

# 有限要素法による構造物の応力解法について

伊藤 雅保

## 概 要

一般的にいて、最も簡単な形状の一つである回転体構造物の応力解析を行なう場合においてできても、任意形の荷重分布について、薄肉シェル理論によって応力解析を行なうことはかなり困難であり、特殊な荷重状態の場合についてのみ解かれている。それに対して、最近さかんに用いられるようになってきたマトリックス変位法とくに有限要素法を用いれば、理論的には任意形の立体の三次元的応力解析も可能であり、回転体構造物に限定すれば、任意形の荷重分布について応力解析を行なうことは比較的容易である。そこで厚肉回転体と薄肉回転体との解法を誘導した。そして、簡単な例題によって在来の理論による結果と比較し、有限要素法による解法の妥当性を検討した。その結果、有限要素法による解法は十分な実用性をもつことが結論づけられた。

## 1. 厚肉回転体の応力解法について

### 1.1. 解析方法の概略

有限要素法を用いることによって、理論的には任意形状の立体の三次元的応力解析も可能ではあるが、実用上はかなり困難である。しかし、立体でも P.C. コンテナ、サイロ等の回転体に限定すると、その特殊性によって、実用的な応力解析が可能となる。

それは、荷重を受ける回転体の応力解析問題において、もし外力が回転方向についてフーリエ級数で表わされるような変化をするならば、それに対応する変位や応力もまた同様な変化をするので、そのときは回転軸を含む任意断面でたてられた方程式は全体の釣合を表わすことになる。それで荷重をフーリエ級数に展開することによって回転体の応力解析が可能となる。

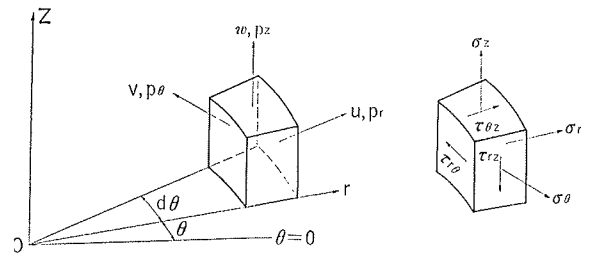
この方針に従って回転体を三角形断面リング要素に分割し、その三角形断面リング要素の剛性行列を導いた。また簡単な例題について解析結果を示した。

### 1.2. 荷重と変位

図一1に示すように、円筒座標系  $(r, \theta, z)$  をとり荷重、変位および応力の成分を定義する。

次に、荷重と変位との各成分は  $\theta$  について三角級数で展開できるものと仮定する。 $P_{rn}, P_{\theta n}, \dots, w_n$  を  $r$  および  $z$  の関数とすれば、荷重と変位とは次のように仮定される。

$$\text{荷重: } \begin{cases} P_r = \sum_n P_{rn} \cos n\theta \\ P_\theta = \sum_n P_{\theta n} \sin n\theta \\ P_z = \sum_n P_{zn} \cos n\theta \end{cases} \dots\dots\dots(1)$$



図一1 荷重・変位・応力

$$\text{変位: } \begin{cases} u = \sum_n u_n \cos n\theta \\ v = \sum_n v_n \sin n\theta \\ w = \sum_n w_n \cos n\theta \end{cases} \dots\dots\dots(2)$$

ここで、軸対称荷重の場合は  $n=0$ 、水平地震力の場合は  $n=1$  となる。また以後においては  $\sum_n$  を略して、一般項  $n$  について扱うものとする。一般項  $n$  について (1), (2) 式をマトリックスを用いて次のように表わすことにする。

$$P = \begin{bmatrix} P_r \\ P_\theta \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{rn} \cos n\theta \\ P_{\theta n} \sin n\theta \\ P_{zn} \cos n\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos n\theta & 0 & 0 \\ 0 & \sin n\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos n\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{rn} \\ P_{\theta n} \\ P_{zn} \end{bmatrix} = T_3 P_n \dots\dots(3)$$

$$d = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_n \cos n\theta \\ v_n \sin n\theta \\ w_n \cos n\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos n\theta & 0 & 0 \\ 0 & \sin n\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos n\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix} = T_3 d_n \dots\dots(4)$$

次に図一2に示したように、回転体から三角形断面リング要素を取りだし、頂点での頂点力を(5)式、頂点変位を(6)式で表わすことにする。

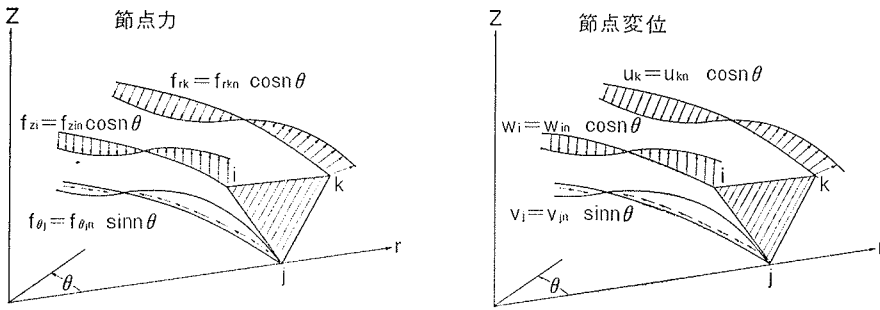


図-2 節点力と節点変位

$$f_e = \{f_{r1}, f_{rj}, f_{rk}; f_{\theta}, f_{\theta i}, f_{\theta n}; f_{z1}, f_{zj}, f_{zk}\} = T_9 f_{en} \dots\dots\dots (5)$$

$$d_e = \{u_i, u_j, u_k; v_i, v_j, v_k; w_i, w_j, w_k\} = T_9 d_{en} \dots\dots\dots (6)$$

