これに回転マトリックスを乗じて共通の座標
 系での部材応力を求める。

一方荷重による節点での等価ベクトル P を作成する。ここで各節点に注目して、節点の釣合方程式を立てる
と、

のとくなる。これを各節点について行なえば、(節点数×3)元の連立方程式となり、この方程式を解けば各節点での変位が求められる。部材に生ずる応力はこの節点変位をはじめの式に代入すれば得られる。

以上のように部材の剛性マトリックスを基本として一般の剛接架構での撓角法を更に基礎的に部材の三つの剛性にもとづき、座標の考え方を入れて解析し得るようになったものであるから、トラスのようなピン接合でも、せん断変形、材軸方向変形が入っても自由に解析することができる。

2.4. 座標系

このプログラムでは、絶対座標系および部材座標系の二種類の座標系により構造物全体と、部材の位置関係を規定する。座標軸の取り方は図-1のように右手系とする。ただし、このプログラムで処理する平面を、TYPE-1 の場合は XZ 面または xz 面とし、TYPE-2 の場合は、 XY 面または xy 面と決める。

2.4.1. 絶対座標系 (0-X, Y, Z) 架構全体に對

して設定する共通の座標系で、解析の TYPE により図-1 のようにする。節点に関する INPUT DATA (座標、拘束条件等) および OUTPUT DATA (変位、反力) は必ずこの座標系を使用する。OUTPUT のモーメントおよび節点回転角は、各座標軸の正方向に右ねじを進める場合の回転方向を正とする。

2.4.2. 部材座標系 (θ -x, y, z) 二つの節点 I, J を結ぶ部材を部材 I-J とするとき、部材 I-J の軸方向に x 軸を決定し、断面の主軸方向に y 軸、x 軸をとる。x 軸の方向は、I から J の方向を正とする。
 $(I < J)$ 部材の応力に関する OUTPUT DATA (軸力、せん断力、曲げモーメント等) は部材座標系によるものとする。絶対座標系と部材座標系との関係を、同じく図-1 に TYPE 別に示した。

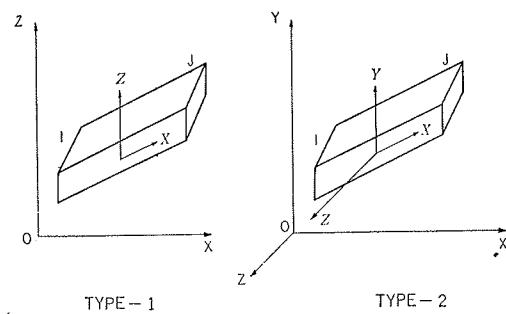


図-1 座標系

3. 曲げ・せん断・剛域を考慮した フレーム解析法

以上が従来より使用されてきたSTEP01の概要である。これは上記のように断面一様材について使用できるものであるが、有壁ラーメンで開口部が大きい場合、または壁式ラーメンの様に普通ラーメンにくらべて、柱、梁のせいが材長にくらべて大きいラーメンでは、壁梁、壁柱の接合部には、図-2に示したような剛性の高い部分を考え、この部分は変形しない剛域と考えて、「材端に剛域をもつ材からなるラーメン」として取り扱う。この場合、壁梁、壁柱の重心線を結んで置換ラーメンを作り、その材端（節点部分）に剛域をとり材の中間部分で曲げとせん断の両変形を考慮する。

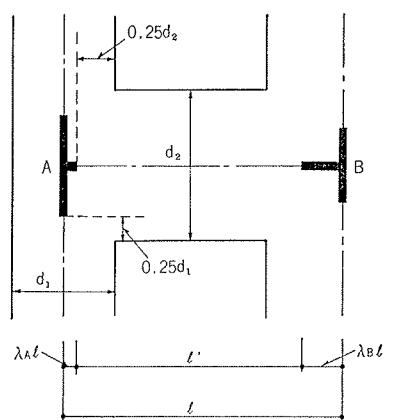


図-2 圖 域

3.1. 解法の基本式

部材端に働く外力 F_i とその方向の変位 D_i との関係式は、 i について

$$\sum_{j=1}^6 k_{ij} \cdot D_{ij} = F_i \quad (i=1 \sim 6) \quad \dots \dots \dots (3)$$

