

長大つり橋橋脚の地震応答計算上の問題点について

齋藤 二郎
後藤 洋三

概要

長大つり橋の耐震設計では、その主塔橋脚に対する対震性の検討を十分行なっておく必要がある。しかるに主塔橋脚は、背の高い鉄骨の塔と巨大なマスコンの橋脚が結合された構造であるため、複雑な振動特性を有している。われわれは主塔と橋脚の共振現象により主塔部の応答が増幅される(whip effect)問題と、橋脚部の減衰が大きいために生じる減衰性のアンバランスの問題を取り上げ、地震応答計算と複素固有値解析による解析を進めてきた。本報告では地震応答計算と複素固有値解析による解析方法について述べ、その解析結果と結果から得られた設計上の指針をあわせて示している。

1. 序

現在わが国では本四連絡橋をはじめ多数の長大つり橋が計画されており、その一部はすでに建設に着手されている。長大つり橋の設計にはわが国が地震国であるところから耐震性に関する綿密な配慮が必要である。橋梁の耐震設計には従来から震度法あるいは修正震法が用いられてきた。しかし長大つり橋のように大規模な構造物の耐震設計に震度法を適用するのは不適当であり、それゆえに今日まで多数の研究者が動的な解析手法によって耐震性の検討を進めてきた。その結果数多くの成果が報告されており、長大つり橋の動的耐震設計法は確立の途上にあるといえる。

さて今日までの研究から、長大つり橋では主塔橋脚部分が耐震的に最も問題になる構造部分であり、かつ複雑な動力学的特徴を有していることが明らかにされてきた。そしてその動的特性と耐震解析法について十分研究する必要があることが指摘されている。この主塔橋脚の動力学的特徴とは、深い海底に建設される巨大な橋脚と鉄骨からなる背の高い塔が結合され一体となっている点にある。すなわち動的性質が異なる2つの構造系の相互作用から生ずる問題で、その1つは主塔と橋脚の共振による主塔部の振幅の増大現象(いわゆるWhip effect)であり、他の1つは主塔に比べ橋脚基礎部の減衰性が非常に大きくて減衰分布にアンバランスが生じる問題である。

われわれは地震応答計算と複素固有値解析を駆使して上記2つの問題点を解析し、主塔橋脚の耐震特性を明らかにしてきたので、以下にその内容を紹介する。

2. 解析モデルと運動方程式およびモード解析法

われわれが対象とした長大つり橋は本四連絡橋建設計画の調査用として概略設計されたもので、センタースパン 1,500m級のものである。主塔橋脚ディメンションは図-1に示すとおりで、本研究ではこれを図-2に示す質点系モデルに置換している。

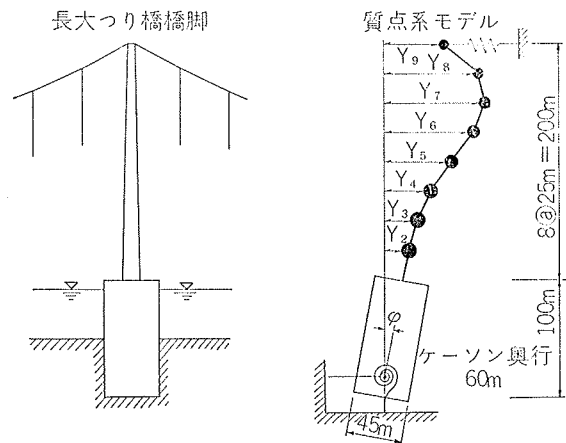


図-1

図-2

図-2のモデルの運動方程式は次式で示される。

$$[M]\left\{\begin{matrix} \ddot{y} \\ \ddot{\phi} \end{matrix}\right\} + [C]\left\{\begin{matrix} \dot{y} \\ \dot{\phi} \end{matrix}\right\} + [K]\left\{\begin{matrix} y \\ \phi \end{matrix}\right\} = -[M]\left\{\begin{matrix} \ddot{z} \\ 0 \end{matrix}\right\} \quad \dots\dots(1)$$

上式中 y は塔部の変位、 ϕ は基礎回転角、 z は地震加速度である。 $[M]$ には基礎の回転慣性も含まれる。

さて(1)式の $\left\{\begin{matrix} y \\ \phi \end{matrix}\right\}$ をモードベクトル $\{V\}_i$ を用いて直交座標系に展開する。すなわち

$$\left\{\begin{matrix} y \\ \phi \end{matrix}\right\} = \{V\}_1 \xi_1 + \{V\}_2 \xi_2 + \dots + \{V\}_n \xi_n = [V]\{\xi\} \quad \dots\dots(2)$$