ここで、

$$T_9 = \text{diag} \{ \cos n \theta, \cos n \theta, \cos n \theta; \sin n \theta, \sin n \theta, \sin n \theta; \cos n \theta, \cos n \theta, \cos n \theta \}$$

$$f_{en} = \{f_{rin}, f_{rjn}, f_{rkn}; f_{\theta in}, f_{\theta jn}, f_{\theta n}; f_{zin}, f_{zjn}, f_{zkn}\} \dots\dots\dots (7)$$

$$d_{en} = \{u_{in}, u_{jn}, u_{kn}; v_{in}, v_{jn}, v_{kn}; w_{in}, w_{jn}, w_{kn}\}$$

であり、頂点力  $f_{r1}, f_{rj}, \dots\dots$  等はリング要素の稜線上に分布する線荷重である。

1.3. 変位函数

リング要素の三角形断面内で変位を線形分布と仮定すると各要素間の適合条件は満足される。そこで変位函数として次のもの考えることにする。

$$\begin{cases} u = u_n \cos n \theta = (\alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 z) \cos n \theta \\ v = v_n \sin n \theta = (\alpha_4 + \alpha_5 r + \alpha_6 z) \sin n \theta \dots\dots\dots (8) \\ w = w_n \cos n \theta = (\alpha_7 + \alpha_8 r + \alpha_9 z) \cos n \theta \end{cases}$$

すると、次の(9)式が得られる。

$$\text{den} = \begin{bmatrix} u_{in} \\ u_{jn} \\ u_{kn} \\ v_{in} \\ v_{jn} \\ v_{kn} \\ w_{in} \\ w_{jn} \\ w_{kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_i & z_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & r_j & z_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & r_k & z_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & r_i & z_i & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & r_j & z_j & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & r_k & z_k & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & r_i & z_i & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & r_j & z_j & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & r_k & z_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \end{bmatrix} = T_9 a \dots\dots\dots (9)$$

(9)式より、次の(10)式が得られる。

$$a = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \end{bmatrix} = T \text{den} \dots\dots\dots (10)$$

ここで、

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} 1 & r_i & z_i \\ 1 & r_j & z_j \\ 1 & r_k & z_k \end{bmatrix} \dots\dots\dots (11)$$

である。

1.4. 歪

要素内における歪と変位との間の関係式は線形理論によって、次の式で与えられている。

$$\epsilon_e = \begin{bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{\theta z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \\ \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (12)$$

したがって(8)式で定義された変位函数を用いると(12)式は次のようになる。

$$\epsilon_e = \begin{bmatrix} 0 & n \cos n \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} \cos n \theta & \cos n \theta & \frac{1}{r} \cos n \theta & 0 & \cos n \theta & n \cos n \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos n \theta \\ 0 & 0 & \cos n \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos n \theta & 0 \\ \frac{n}{r} \sin n \theta & -\sin n \theta & n \sin n \theta & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \sin n \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \sin n \theta & -\cos n \theta & \frac{z}{r} \sin n \theta \end{bmatrix} a \dots\dots\dots (13)$$

1.5. 応力

前節の歪に対応する応力は三次元弾性論の公式によって次のように与えられている。

$$\sigma_e = \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \\ \tau_{r\theta} \\ \tau_{\theta z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \delta & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{\theta z} \end{bmatrix} = D \cdot \epsilon_e \dots\dots\dots (14)$$

$$\text{ここで、} \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \delta = 2\mu + \lambda$$

1.6. 要素の剛性行列

仮想仕事の原理を用いて、要素内の応力と静的に等価な頂点力を求めることにする。

仮想頂点変位として(6)式と同じ分布形をもつものを次のように仮定する。

$$d_e^* = T_9 d_{en}^* \dots\dots\dots (15)$$

仮想頂点変位  $d_e^*$  によって生じる歪は次の式となる。

$$\epsilon_e^* = B T d_{en}^* \dots\dots\dots (16)$$

リング要素の  $\theta$  から  $\theta + d\theta$  の間の部分の仮想仕事は

$$(d_e^*)^T f_e ds = \int_A (\epsilon_e^*)^T \sigma_e ds dA \dots\dots\dots (17)$$

となる。ここで、 $ds = r d\theta$ ,  $A$  は

リング要素の断面積である。

(17)式に(5), (14), (15), (16)式を代入して整理すると次のようになる。

$$\mathbf{r}f_e = \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e \quad \dots\dots\dots(18)$$