となる。 $i=1 \sim 6$ は各主軸方向と、その軸まわりについての 6 成分を示すが、このプログラムにおいては、TYPE-1 では軸力、せん断力、曲げモーメントおよびこれに対応する部材の伸縮変形、せん断変形、節点回転角の 3 成分について取り扱う。したがって式(3)は簡単に、

$$K \cdot D = F \quad \dots \dots \dots (4)$$

とかける。ただし

K : 3×3 のマトリックス

D, F : 3×1 のマトリックス

部材 AB の両端に働く外力を F_A, F_B とすれば

$$\begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K & L \\ M & N \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_A \\ D_B \end{Bmatrix} \quad \dots \dots \dots (5)$$

K, L, M, N のマトリックスを部材の剛性マトリックス (Stiffness Matrix) という。部材の剛性マトリックスは、部材の各端部における各成分に、独立な単位変形を与えるために両端に加える力を知ることによって作成できる。

3.2. 材端に剛域をもつ部材の剛性マトリックス

部材 AB の材端に剛域をもつ材の材端に単位モーメントが作用する時の材端回転角を、曲げ変形によるものと、せん断変形によるものとにわけて考える。ただし式中の記号は下記のように定める。

記号 λ_A, λ_B 部材 A, B 端の剛域長さ比

l 材長

l' 材長から剛域長さをひいた長さ

K 材の剛度

A 標準材の断面積

I 標準材の断面二次モーメント

E ヤング係数

G せん断弾性係数

β せん断剛性低下率

κ 断面の性状係数

(i) 曲げ変形による回転角 (図-3 参照)

$$\begin{cases} \alpha_A' = 6EI\alpha_A/l = 2\{(1-\lambda_A)^3 - \lambda_B^3\} \\ \alpha'_{AB} = -6EI\alpha_{AB}/l = 1 - 3(\lambda_A^2 + \lambda_B^2) + 2(\lambda_A^3 + \lambda_B^3) \\ \alpha_B' = 6EI\alpha_B/l = 2\{(1-\lambda_B)^3 - \lambda_A^3\} \end{cases} \quad (6)$$

(ii) せん断変形による回転角 (図-4 参照)

$$\gamma = 6EI\kappa l'/GAI^3 \quad \dots \dots \dots (7)$$

したがって材に中間荷重のない場合のたわみ角法公式は次のように導びかれる*。

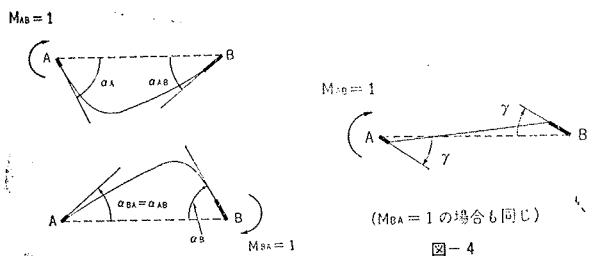


図-3

$$M_{AB} = 2EK(k(\alpha\theta_A + b\theta_B - 3cR)) \quad \dots \dots \dots (8)$$

$$M_{BA} = 2EK(k(b\theta_A + a'\theta_B - 3c'R)) \quad \dots \dots \dots (8)$$

$$\text{ここで } a = \frac{3(\alpha_B' + \gamma')}{(\alpha_A' + \gamma') (\alpha_B' + \gamma') - (\alpha_{AB}' - \gamma')^2}$$

$$a' = \frac{3(\alpha_A' + \gamma')}{(\alpha_A' + \gamma') (\alpha_B' + \gamma') - (\alpha_{AB}' - \gamma')^2}$$

$$b = \frac{3(\alpha_{AB}' - \gamma')}{(\alpha_A' + \gamma') (\alpha_B' + \gamma') - (\alpha_{AB}' - \gamma')^2}$$

$$c = \frac{a+b}{3}, \quad c' = \frac{a'+b}{3}$$

a, a', b は本来材形によって決まる係数であって、特に一様断面材であれば、 $a=a'=2, b=1$ となり式(8)は通常のたわみ角法公式となる。

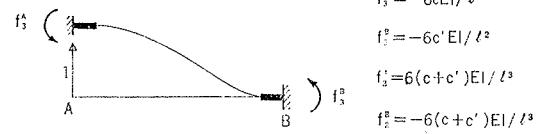
各部材について以上のたわみ角法係数を作れば、曲げ変形、せん断変形、軸方向変形を考慮して、各部材の剛性係数マトリックスを下記の要領で作ればよい。

