

RC 構造物の温度変化および硬化乾燥収縮による変形に関する研究

高橋 久雄
中島 安夫

概 要

従来、温度による変形、応力解析方法はおもに弾性解析であるが、ここではおもに軸力が加わる場合のモーメント曲率関係式を e 関数法を用いて算出し、積分法により塑性剛性を求める方法で解析を行なった。数値解析は 1 層 7 スパンラーメンについて行ない、温度荷重は一方向に加わるものとした。ひび割れ発生前は弾性計算、発生後の応力計算は増分法により、部材の一部が降伏した場合はその部材端部に降伏モーメントをもつ Hinge におきかえて解析を行なった。また実測値との比較検討も試みた。

1. まえがき

鉄筋コンクリート構造物は外界から受ける気温、直射日光あるいは夜間の熱放射および冷暖房による熱影響を受け、温度膨張収縮およびコンクリートの乾燥収縮により挙動することになる。

温度変化については、これまでに実測した報告があり、これより外部に露出した部材は大きな温度変動を受けていることがわかっている。たとえば、外部に露出した屋根スラブは年間約 60°C、日間約 20°C の温度変化があり、一方コンクリートの硬化乾燥収縮は打設したコンクリートの調合あるいは雰囲気温度によって変化し、部材の体積に対する表面積の割合が大きいほど収縮が大きいことも明らかとなっている。

フレームの温度変化による変形および応力の理論解析については、これまでに固定法、撓角法等によるものあるいは剛性マトリックスによる直接変形解法があるが、いずれも弾性計算によるものであった。しかし実際の鉄筋コンクリート部材の弾性部分はごくわずかであり、大部分は半塑性および塑性部分である。

本報告書では、当研究所建家（7 スパン、1 層ラーメン）の北側のフレームが一方向に自己ひずみを生じた場合について、柱の曲率—曲げモーメント関係式（e 関数法）より接線剛性を算出し、増分法によって変形および応力を求め、さらに部材の一部が降伏した場合は、その部材端部に降伏モーメントをもつ Hinge におきかえて解析を行なったものである。

また、解析の対象とした、フレームの変位実測を行ない、日内の温度変化およびひずみを測定し、実測結果と解析結果を比較検討したものである。

2. 各荷重段階における部材剛性の算定

自己ひずみによる荷重が一方向に加わる場合の部材の変形および応力を解析するに当たり荷重段階ごとの各部材の剛性を知る必要がある。剛性の変化は非線形であるので、厳密に剛性を求めるには荷重段階をより細かく分割すれば、真の値に近いものを得ることはできるが、実際には計算スピードに制限があり、ある荷重段階に分けることが必要となる。しかしながら、あの程度の荷重段階を設けても実用上さしつかえないのでこれに基づき数値解析を行なった。

2.1. 材端の回転角および部材の曲率

梁の曲率が既知であれば、梁の支持点の回転角を求めることができる。

$$\begin{aligned} \text{すなわち、曲率半径を } \rho \text{ とすれば } \quad \rho \cdot d\theta = dS \\ \therefore d\theta = \frac{1}{\rho} dS \end{aligned}$$

ここに $d\theta$ は微小要素の弧 dS の張る中心角で平たんなたわみ曲線に対しては、 $dS \doteq dx$ ととってよく

$$d\theta = \frac{1}{\rho} dx \text{ とかける。}$$

微小変形に対しては

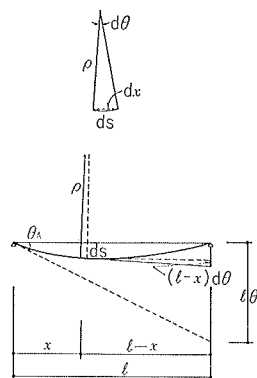
$$\begin{aligned} l \cdot \theta_A &= \int_0^l (l-x) d\theta \\ &= \int_0^l (l-x) \frac{1}{\rho} \cdot dx \end{aligned}$$

$$\therefore \theta_A = \frac{1}{l} \int_0^l (l-x) \cdot \frac{1}{\rho} \cdot dx$$

同様にして、

$$\theta_B = -\frac{1}{l} \int_0^l x \cdot \frac{1}{\rho} \cdot dx$$

となる。



図一 曲率と回転角

2.2. e 関数法によるモーメントと曲率の関係

e 関数法を使用して、部材の引張鉄筋降伏時および引張鉄筋ひずみ 0.1%時のモーメントと曲率を算出する²⁾。また、軸力を受ける柱のモーメント—曲率の関係式は

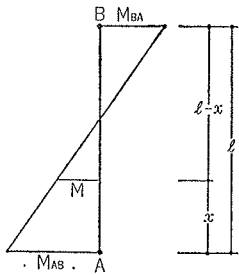
$$\frac{1}{\rho} = (a + bM^2)M \quad \dots\dots\dots(1)$$