ここで、

$$\mathbf{K}_e = (\mathbf{T}\mathbf{T}_0^{-1})^T \left[ \iint_A \mathbf{r} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, drdz \right] (\mathbf{T}\mathbf{T}_0^{-1}) \quad \dots\dots(19)$$

である。

(18)式は頂点変位と頂点力との関係を表わすもので、 $\mathbf{K}_e$ は要素の剛性行列で  $\theta$  の函数となっている。それで、任意の  $\theta$  について  $\mathbf{K}_e$  を計算できるが最も簡単なのは  $n\theta = \pi/4$  の断面を選んだときである。そのときには、(18)式は

$$\mathbf{r}f_{en} = \mathbf{K}_{en} \mathbf{d}_{en} \quad \dots\dots\dots(20)$$

と表わされる。

$$\text{次に、} \bar{r} = \frac{r_i + r_j + r_k}{3}, \quad \bar{z} = \frac{z_i + z_j + z_k}{3}$$

$$\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & r_i & z_i \\ 1 & r_j & z_j \\ 1 & r_k & z_k \end{vmatrix}$$

として

$$\begin{cases} I_1 = \iint_A r \, drdz = \bar{r} \Delta \\ I_2 = \iint_A drdz = \Delta \\ I_3 = \iint_A z \, drdz = \bar{z} \Delta \\ I_4 = \iint_A \frac{1}{r} \, drdz \doteq \frac{\Delta}{\bar{r}} \\ I_5 = \iint_A \frac{\bar{z}}{r} \, drdz \doteq \frac{z}{r} \Delta \\ I_6 = \iint_A \frac{z^2}{r} \, drdz \\ \doteq \frac{\Delta}{12\bar{r}} \{ (z_i + z_j)^2 + (z_j + z_k)^2 + (z_k + z_i)^2 \} \end{cases} \quad \dots\dots\dots(21)$$

$\iint_A \mathbf{r} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, drdz$

$= \frac{1}{2}$	対	$\begin{cases} (n^2+2)\mu + \lambda I_4 \\ \lambda I_4 \end{cases}$	$\begin{cases} (n^2+2)\mu + 2\lambda I_2 \\ 4\lambda I_1 \end{cases}$	$\begin{cases} (n^2+2)\mu + \lambda I_5 \\ \lambda I_5 \end{cases}$	$n(3\mu + \lambda) I_4$	$n(2\mu + \lambda) I_2$	$n(3\mu + \lambda) I_5$	0	0	$\lambda I_2$
			$\begin{cases} (n^2+4)\mu + 4\lambda I_1 \\ \lambda I_1 \end{cases}$	$\begin{cases} (n^2+2)\mu + 2\lambda I_3 \\ 2\lambda I_3 \end{cases}$	$n(3\mu + 2\lambda) I_2$	$2n(\mu + \lambda) I_1$	$n(3\mu + 2\lambda) I_3$	0	0	$2\lambda I_1$
				$\begin{cases} (n^2+2)\mu + \lambda I_6 + \mu I_1 \\ \lambda I_6 + \mu I_1 \end{cases}$	$n(3\mu + \lambda) I_5$	$n(2\mu + \lambda) I_3$	$n(3\mu + \lambda) I_6$	0	$\mu I_1$	$\lambda I_3$
					$\begin{cases} (2n^2+1)\mu + n^2\lambda I_3 \\ n^2\lambda I_3 \end{cases}$	$n^2(2\mu + \lambda) I_2$	$\begin{cases} (2n^2+1)\mu + n^2\lambda I_5 \\ n^2\lambda I_5 \end{cases}$	0	0	$n\lambda I_2$
						$n^2(2\mu + \lambda) I_1$	$n^2(2\mu + \lambda) I_3$	0	0	$n\lambda I_1$
								$\begin{cases} (2n^2+1)\mu + n^2\lambda I_6 + \mu I_1 \\ n^2\lambda I_6 + \mu I_1 \end{cases}$	$-n\mu I_2$	$-n\mu I_1$
							$n^2\mu I_4$	$n^2\mu I_2$	$n^2\mu I_5$	
								$(n^2+1)\mu I_1$	$n^2\mu I_3$	
									$(2\mu + \lambda) I_4 + n^2\mu I_6$	