(1) 材の両端が固定の場合

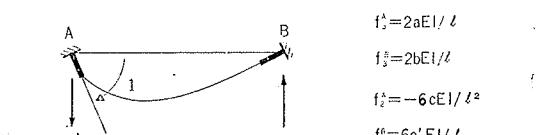
(i) 軸方向に単位変形を与えるのに必要な力



(ii) Z 軸方向に単位変形を与えるのに必要な力



(iii) 端端に単位の回転角を与えるのに必要な力



材端 B についても同様に行なえば、式(5)に準じたマトリックス K, L, M, N は次のように作ることができます。

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/l' & 0 & 0 & -EA/l' & 0 & 0 \\ 0 & 6(c+c')EI/l^2 & -6(c+c')EI/l^2 & 0 & -6(c+c')EI/l^2 & -6c'EI/l^2 \\ 0 & -6cEI/l^2 & 2aEI/l & 0 & 6cEI/l^2 & 2bEI/l \\ -EA/l' & 0 & 0 & EA/l' & 0 & 0 \\ 0 & -6(c+c')EI/l^2 & 6cEI/l^2 & 0 & 6(c+c')EI/l^2 & 6c'EI/l^2 \\ 0 & -6cEI/l^2 & 2bEI/l & 0 & 6c'EI/l^2 & 2a'EI/l \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix} \quad (9)$$

(注) 添字A,B,1~3は次の通り
A,B; 材端A: 第1節点, B: 第2節点
1 ; x軸方向の力(軸方向力), 変位
2 ; z " (せん断力), 変位
3 ; Y軸まわりの曲げモーメント, 回転角

式-9

(2) B端ピン, 他端固定の場合

同様の手法で K , L , M , N は次のように作ることができます。

$$\begin{bmatrix} K & L \\ M & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/l' & 0 & 0 & -EA/l' & 0 & 0 \\ 0 & -2f\cdot EI/l^3 & -2f\cdot EI/l^2 & 0 & -2f\cdot EI/l^2 & 0 \\ 0 & -2f\cdot EI/l^2 & -2f\cdot EI/l & 0 & -2f\cdot EI/l & 0 \\ -EA/l' & 0 & 0 & EA/l' & 0 & 0 \\ 0 & -2f\cdot EI/l^3 & -2f\cdot EI/l^2 & 0 & -2f\cdot EI/l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

但し $f=(aa'-b^2)/a'$

式-10

(3) A端ピン, 他端固定の場合も同様である。

以上のようにして作った部材の剛性マトリックスと外力, 変形の関係式は簡単に式(11)のようにあらわされる。

$$\begin{bmatrix} f_A \\ f_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kl \\ mn \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_A \\ d_B \end{bmatrix} \quad (11)$$

これを2.4.で記した座標変換を行なうには座標の回転マトリックスRを作り, 絶対座標系に変換する。

$$\begin{bmatrix} F_A \\ F_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RkR^T & RlR^T \\ RmR^T & RnR^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_A \\ D_B \end{bmatrix} \quad (12)$$

簡単に

$$\begin{bmatrix} F_A \\ F_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} KL \\ MN \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_A \\ D_B \end{bmatrix} \quad (13)$$

3.3. 節点における力の釣合方程式

以上のような部材の剛性マトリックスを作れば, あとは現在の STEP01 と全く同じ手法で変形計算を行ない, それから応力を逆算することができる。すなわ

ち各節点における力の釣合方程式は,

$$(内力の和) + (外力の和) = 0 \quad (14)$$

より求めることができる。

式(13)を参照すれば, 節点Aにおける内力は

$$-F_A = -(K \cdot D_A + L \cdot D_B) \quad (15)$$

A節点に集まるすべての部材について式(15)が成り立つから, A節点における内力の和は,

$$-\sum_j^A F_j = -\sum_j^A (K_j D_j + L_j D_j) \quad (16)$$

ここでjは一方の部材端の節点名とする。

一方節点Aに加わる外力の和を P (3×1のベクトル) とすれば, 節点Aでの力の釣合方程式は

$$-\sum_j^A F_j + P = 0 \quad (17)$$

式(16)を代入すれば

$$\sum_j^A K_j \cdot D_j + \sum_j^A L_j \cdot D_j = \sum_j^A P \quad (18)$$

ここでAの節点番号をiとして,

$$C_{ii} = \sum_j^A K_{ij} \cdot D_j, C_{ij} = L_{ij} \quad (i \neq j) \quad (19)$$