によって近似的に表わすことができる。

e 関数法によって求めた鉄筋降伏時のモーメント、曲率および鉄筋ひずみ 0.1%時のモーメント、曲率を(1)式に代入し、係数 a, b を決定することができ、モーメントと曲率との関係がわかる。

2.3. 材端モーメントと回転角との関係

梁部材が一樣に伸縮するとき、梁に重直につながれている柱は柱頭について水平力を受けるから柱のモーメント分布は直線分布となる。



x 点におけるモーメント M は A 端のモーメント M_{AB}, B 端のモーメント M_{BA} とすれば次式で表わされる。

$$M = M_{AB} - \frac{M_{AB} + M_{BA}}{l} \cdot x \quad \dots\dots\dots(2)$$

一方、曲率とモーメント関係式は $\frac{1}{\rho} = (a + bM^2)M$ (1)式であるから、

(1), (2)式より曲率と部材端モーメント M_{AB}, M_{BA} との関係式を求めると、

$$\frac{1}{\rho} = \left\{ a + b \left(M_{AB} - \frac{M_{AB} + M_{BA}}{l} \cdot x \right)^2 \right\} \cdot \left(M_{AB} - \frac{M_{AB} + M_{BA}}{l} \cdot x \right) \quad \text{となる。}$$

また、回転角と曲率の関係式より

$$\theta_A = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{1}{\rho} (l-x) dx = \frac{1}{l} \int_0^l (a + bM^2) M (l-x) dx$$

ここで $\frac{x}{l} = y$ とおけば

$$M = M_{AB} - (M_{AB} + M_{BA}) \cdot y = (1-y)M_{AB} - y \cdot M_{BA}$$

また、 $\theta_A = l \cdot \int_0^1 (a + bM^2) M (1-y) dy$ となる。

これを M_{AB} · M_{BA} に関して展開すれば、

$$\theta_A = l \cdot \int_0^1 \{ [a(1-y) + b(1-y)^3 M_{AB}^2 - 3b(1-y)^2 y M_{AB} \cdot M_{BA}] M_{AB} + \{ -ay + 3b(1-y)y^2 M_{AB} \cdot M_{BA} - by^3 M_{BA}^2 \} M_{BA} \} (1-y) dy$$

となる。

ここで

$$p = \int_0^1 \{ a(1-y) + b(1-y)^3 \cdot M_{AB}^2 - 3b(1-y)^2 y M_{AB} \cdot M_{BA} \} (1-y) dy$$

$$q = \int_0^1 \{ -ay + 3b(1-y)y^2 M_{AB} \cdot M_{BA} - by^3 M_{BA}^2 \} (1-y) dy \quad \text{とおけば}$$

$$\theta_A = lp \cdot M_{AB} + lq \cdot M_{BA} \quad \text{となる。}$$

同様にして、

$$\theta_B = \theta_A - l \cdot \int_0^1 \frac{1}{\rho} dy = -l \cdot \int_0^1 \{ [a(1-y) + b(1-y)^3 M_{AB}^2 - 3b(1-y)^2 y M_{AB} \cdot M_{BA}] \cdot M_{AB} + \{ -ay + 3b(1-y)y^2 M_{AB} \cdot M_{BA} - by^3 M_{BA}^2 \} \cdot M_{BA} \} y dy$$

$$p' = \int_0^1 \{ -a(1-y) - b(1-y)^3 M_{AB}^2 + 3b(1-y)^2 y M_{AB} \cdot M_{BA} \} y dy$$

$$q' = \int_0^1 \{ ay - 3b(1-y)y^2 M_{AB} \cdot M_{BA} + by^3 M_{BA}^2 \} y dy$$

$$\theta_B = lp' \cdot M_{AB} + lq' \cdot M_{BA} \quad \text{となる。}$$

いま、部材角を R とすれば

$$\theta_A = l \cdot p \cdot M_{AB} + l \cdot q \cdot M_{BA} + R$$

$$\theta_B = l \cdot p' \cdot M_{AB} + l \cdot q' \cdot M_{BA} + R$$

変換して、

$$M_{AB} = \frac{q'}{l(pq' - p'q)} \theta_A - \frac{q}{l(pq' - p'q)} \theta_B - \frac{(q' - q)}{l(pq' - p'q)} R$$

$$M_{BA} = \frac{p'}{l(p'q - pq')} \theta_A - \frac{p}{l(p'q - pq')} \theta_B - \frac{(p' - p)}{l(p'q - pq')} R$$