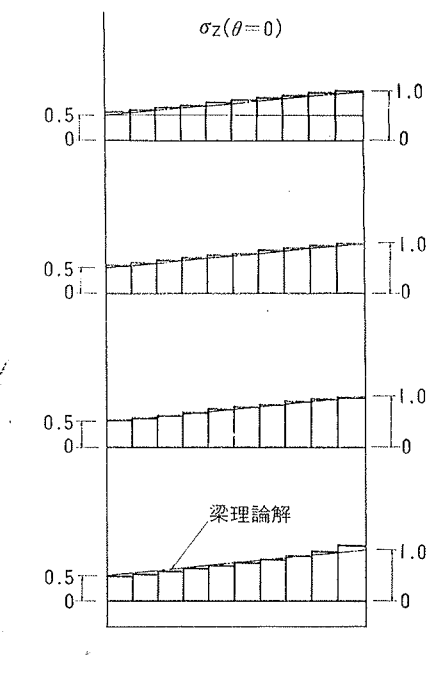
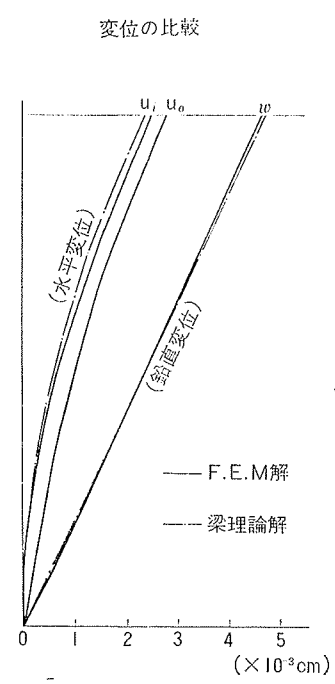
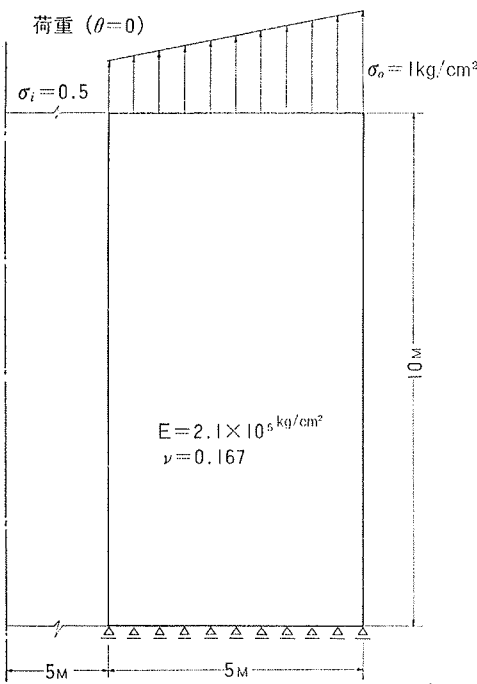


図-3

を用いると、 $\iint_A rB^TDBdrdz$  は式(2)となる。

1.7. 領域全体の剛性行列, その他

三角形断面リング要素に分割された回転体の系に対して変位法を適用し, 節点リングの変位を未知数として, 各節点での釣合式をたてる。

節点変位をベクトル

$$\mathbf{d} = \{u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2; \dots; u_n, v_n, w_n\} \quad \dots\dots\dots(23)$$

で, 節点に作用する荷重をベクトル

$$\mathbf{P} = \{Pr_1, P\theta_1, Pz_1; Pr_2, P\theta_2, Pz_2; \dots; Pr_n, P\theta_n, Pz_n\} \quad \dots\dots\dots(24)$$

で表わすとき, 釣合式は

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{P} \quad \dots\dots\dots(25)$$

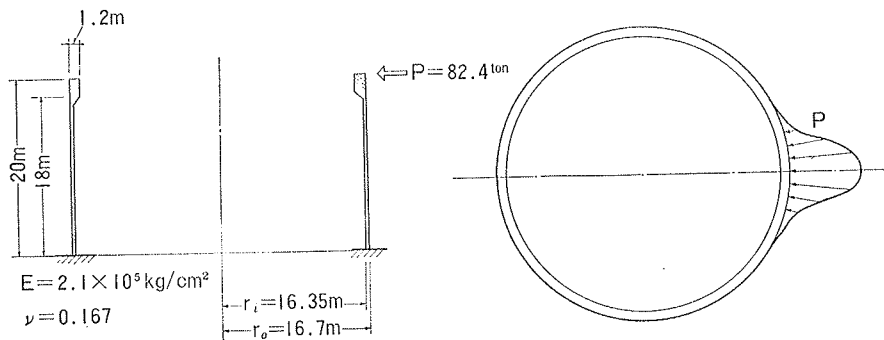
で表わされる。ここで $\mathbf{K}$ を領域全体の剛性行列といい, その成分は各要素の剛性行列 $\mathbf{K}_e$ の関係する成分の和として求めることができる。

(25)式の釣合式は変位を未知数としているから, 剛体変位成分を含んでいるので, 支持条件に従って剛性行列を修正しなければならない。修正後の釣合式より変位が求められ, したがって応力も求められる。

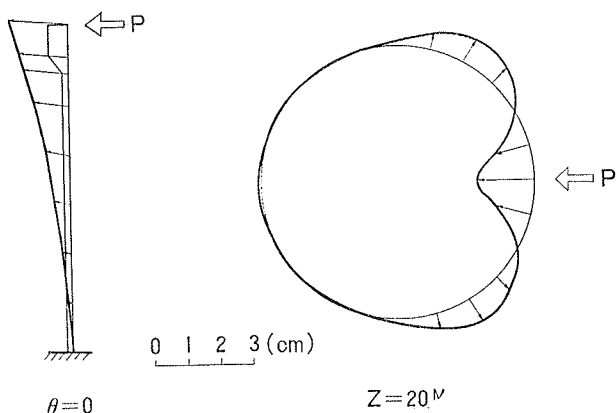
1.8. 計算例

8-1 例題 1

簡単な例題として, 厚肉円筒の先端に曲げモーメントが作用している場合について計算を行なった。図一



図一4 部分荷重を受ける円筒殻



図一5 変位分布図

3に厚肉円筒の形状, 荷重分布, 変位の比較,  $\sigma_z$ の分布を示し, 梁理論による値と比較してある。

8-2 例題 2

次の例題として, 円筒殻の先端に部分荷重(水平力)が作用している場合について計算を行なった。図一4に円筒殻の形状と荷重分布とを示した。荷重はフーリエ級数で次のように表わされるものを考えている。