として, K , L をCで表わすと,

$$C_{ii} \cdot D_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n C_{ij} \cdot D_j = P_i \quad (20)$$

マトリックスで表わすと,

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} \quad (21)$$

式-21

Cは部材の Stiffness Matrix を基本として合成され外力 P も与えられるから, 式(21)は, (3n)元連立一次方程式を解くことにより, 解としてD, すなわち絶対座標系における節点に関する変形が与えられる。D, Dを求めたあとで, 部材 $i-j$ の変換マトリックスRによって, 部材座標系における部材の応力が求まる。

4. 計算例

以上の曲げ・せん断・剛域を考慮した解析プログラムを用いて, 次の3種類のモデル建物について計算例を行なった。

TEST-1 5層1スパンで開口部が比較的小さいもの。(左右剛域長さが等しくない場合)

TEST-2 10層1スパンの高層対称骨組(左右剛域長さが等しい場合)

TEST-3 3層3スパンの対称骨組で開口部が比較

建物例	CASE	建 物	剛域	剪断变形 考 虑	軸方向变形 柱・梁共考慮	$E(\times 10^6)$	$G(\times 10^6)$	備 考
TEST - 1	1	1 スパン、5層 (開口部小)	学会規準	考 虑	柱・梁共考慮	0.322	0.138	注) スラブ位置ピン接合、部材寸法 2倍
	2		開口部迄 等価剛域 なし	"	"	"	"	
	3		"	"	"	"	"	
	4		"	"	"	"	"	
TEST - 2	1	1 スパン、10層 (開口部小)	学会規準	"	柱・梁共考慮	0.21	0.0608	部材寸法2倍 梁剛域部分は柱断面と同じ
	2		開口部迄	"	"	"	"	
	3		等価剛域 なし	"	"	"	"	
	4		学会規準	"	柱のみ考慮	"	"	
	5		等価剛域 なし	"	"	"	"	
	6		"	"	"	"	"	
	7		"	"	"	"	"	
TEST - 3	1	3 スパン、3層 (開口部大)	学会規準	"	無 視	2.1	0.076	部材寸法2倍
	2		"	"	柱のみ考慮	"	"	
	3		"	"	柱・梁共考慮	"	"	
	4		等価剛域 開口部迄 なし	"	無 視	"	"	
	5		"	"	"	"	"	
	6		"	"	"	"	"	

注) 剛域部分を標準材の2倍の寸法をもつ他の剛な部材に置き換えて計算する略算法
で、従来の剛域計算法

表-1 計算例種別

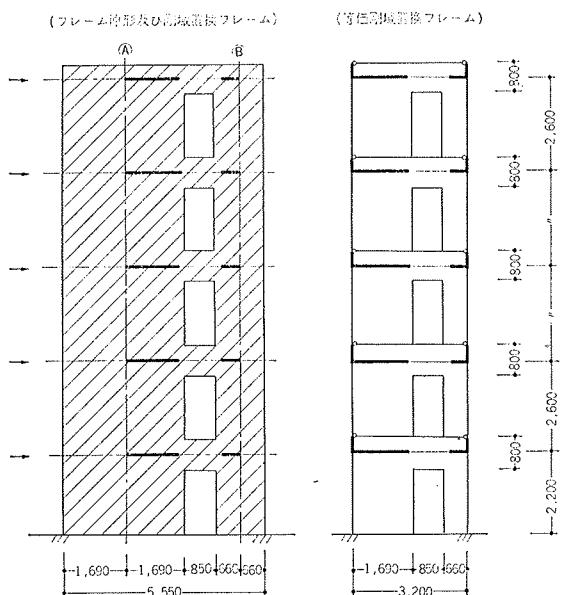


図-5 TEST-1 建物

的大きいもの。(文献 1 P.322 参照)

各建物例に対する計算例の詳細を表-1 に示した。
(ただし以下では、紙面の都合上主に TEST-1, 2 の場合について記すことにする)

4.1. 建物の形と計算結果

- (i) TEST-1, 2 に用いた建物の基本形および置換フレームを図-5, 6 に示した。
- (ii) 計算は、表-1 に示した各 CASE について行ったが、このうち剛域部分の取り扱いについては、a) 剛域長さを学会規準の長さにとった場合(開口部より $0.25d$ 入った所までを剛域長さとする), b) 開口部までを剛域長さとした場合, c) 学会規準の剛域長さの部分を標準材よりも、断面積、断面二次モーメントを大きく取った他の剛な部材に置き換えて略算的に取り扱