$[V]$ はモーダルマトリックスで次式で定義される。

$[V]^T[M][V]=[I], [V]^T[K][V]=[dia(\omega^2)]$
 ここに $[dia(\quad)]$ は () 内が対角線上に並んだマトリックスを示す。また ω は角振動数である。

さて(1)式に(2)式を代入し前から $[V]^T$ をかけると

$$[I]\{\ddot{\xi}\}+[V]^T[C][V]\{\dot{\xi}\}+[dia(\omega^2)]\{\xi\}=-[V]^T[M]\begin{Bmatrix} \ddot{z} \\ 0 \end{Bmatrix}$$
 ……………(3)

ここで減衰項が対角化されると仮定する、すなわち
 $[V]^T[C][V]=[dia(2\beta\omega)]$ ……………(4)

とすると(3)式は対角化され

$$[I]\{\ddot{\xi}\}+[dia(2\beta\omega)]\{\dot{\xi}\}+[dia(\omega^2)]\{\xi\}=\{f\}$$
 …… (5)

(5)式は各行ごとに独立しているので、1行ずつ取り出すと各モード別の運動方程式が得られる。すなわち各モードは1自由度系の振動として扱えることになり、解析を進めるうえで非常に便利である。

3. 基礎条件と主塔橋脚の共振現象

本四連絡橋の建設が予定される地盤は多種多様であって、地盤反力係数は広い範囲(変形係数で $100 \sim 10,000 \text{ kg/cm}^2$)にばらついており、橋脚の高さ、幅なども建設地点の状況に応じて変化する。このような基礎条件の変化は主塔橋脚の振動特性に大きな影響を与えるものであり、その解析が必要である。

図-2のモデルについて、地盤反力係数を変化させてモード解析を行ない、地盤反力係数～固有振動数曲

線を作成したものを図-3に示す。同図の特徴は、隣りあう振動数曲線が地盤反力係数のある領域で接近していることである。図中の破線は橋脚のみの場合のロッキング振動の周期を示しており、塔と橋脚が結合しているにもかかわらず、橋脚の固有周期と主塔の固有周期の影響が全体の周期に明瞭に現われている。図-3のA～D点に対応したモード波形を図-4に示す。図-3、図-4から明らかになる点は、(1)固有周期が接近するB、Dの領域では塔と橋脚がともに振れるモ

地盤反力係数～振動数曲線

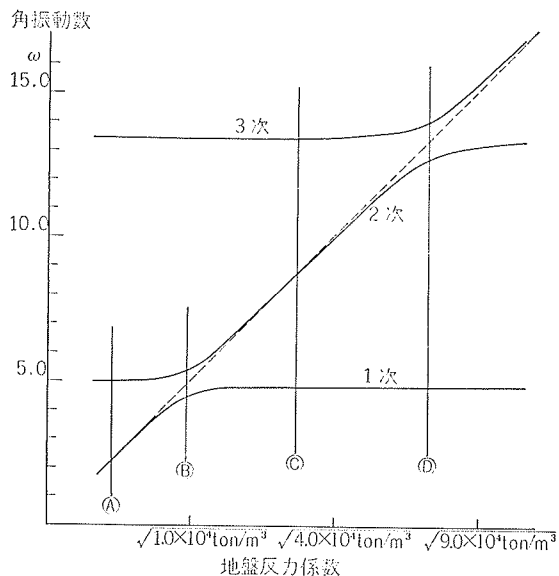
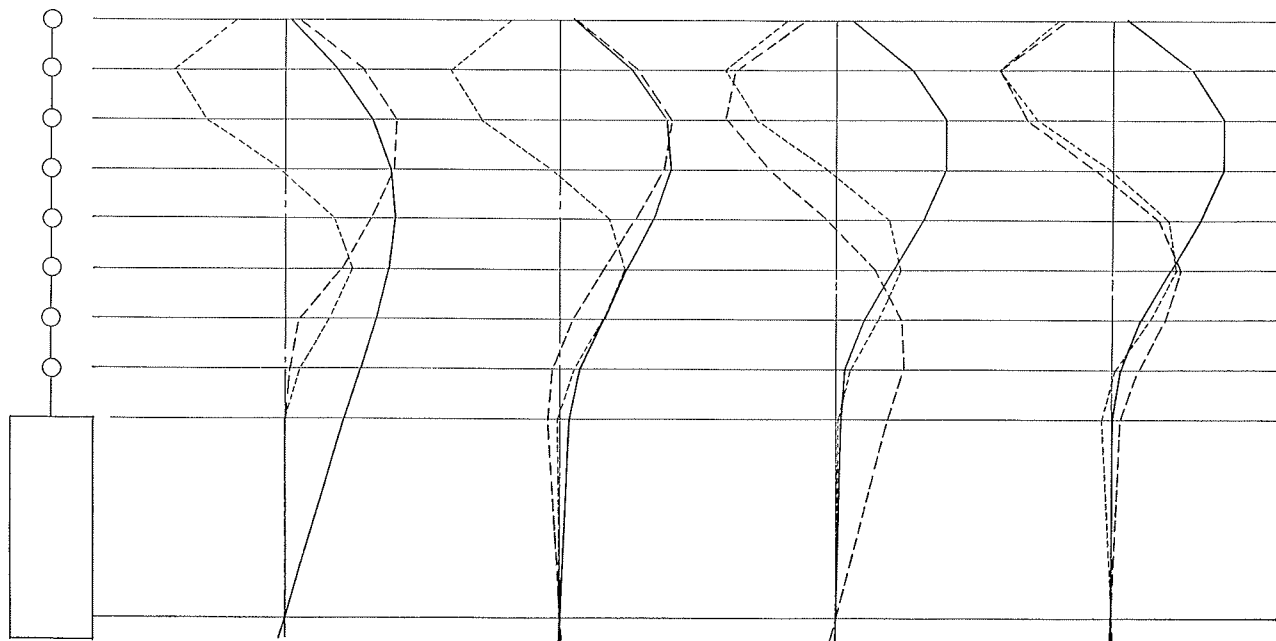