$$\left\{ \begin{array}{l} Pr = 0.250 + 0.498 \cos \theta + 0.492 \cos 2\theta \\ \quad + 0.482 \cos 3\theta + 0.468 \cos 4\theta + 0.450 \cos 5\theta \\ \quad + 0.429 \cos 6\theta + 0.405 \cos 7\theta + 0.378 \cos 8\theta \\ \quad + 0.349 \cos 9\theta + 0.318 \cos 10\theta \\ \quad + 0.286 \cos 11\theta + 0.252 \cos 12\theta \\ P\theta = 0 \\ Pz = 0 \end{array} \right.$$

そして, 図一5に変位計算値の一部 ( $\theta=0$  断面の変位と円筒先端の半径方向変位)を示した。

2. 軸対称荷重を受ける薄肉回転体の応力解法について

2.1. 解析方法の概略

軸対称形薄肉回転体シェルにおいては, 軸対称形であるということによって, 有限要素として截頭円錐形要素を導入すると好都合である。そして, 截頭円錐形要素に対する変位関数を仮定し, その変位関数を用いて歪-変位の関係式を求め, さらに剛性行列と応力行列とを誘導する。それから, 個々の要素の剛性行列より回転体シェル全体の剛性行列を求め, 釣合式をたて, 支持条件によって全体の剛性行列を修正してから, 変位の解が求められ, さらに応力も求められる。簡単な例題について計算を行ない, 薄肉シェル理論による解析結果と比較することによって有限要素法による応力解法の妥当性を検討し, その有用性を実証する。

2.2. 荷重と変位

軸対称荷重を受ける軸対称形シェルでは, 変位は母線方向成分(u)とシェル面に鉛直な方向成分(w)との2ケであるが, 隣接する要素の適合条件としては, 変位 u, w のほかに回転  $\frac{dw}{ds}$  を考えることにする。ここでは, それをそのままの形で用いることをしないで構造物全体の剛性行列の作成を容易にするために図一6に示したような3ケの変位成分  $\bar{u}, \bar{w}, \beta$  を考えることにする。

すると, 要素 i の頂点における  $(u_i, w_i, \frac{dw}{ds}|_i)$  と

( $\bar{u}_i, \bar{w}_i, \beta_i$ ) との関係は次の式で表わされる。

$$\begin{bmatrix} u_i \\ w_i \\ \left(\frac{dw}{ds}\right)_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{w}_i \\ \beta_i \end{bmatrix} = T_3 d_i \dots\dots(1)$$

また、荷重としては図-6に示したように、変位 ( $\bar{u}_i, \bar{w}_i, \beta_i$ ) に対応する3ヶの荷重成分 ( $T_i, N_i, M_i$ ) を考えることにする。

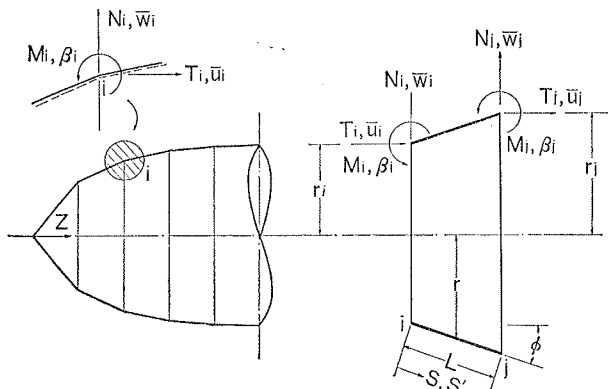


図-6 截頭円錐体要素

2.3. 変位函数

截頭円錐形要素において、変形の適合条件を満足するように、変位  $u$  は長さ  $s$  に関して線形に変化し、変位  $w$  は長さ  $s$  に関して三次曲線的に変化すると仮定すれば、変位函数は次のように表わされる。

$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 s \\ w = \alpha_3 + \alpha_4 s + \alpha_5 s^2 + \alpha_6 s^3 \end{cases} \dots\dots(2)$$

ここで、6ヶの未定係数  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$  は要素の2ヶの頂点における変位  $u, w, \frac{dw}{ds}$  によって決定される。そこで、 $s_i=0, s_j=l$  とすると、 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$  の値は次の式から求められる。

$$\begin{cases} u_i = \alpha_1 \\ u_j = \alpha_1 + \alpha_2 l \\ w_i = \alpha_3 \\ w_j = \alpha_3 + \alpha_4 l + \alpha_5 l^2 + \alpha_6 l^3 \\ \left(\frac{dw}{ds}\right)_i = \alpha_4 \\ \left(\frac{dw}{ds}\right)_j = \alpha_4 + 2\alpha_5 l + 3\alpha_6 l^2 \end{cases} \dots\dots(3)$$