った場合(以下では等価剛域と名づける)の三種類を考えた。c の方法が従来の STEP01 において剛域を略算的に取り扱ってきた方法である。

(iii) 計算結果のうち柱のモーメント図と変形図を図-7, 8 に示した。

4.2. 計算結果の検討

- (i) 応力; 各計算例共に、剛域長さを開口部まで取っても、等価剛域として取り扱っても、通常の学会規準による剛域長さを持つフレームとして取り扱った

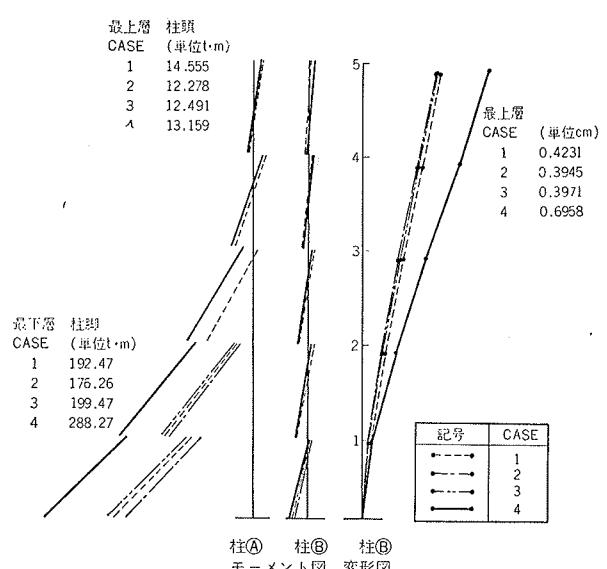


図-6 TEST-2 建物

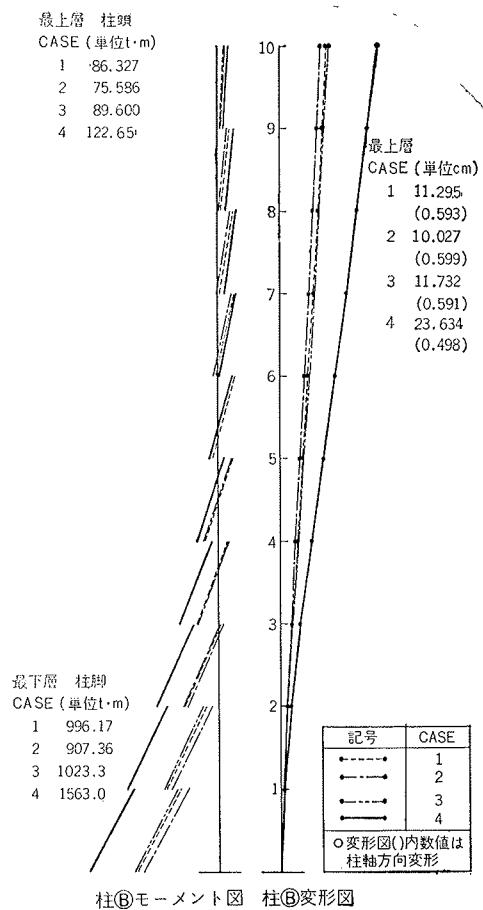


図-8 TEST-2 計算結果

ものと大差はない。

(ii) 変形；剛域長さの取り方，等価剛域への置換の仕方によりかなり異なる場合もある。特に TEST-3 の様に開口部の大きい純ラーメンに近い形式ではこの傾向が強い。参考までに各計算例について、4.1.に示した a., b., c., の変形量の比較を図-9に示した。縦軸は階数、横軸は b/a, c/a の値で、横軸が 1 であれば、b, c が a と等しいことを意味する。これを見ても、TEST-3 のようく開口部が大きい場合は剛域長さの取り方によりかなり变形は異なるが、TEST-1, 2 のようく開口部の比較的小な場合は、剛域部分を開口部までとっても大差ではなく、また妥当な等価剛域に置きかえれば従来の方法でも近似的に十分と考えられる。