図-3

固有振動モード

—— 1次モード - - - 2次モード ····· 3次モード



A点 $K_v=2.0 \times 10^3 \text{ ton/m}^3$ B点 $K_v=9.7 \times 10^3 \text{ ton/m}^3$ C点 $K_v=3.0 \times 10^4 \text{ ton/m}^3$ D点 $K_v=6.9 \times 10^4 \text{ ton/m}^3$

図-4

ードが2個現われ、(2)この2個のモードを比較すると橋脚部と塔部の符号が逆になっているが、塔部の波形そのものはよく似ていること、(3)固有周期の接近していないA、Cの領域では橋脚の振れるモードは1個であり、塔部と共振していないことなどである。

図一5にはA～Dの各点について地震応答計算を行ない最大変位を求めた結果を示している。減衰を各モード2%とした場合、B点D点では塔部の変位が橋脚の変位に比べ相対的に大きくなっており、塔部の応答が増幅されていることが示される。この現象は Whip effect と呼ばれるもので、振動数の接近した2個のモードの間でビートが起こり、塔部の似ている2つの波形が足し合わされた結果である。一方、橋脚が大きく振れるモードに20%相当の減衰をかけた場合の計算結果を見ると、応答量が全体にちいさくなるとともに、上記の増幅現象も見られなくなる。これは過渡振動であるため、ビートが塔部に生じるまでに、ビートを起こす2つのモードの応答量が減衰されてしまうためである。すなわち、地震によって橋脚に入力されたエネルギーが塔部に伝達されるまでに、橋脚の減衰機構により吸収されてしまう現象とも解釈される。

以上で地盤反力係数との関係を述べてきたが、同様の現象は橋脚の高さや幅の変化によって起こりうる。設計上問題となる塔部の応答の増幅は、橋脚部の減衰

が非常に大きい場合、問題にはならないことが明らかになった。しかし次章でもふれるように、減衰についてはまだ明確にされていない点が多い。したがって与えられた地盤反力係数に対して橋脚の設計を進める場合、一般的には、振動数の接近するB、D領域をさけるように橋脚の寸法を決定する配慮が必要である。

4. 橋脚部の減衰と複素固有値解析

長大つり橋の主塔橋脚では、橋脚部の減衰が振動エネルギーの地下逸散と地盤の弾塑性の影響を受けて、10～30%という大きな値となることが予想される。一方塔部は背の高い鉄骨構造であるため、減衰は1%前後である。地震時には塔と橋脚が一体となって振動するわけであるから、減衰のこのアンバランスがどのような影響をもつか明らかにしておく必要がある。

4.1. 減衰マトリックス [C] の対角化の条件

2. で示した運動方程式(1)では、[C]に[M]または[K]に係数をかけたものが一般によく用いられる。しかしこのような[C]の決定法に関する物理的根拠は明確でなく、むしろ計算上の便利さから多用されてきたといえる。