(3)式より  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$  を求め(2)式に代入すると、

$$\begin{cases} u = (1-s')u_i + s'u_j \\ w = (1-3s'^2+2s'^3)w_i + l(s'-2s'^2+s'^3)\left(\frac{dw}{ds}\right)_i \\ \quad + (3s'^2-2s'^3)w_j + l(-s'^2+s'^3)\left(\frac{dw}{ds}\right)_j \end{cases} \dots\dots(4)$$

ここで、 $s'=s/l$  である。

2.4. 歪

図-1に示したよう截頭円錐形要素では、角度  $\phi$  が変化しないとすれば、歪と変位との間の関係は次の式

で表わされる。

$$\epsilon_e = \begin{bmatrix} \epsilon_s \\ \epsilon_\theta \\ \chi_s \\ \chi_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{du}{ds} \\ (w \cos \phi + u \sin \phi) / r \\ \frac{d^2 w}{ds^2} \\ \frac{\sin \phi}{r} \frac{dw}{ds} \end{bmatrix} \dots\dots(5)$$

したがって(4)式で定義された変位函数を用いると(5)式は次のようになる。

$$\epsilon_e = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 \\ \frac{(1-s') \sin \phi}{r} & \frac{(1-3s'^2+2s'^3) \cos \phi}{r} & \frac{(3s'^2-2s'^3) \cos \phi}{r} & \frac{s' \sin \phi}{r} & \frac{(3s'^2-2s'^3) \cos \phi}{r} & \frac{l(-s'^2+s'^3) \cos \phi}{r} \\ 0 & \frac{-6+12s'}{l^2} & \frac{-4+6s'}{l} & 0 & \frac{-6-12s'}{l^2} & \frac{-2+6s'}{l} \\ 0 & \frac{(6s'-6s'^2) \sin \phi}{r l} & \frac{(1-4s'+3s'^2) \sin \phi}{r} & 0 & \frac{(6s'-6s'^2) \sin \phi}{r l} & \frac{(-2s'+3s'^2) \sin \phi}{r} \end{bmatrix} = B \cdot d \dots\dots(6)$$

2.5. 応力

歪と応力との間の関係は次の式で表わされる。

$$\sigma_e = \begin{bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ M_s \\ M_\theta \end{bmatrix} = \frac{E t}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{t^2}{12} & \frac{\nu t^2}{12} \\ 0 & 0 & \frac{\nu t^2}{12} & \frac{t^2}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_s \\ \epsilon_\theta \\ \chi_s \\ \chi_\theta \end{bmatrix} = D \epsilon_e \dots\dots(7)$$

2.6. 要素の剛性行列

仮想仕事の原理を用いて、要素内の応力と静的に等価な頂点力を求めることにする。そこで、仮想頂点変位を  $d^*$ 、仮想頂点変位  $d^*$  によって要素内に生じる歪を  $\epsilon^*$  とすると、要素における仮想仕事は、

$$(d^*)^T r f_e = \int_A (\epsilon^*)^T \sigma_e r dA \dots\dots(8)$$

で表わされる。整理すると、

$$r f_e = K_e d_e \dots\dots(9)$$

となる。ここで、

$$\begin{cases} r = \text{diag} \{r_i, r_i, r_i; r_j, r_j, r_j\} \\ d_e = \{\bar{u}_i, \bar{w}_i, \beta_i; \bar{u}_j, \bar{w}_j, \beta_j\} \\ K_e = l [T_6^T \{ \int_0^1 r B^T D B ds \} T_6] \\ T_6 = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases} \dots\dots(10)$$

である。(9)式の  $K_e$  が要素の剛性行列で  $s'$  の函数となっている。それで  $K_e$  を求めるためには  $s'$  についての積分を行なわねばならないが、 $r B^T D B$  の各要素はかなり複雑な式となり、厳密に積分を行なうことは困難であり、それよりも数値積分によって  $K_e$  を求める方が容易であり、かつ実用的でもある。

## 2.7. 領域全体の剛性行列, その他

截頭円錐形要素に分割された回転体の系に対して変位法を適用し, 節点変位を未知数として各節点での釣合式をたてる。

節点変位をベクトル

$$\mathbf{d} = \{\bar{u}_1, \bar{w}_1, \beta_1; \bar{u}_2, \bar{w}_2, \beta_2; \dots; \bar{u}_n, \bar{w}_n, \beta_n\} \quad \dots\dots\dots(11)$$

で表わし, 節点に作用する荷重をベクトル

$$\mathbf{P} = \{T_1, N_1, M_1; T_2, N_2, M_2; \dots; T_n, N_n, M_n\} \quad \dots\dots\dots(12)$$

で表わすとき, 領域全体の釣合式は

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{P} \quad \dots\dots\dots(13)$$