4.3. 計算精度の検討

剛域長さを学会規準長さにとった場合について、本

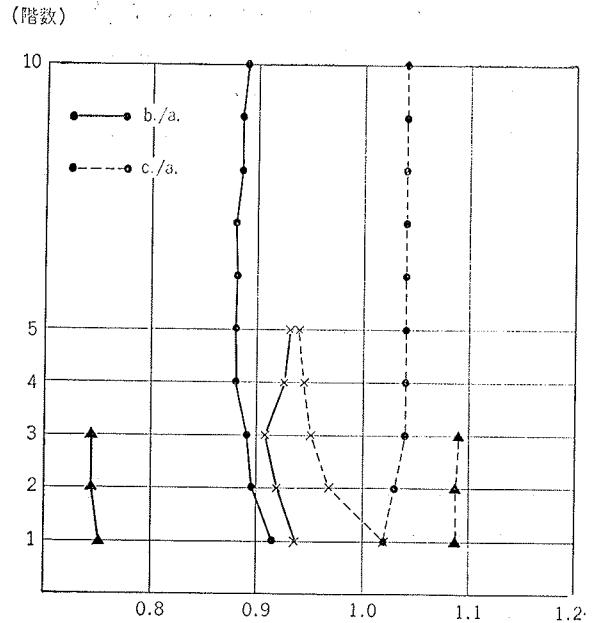


図-9

報告での STEP01 プログラムによる計算結果(a)を、既に完成され使用されている三モーメント法を解法の基本原理とした連層耐震壁プログラムによる計算結果(b)と比較して、計算精度について比較検討した。

行なった計算例は次の二種類であるが、紙面の都合上以下では主に(i)の場合についてのみ記す。

(i) TEST-2 と全く同一のモデル（左右の剛域長さの等しい場合）

(ii) TEST-1 の上部 4 層をとり、柱脚固定としたもの。（左右剛域長さの等しくない場合）

4.3.1. 結果の比較 表-2 参照

4.3.2. 応力の検討 柱Bの最下層柱脚モーメントはa.によるものが996.7(t·m), b.によるものが1004.02(t·m)でその差は約0.8%，上層に行くに従って差がなくなり、最上層では約0.03%で全く差異はないと考えてよい。

4.3.3. 変形の検討 最上層変形をみるとa.によるものが11.295(cm), b.によるものが11.228(cm)でその差は約0.6%であり実用上は十分な精度と考えられる。

5. 結び

事項	階数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
柱⑧ 柱脚モー メント(t·m)	STEP01-SP	996.17	646.27	417.78	266.71	162.25	86.588	30.696	8.923	31.604	32.327
	耐震壁 Prog	1004.02	643.64	416.56	266.56	162.29	86.62	30.71	8.91	31.59	32.32
	両者の差 (%)	0.782	0.409	0.293	0.056	0.025	0.037	0.038	0.16	0.051	0.025
柱⑧ 変 形 (cm)	STEP01-SP	0.4714	1.4505	2.6915	4.0457	5.4216	6.7614	8.0298	9.2018	10.292	11.295
	耐震壁 Prog	0.4047	1.3847	2.6255	3.9796	5.3552	6.6949	7.9632	9.1410	10.225	11.228
	両者の差 (%)	16.48	4.75	2.51	1.66	1.24	0.99	0.84	0.73	0.66	0.60

表-2

数値的には、ここで示した剛域を考慮したフレーム解析プログラム STEP 01-SP は、実用上十分な精度があると考えてよい。計算時間は当社の NEAC 2200-500を使用した場合、ここで示した計算例（i）についていえば、耐震壁プログラムで計算すれば14秒であるのに対して、STEP01-SP で計算すると 3 分 04 秒かかり、かなり不利のように見える。しかし、2章でも述べたように、STEP01-SP を用いれば異形ラーメン、吹抜けのあるラーメン、ピン・ジョイントを持つプレース付ラーメン、トラスなど、汎用骨組に対して利用できる点で非常に有効なものと考える。

謝辞；本報告をまとめるにあたり、東京大学鄭 正昌氏の御協力を得ましたので、ここで謝意を表します。

参考文献

- 1) 武藤 清：耐震設計シリーズ 1巻 丸善

脚注 *材に中間荷重を考慮するとたわみ角法公式は、

$M = 2EKk(a\theta_A + b\theta_B - 3cR) + dC_A$ となり、荷重項を剛

域長さによる係数 d で補正しなくてはならない。ただし

左右の剛域長さが異なる場合には両端で係数 d が違うた

め使用することはできない。