さて減衰のアンバランスを考慮するため[C]を任意の形状にした場合、(4)式の仮定すなわち[C]の対角化が成立する条件が問題となる。対角化の条件については Cauchy が次式の必要十分条件式を示した。

$$[C] = 2\beta_1\omega_1[M]^{1/2}\left\{\frac{1}{\omega^2}[M]^{-1/2}\cdot[K]\cdot[M]^{-1/2}\right\}^n[M]^{1/2} \quad \dots\dots\dots(6)$$

ここにnは整数または整数である。(6)式の代表的形状としては式のものあげられる。

$$n=0 \text{ で } [C] = 2\beta_1\omega_1[M] \quad \dots\dots\dots(7)$$

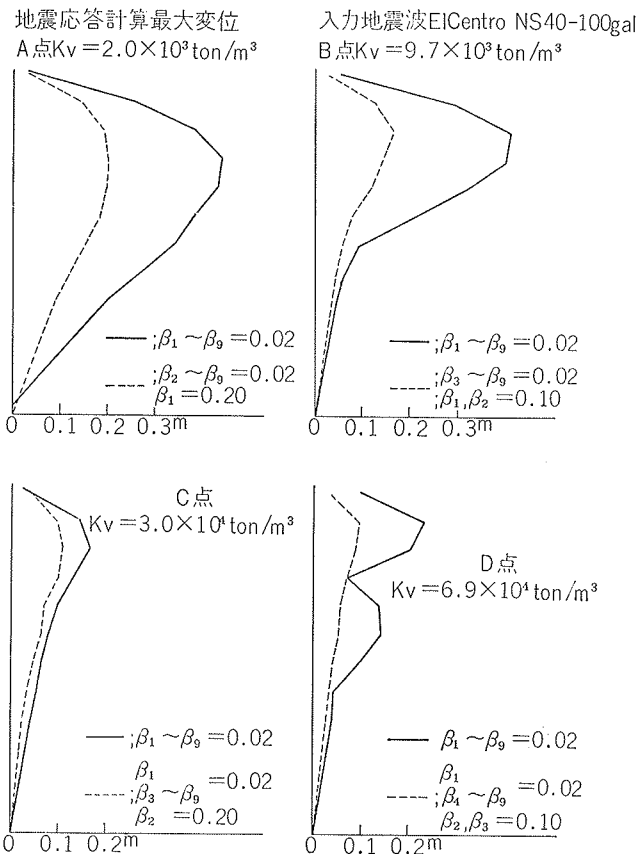
$$n=1 \text{ で } [C] = \frac{2\beta_1}{\omega_1}[K] \quad \dots\dots\dots(8)$$

$$n=1/2 \text{ で } [C] = 2\beta_1[M]^{1/2}\{[M]^{-1/2}[K][M]^{-1/2}\}^{1/2}[M]^{1/2} \quad \dots\dots\dots(9)$$

さて橋脚基礎部にのみ大きな減衰を与えた[C]を用いようとする場合、[C]を(6)式またはその組み合わせで表現することは一般に不可能である。したがって[C]の対角化ができなくなり、2. で述べたモード解析法は適用できない。しかし次節で述べる複素固有値解析を行えば、(6)式が成立しない場合でもモード解析の概念を適用していくことが可能となる。

4.2. 複素固有値解析法

(1)式を複素固有値解析していくためには、以下に示す手法が必要である。すなわち(1)式をまず倍の自由度をもつ1階の微分方程式に変換する。



図一5

$$\begin{bmatrix} 0 & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -[M] & 0 \\ 0 & [K] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -[M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{z} \end{Bmatrix}$$

ここで(10)

$$\left. \begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} 0 & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} -[M] & 0 \\ 0 & [M] \end{bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\phi} \\ y \\ \phi \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} p\Phi \\ \Phi \end{bmatrix} e^{pt} \quad \begin{Bmatrix} f \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{z} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots(11)$$

とすると(10)式は次のように書き換えられる。

$$p[A] \begin{Bmatrix} p\Phi \\ \Phi \end{Bmatrix} e^{pt} + [B] \begin{Bmatrix} p\Phi \\ \Phi \end{Bmatrix} e^{pt} = \begin{Bmatrix} f \\ z \end{Bmatrix} \dots\dots(12)$$

[D]=[A]⁻¹[B]とし、(12)式の同次方程式を考え e^{pt}を消去すれば

$$p[D] \begin{Bmatrix} p\Phi \\ \Phi \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} p\Phi \\ \Phi \end{Bmatrix} = \{0\} \dots\dots(13)$$

したがって(13)式の特微方程式は次式で示される。

$$|pI + D| = 0 \dots\dots(14)$$

(14)式の根が固有値を与えるが、N自由度の振動問題では、根はN組の共役な複素数として求められる。この根を(13)式に代入すれば、対応するN組の共役固有ベクトルが得られる。