のようになる。ここで $\mathbf{K}$ は領域全体の剛性行列であり, その成分は各要素の剛性行列の関係する成分の和として求めることができる。

次に支持条件によって領域全体の剛性行列を修正すれば, 変位を求めることができ, したがって応力も求められる。

## 2.8. 計算例

### 8-1 例題 1

簡単な計算例として頂部に曲げモーメントが作用している截頭球殻を考えることにし, その形状を図-7に示した。

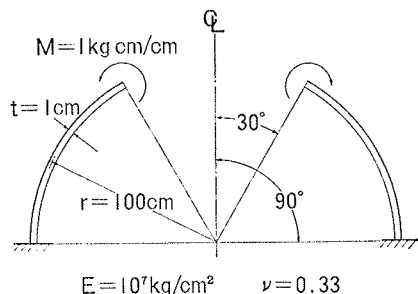


図-7 截頭球殻

要素の分割については図-8に CASE 1 から CASE 4 の場合について示した。

積分領域を  $N=1, 2, 5, 10, 25, 50$  区分したものについて台形公式によって数値積分を行ない剛性行列の値を求めてみた。そのうち, CASE 3 の要素 5 について剛性行列の各要素の値と  $N$  の関連性を図-9に示した。 $N=1, 2$  のときにはあまりよく近似しているとはいえないが, このことは要素の大きさとは無関係である。

次に, CASE 3 の  $N=1$  について水平変位とモーメント ( $M_\phi$ ) とを図-10と図-11に示したが, Hetényi の近似理論解とかなり良く一致している。また, CASE 1 から CASE 4 までについて,  $N=1, 2, 5, 10, 25, 50$  の各々について計算した結果のうち  $\phi=32^\circ$  の点の水平変位と曲げモーメント ( $M_\phi$ ) との比較を図-

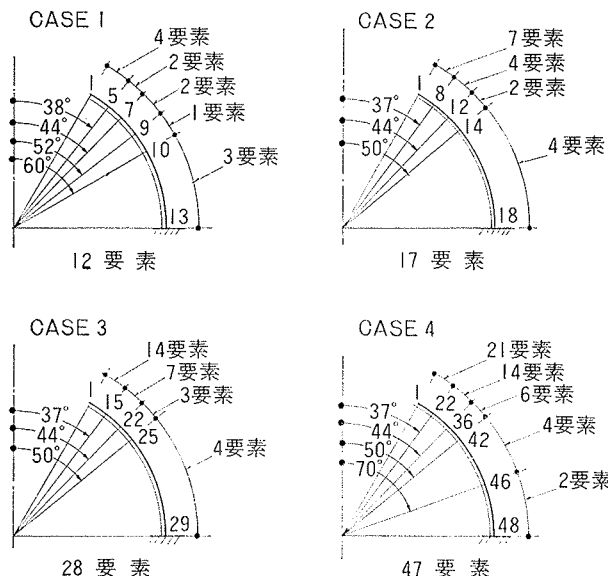


図-8 截頭球殻の要素分割

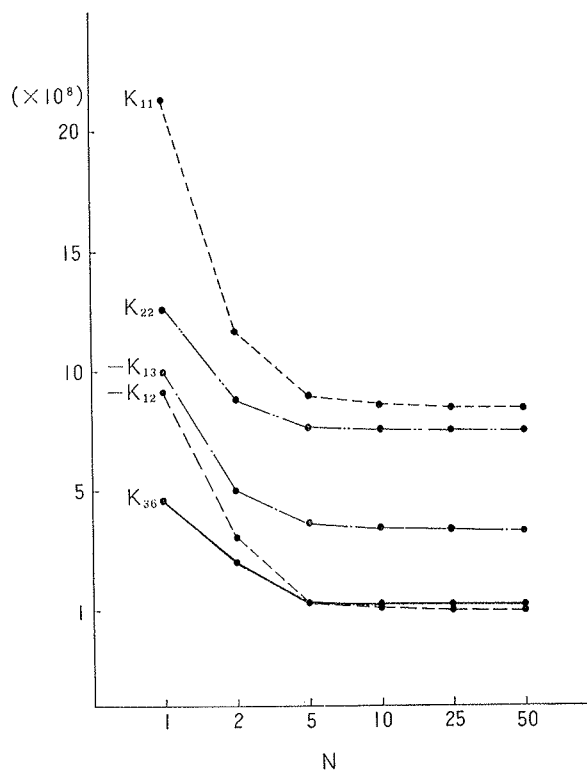


図-9  $K_{ij}$  と  $N$  との関連性

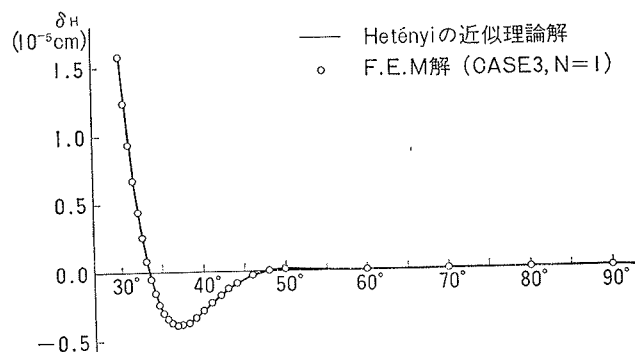


図-10 水平変位 ( $\delta_H$ )