さて i 組目の複素固有値と固有ベクトルを

$$\left. \begin{aligned} p_i &= -\beta_i + i\omega_i, \quad \bar{p}_i = -\beta_i - i\omega_i \\ \{\Phi\}_i &= \{\phi\}_i + i\{\psi\}_i, \quad \{\bar{\Phi}\}_i = \{\phi\}_i - i\{\psi\}_i \end{aligned} \right\} \dots\dots(15)$$

とし i 次モードと呼ぶことにすると、 $\begin{Bmatrix} y \\ \phi \end{Bmatrix}_i$ は(11)式の逆変換を行なうことによって

$$\begin{Bmatrix} y \\ \phi \end{Bmatrix}_i = [\{\phi\}_i \pm i\{\psi\}_i] \cdot e^{(-\beta_i \pm i\omega_i)t} \dots\dots(16)$$

$$= 2 \cdot e^{-\beta_i t} [\{\phi\}_i \cos \omega_i t - \{\psi\}_i \sin \omega_i t] \dots\dots(17)$$

さらに i 次モードによるひとつの節点 j の変位 y_i^(j) は

$$y_i^{(j)} = 2 \cdot e^{-\beta_i t} \cdot x_i^{(j)} \cdot \cos(\omega_i t + \theta_i^{(j)}) \dots\dots(18)$$

ここに

$$x_i^{(j)} = \sqrt{\phi_i^{(j)2} + \psi_i^{(j)2}}, \quad \theta_i^{(j)} = \tan^{-1} \left(\frac{\phi_i^{(j)}}{\psi_i^{(j)}} \right)$$

x_i^(j) は i 次モードによる j 節点の振幅を示し、θ_i^(j) は i 次モードにおける j 節点の位相である。このように、複素モードではひとつのモード内で各節点の振幅が最大になる時間に差が生じる。すなわち位相差が生じてくる。また複素固有値の実部は減衰性を、虚部は

振動数を示しており、複素固有値解析を行なえば各モードの減衰常数を求められることができる。

さて次に複素固有値解析によって地震応答計算を行なう方法を検討する。(10)式において

$$\begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\phi} \\ y \\ \phi \end{Bmatrix} = \sum_i (\{\Phi\}_i \zeta_i) = [\Phi] \{\zeta\} \dots\dots(19)$$

ここに[Φ]は複素モードマトリックスであり、{ζ}は複素応答量のベクトルである。(10)式に(19)式を代入し、前から[Φ]^Tをかけてやると

$$[\Phi]^T [A] [\Phi] \{\zeta\} + [\Phi]^T [B] [\Phi] \{\zeta\} = [\Phi]^T \{f\} \dots\dots(20)$$

モードの直交性から[A], [B]ともに対角化されて

$$[\text{dia}(\lambda)] \{\zeta\} + [\text{dia}(\mu)] \{\zeta\} = [\Phi]^T \{f\} \dots\dots(21)$$

上式の右辺は地震入力を示すベクトルとなるので、左辺の各行を独立して取り扱うことが可能となる。したがって各モードごとの地震応答を求めるには、各行別に(21)式を数値積分していけばよい。応答変位はこの結果に(19)式の変換をすることにより求められる。

4.3. 数値解析法

(14)式の複素固有値を求める計算プログラムは、本研究のためあらたに開発したもので、[D]を一度多項式に展開しその根をNewton-Raphson法によるIterationで求める方法をとった。

(21)式の数値積分はRunge-Kuttaの2元連立1階線型微分方程式の解法によっている。

さて橋脚基礎に大きな減衰を付加したことを表現する[C]をどのような形状にするかが、解析上重要な問題となる。今回の研究では、付加した減衰の影響が検討しやすいという観点から、物理的な根拠はあいまいであるが、次式で示す形状を採用することとした。

$$[C] = [\tilde{M}]^{1/2} \{[\tilde{M}]^{-1/2} [\tilde{K}] [\tilde{M}]^{-1/2}\} [\tilde{M}]^{1/2} \dots\dots(22)$$

上式中の[\tilde{M}]と[\tilde{K}]は次式で決定する。

$$[\tilde{M}] = 2\beta_t \omega_1 [M] + 2(\beta_p - \beta_t) \omega_1 \begin{bmatrix} 0 & \\ & m \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{K}] = \frac{2\beta_t}{\omega_1} [K] + \frac{2(\beta_p - \beta_t)}{\omega_1} \begin{bmatrix} 0 & \\ & k \end{bmatrix}$$

ここに $\begin{bmatrix} 0 & \\ & m \end{bmatrix}$; 橋脚の回転慣性項のみのマトリックス

$\begin{bmatrix} 0 & \\ & k \end{bmatrix}$; 地盤のバネのみのマトリックス

ω₁; 1次の固有振動数

β_t, β_p; 主塔と橋脚の減衰常数

(22)式でβ_t=β_pとすると、振動数に関係しない一定の各モード減衰常数β_i=β_tが得られ、比較検討に好都合である。

4.4. 解析結果

主塔の減衰 $\beta_t=2\%$ とし、橋脚の減衰 $\beta_p=10\%$, 20% , 30% とした場合について複素固有値解析を行ない、地盤反力係数～振動数、～減衰常数の関係を調べた。図一6から図一11にその結果を示す。図から明らかになるように、橋脚の減衰が大きくなると、(1)振動数曲線の接近現象が顕著となり、ある値以上では交差するようになる、(2)減衰常数の曲線は逆に交差しなくなり、モード次数を固定してみると減衰常数にジャンプが生じることになる。

次に橋脚の減衰 $\beta_p=20\%$ の場合で、振動数曲線の接近または交差点とその領域から離れた点(図一7におけるA～E点)における、各モードの波形と位相差を図一12に示す。図から次の点が明らかになる。(1)橋脚の減衰の影響は位相差に大きく現われ波形には影響が少ないこと。(2)ただし、振動数曲線が交差するほどに橋脚の減衰が大きくなると波形にも影響してくること。(3)振動数接近領域B, Dでは、振動曲線が交差しない範囲では橋脚が大きく振れるモードは2個であるが、交差する場合には1個になってしまうこと。(4)橋脚の大きな減衰の影響を受けて減衰常数が大きくなるモードは、橋脚が大きく振れるモードに限られること。

以上(1)から(4)に述べたことは紙面の都合で割愛した $\beta_p=10\%$, 30% の結果からも裏付けられている。

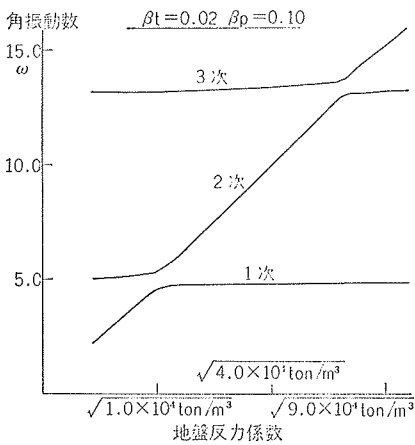
さて、図一7のA～E点において地震応答計算を行った結果を図一13に示す。図中実線は複素モードを用いた厳密な複素応答計算である。破線は2.で述べた減衰のない場合に得られるモードを用い、減衰常数のみ複素固有値から得られた値を用いた、近似の応答計算結果である。A, B, C点の結果では実線と破線に大差ないが、D, E点では差が生じ、特にモーメントについてその傾向が著しい。この差は振動数曲線が交差するほどに橋脚の減衰が大きくなった場合に生じてくると考えられ、 $\beta_p=10\%$, 30% の場合の応答計算結果からも裏付けられる。したがって非減衰時のモードを用いた解析法を、橋脚部に大きな減衰のある場合に適用していくには限界があることが明らかである。

5. 結語

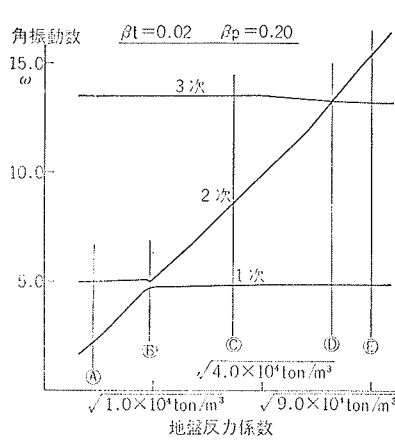
3.4. の解析から得た結論は次のとおりである。

(1) 橋脚部に大きな減衰が期待できない場合には、塔と橋脚の共振により塔部の応答が大きくなるおそれがある。したがって橋脚の振動特性が共振の起こらない領域にくるよう設計上の配慮を行なうべきである。