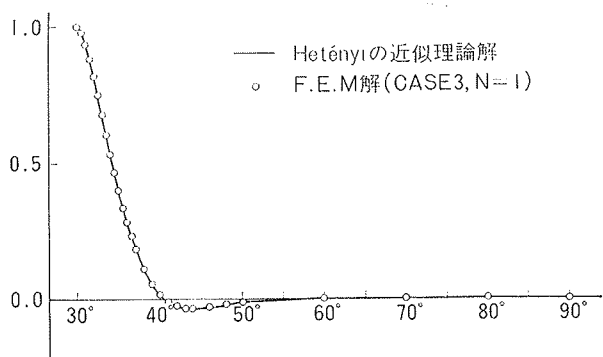


図-11 曲げモーメント ( $M_\phi$ )

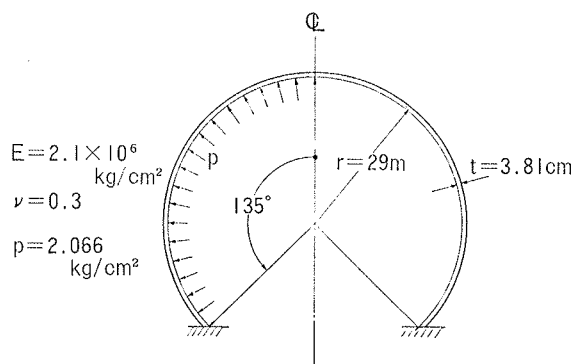


図-13 内圧を受ける球殻

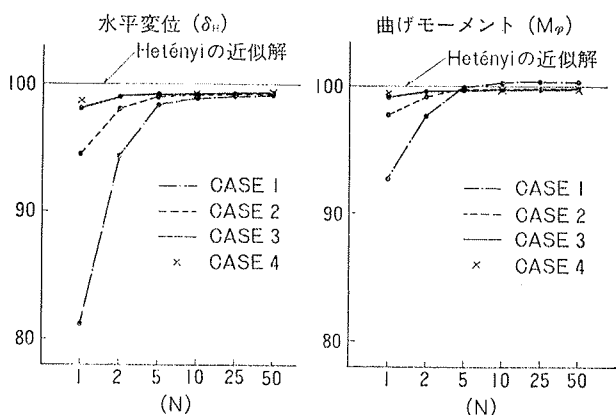


図-12 比較図 ( $\phi=32^\circ$  のとき)

している場合を考えることにし、その形状を図-13に示した。

計算結果の一部について、Hetényi の近似理論解と比較したものが図-14である。ただし、有限要素法による解は  $N=1$  についてのものである。

### 3. 結 び

以上、厚肉回転体と薄肉回転体とについて有限要素法による解法を誘導し、簡単な例題について解を求め、在来の理論による結果との比較を行なった。その結果、有限要素法による回転体の応力解法の有用性が実証された。

れた。

終りに、本研究にあたり当組機械計算部の内山職員の協力を得ました。ここに深く謝意を表します。

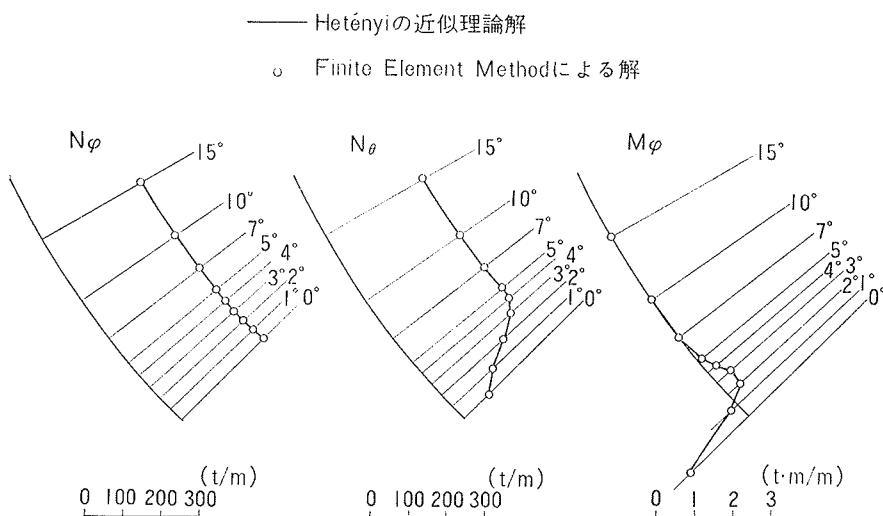


図-14 近似理論解と F.E.M. 解との比較

12に示した。

以上の結果より、ある程度細かな要素に分割すれば  $N=1$  でも充分実用的な結果が得られることが分る。

#### 9-2 例題 1

次の計算例として、頂部の閉じた球殻に内圧が作用

#### 参考文献

- 1) 川股重也・塩屋繁松「回転体の非対称問題に対する剛性行列」生産研究, Vol. 20, No. 1 (1968・1)
- 2) Grafton, P.E. and Strome, D.R. "Analysis of Axisymmetrical Shells by the Direct Stiffness Method", AIAA Journal, Vol. 1, No. 10, Oct. 1963
- 3) Zienkiewicz, O.C., and Cheung, Y.K., "The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics", McGraw-Hill, 1967