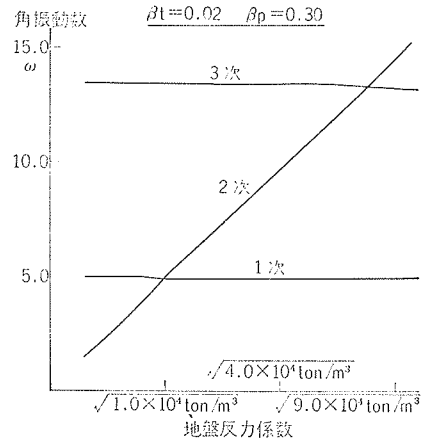
(2) 橋脚部の減衰の影響を受けるモードは、橋脚部が大きく振れるモードに限られる。したがって橋脚部の大きく振れるモードに橋脚部の減衰常数を対応させることにより近似が可能である。



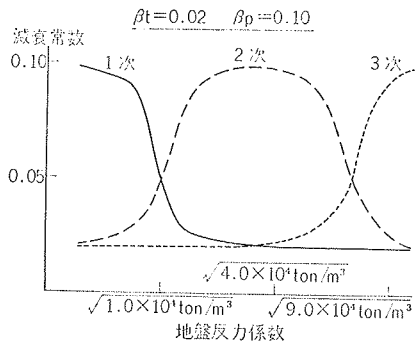
図一6



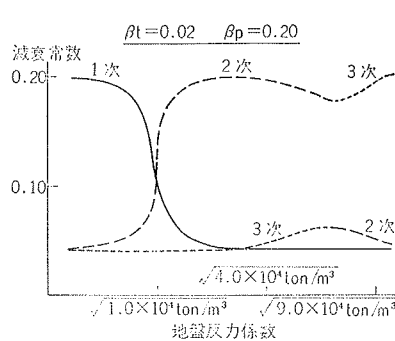
図一7



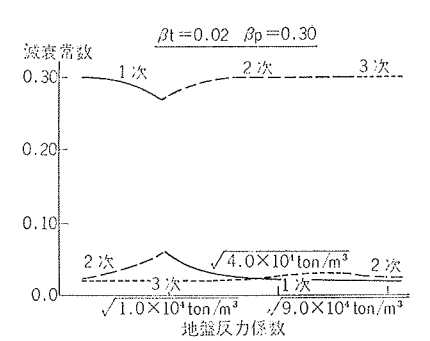
図一8



図一9



図一10



図一11

(3) しかし(2)の近似による応答計算の精度には限界があり、橋脚部の減衰が非常に大きくなると厳密な複素応答計算が必要となる。

本研究の今後の課題は、複素固有値の挙動を解析的に追究することと、一方では、複雑な複素固有値解析を行わずに、厳密解に近い結果が得られるような、減衰常数の工学的決定法を検討することである。

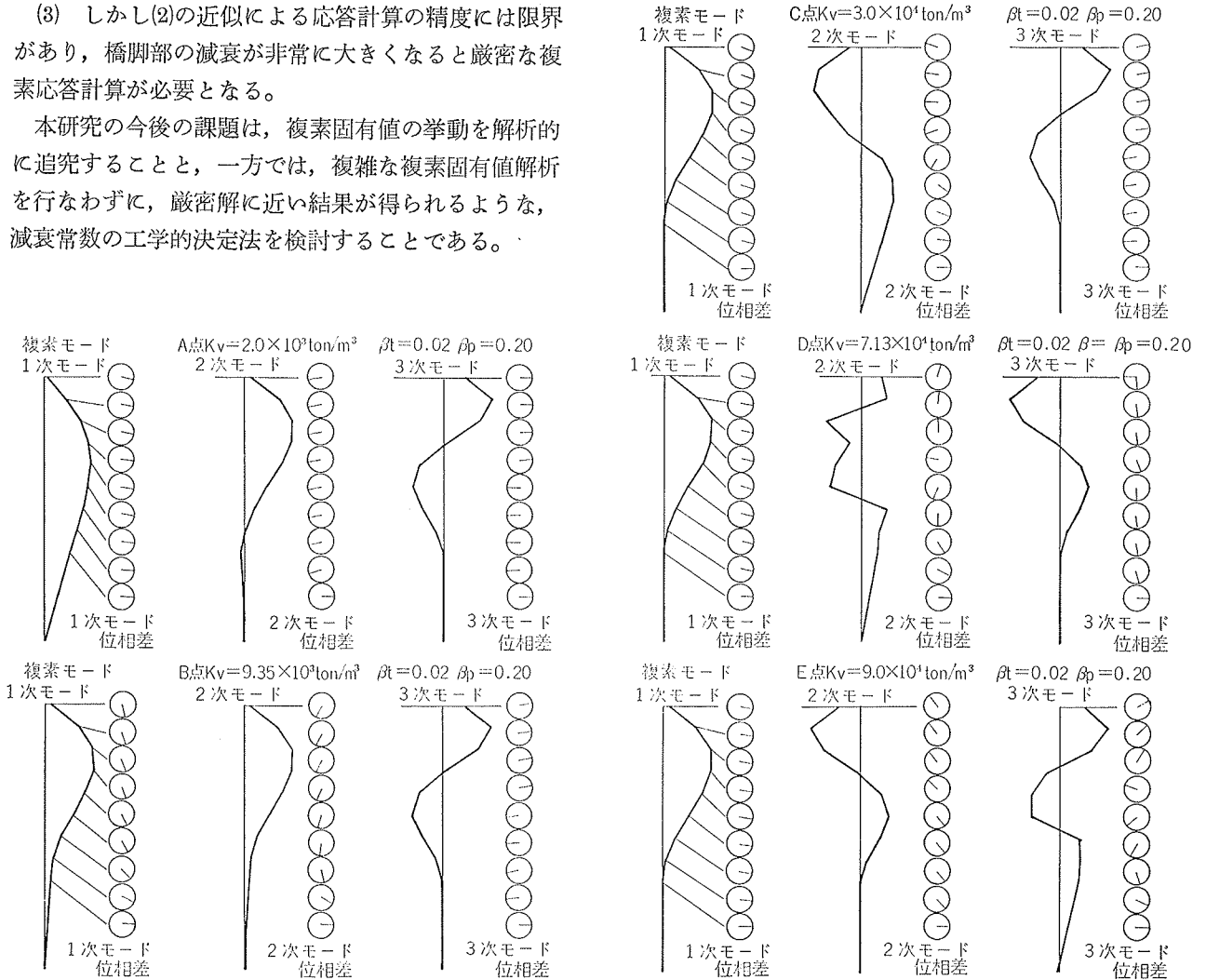


図-12

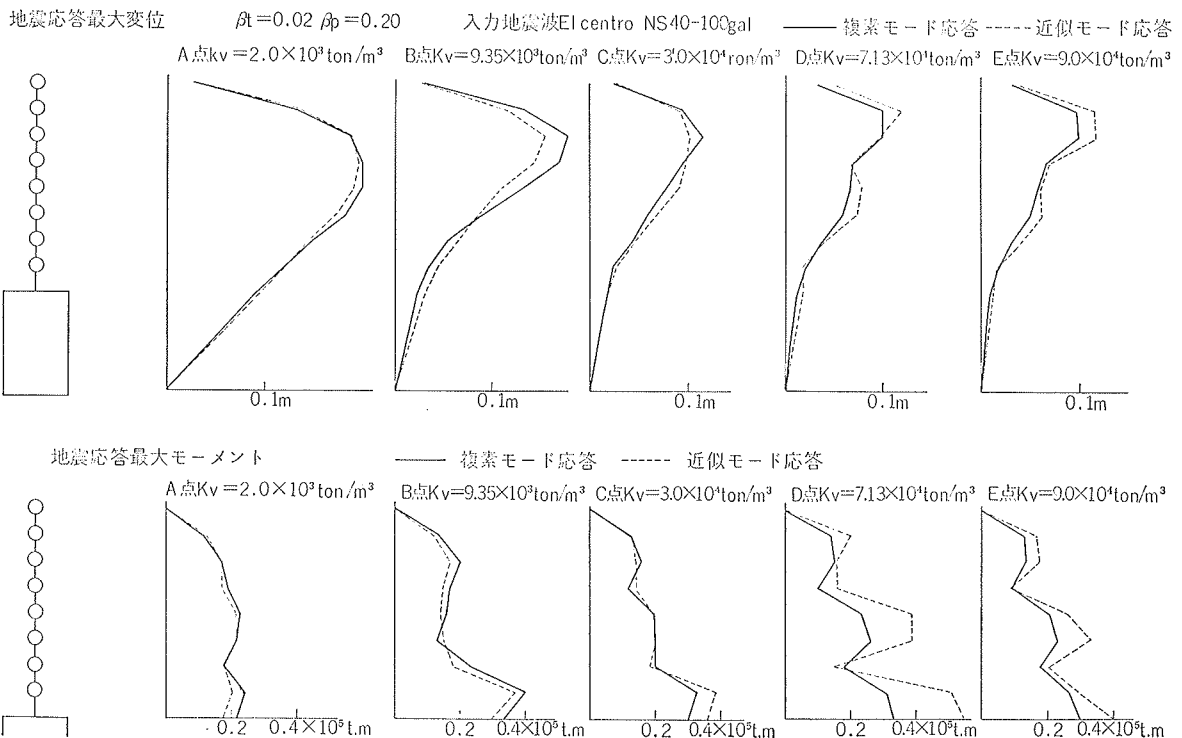


図-13