ここで

$$h_1 = \frac{q'}{pq' - p'q}, \quad h_2 = \frac{-q}{pq' - p'q}$$

$$h_3 = \frac{p'}{p'q - pq'}, \quad h_4 = \frac{-p}{p'q - pq'} \quad \text{とすれば}$$

$$l \cdot M_{AB} = h_1 \theta_A + h_2 \theta_B - (h_1 + h_2) R \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$l \cdot M_{BA} = h_3 \theta_A + h_4 \theta_B - (h_3 + h_4) R \quad \dots\dots\dots(4)$$

とかける。

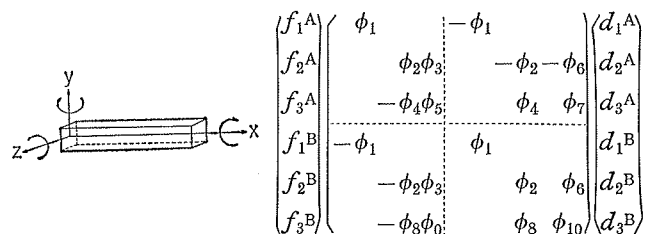
せん断力を Q とすれば

$$Q = (M_{AB} + M_{BA})/l$$

$$Q = \{ (h_1 + h_3) \theta_A + (h_2 + h_4) \theta_B - (h_1 + h_2 + h_3 + h_4) R \} / l^2 \quad \dots\dots\dots(5)$$

となる。

2.4. 二次元構造物の剛性マトリックス



$$\begin{pmatrix} f_1^A \\ f_2^A \\ f_3^A \\ f_1^B \\ f_2^B \\ f_3^B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 & & -\phi_1 & & & \\ & \phi_2 \phi_3 & & -\phi_2 - \phi_6 & & \\ & -\phi_4 \phi_5 & & \phi_4 & \phi_7 & \\ -\phi_1 & & \phi_1 & & & \\ & -\phi_2 \phi_3 & & \phi_2 & \phi_6 & \\ & -\phi_8 \phi_0 & & \phi_8 & \phi_{10} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1^A \\ d_2^A \\ d_3^A \\ d_1^B \\ d_2^B \\ d_3^B \end{pmatrix}$$

図—3

ここに、
 $f_1 d_1$: x 軸方向の力および変位
 $f_2 d_2$: y 軸方向の力および変位
 $f_3 d_3$: z 軸まわりの力および回転角

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{D} \end{pmatrix} \text{とおけば}$$

塑性剛性を考慮して、(3)(4)(5)式より k, l, m, n は

$$k = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h_1+h_2+h_3+h_4}{l^3} & -\frac{h_1+h_3}{l^2} \\ 0 & -\frac{h_1+h_2}{l^2} & \frac{h_1}{l} \end{pmatrix}$$

$$l = \begin{pmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h_1+h_2+h_3+h_4}{l^3} & -\frac{h_2+h_4}{l^2} \\ 0 & \frac{h_1+h_2}{l^2} & \frac{h_2}{l} \end{pmatrix}$$

$$m = \begin{pmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h_1+h_2+h_3+h_4}{l^3} & \frac{h_1+h_3}{l^2} \\ 0 & -\frac{h_3+h_4}{l^2} & \frac{h_3}{l} \end{pmatrix}$$

$$n = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h_1+h_2+h_3+h_4}{l^3} & \frac{h_2+h_4}{l^2} \\ 0 & \frac{h_3+h_4}{l^2} & \frac{h_1}{l} \end{pmatrix}$$

となる。

部材の一端が降伏した場合は端部に降伏モーメントをもつ Hinge に置き換えて部材剛性を算出する。

A 端ピンの場合

$$\begin{cases} \theta_A = l_p M_{AB} + l_q M_{BA} \\ \theta_B = l_p' M_{AB} + l_q' M_{BA} \\ M_{AB} = 0 \end{cases}$$

$$\theta_B = l_q' M_{BA} \quad \therefore M_{BA} = \frac{1}{l_q'} \theta_B$$

$$h_4 = \frac{1}{q'} \quad h_1 = h_2 = h_3 = 0$$

剛性マトリックスは

$$b = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h_4}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad l = \begin{pmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h_4}{l^3} & -\frac{h_4}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

部材の両端が降伏した場合は、両端に降伏モーメントをもつ Hinge に置き換えて部材剛性を算出する。

$$m = \begin{pmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h_4}{l^3} & 0 \\ 0 & -\frac{h_4}{l^2} & 0 \end{pmatrix} \quad n = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h_4}{l^3} & \frac{h_4}{l^2} \\ 0 & \frac{h_4}{l^2} & \frac{h_4}{l} \end{pmatrix}$$

両端ピンの場合 $h_1=h_2=h_3=h_4=0$

$$k = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad l = \begin{pmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m = \begin{pmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad n = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. 荷重

梁について、温度が一様に上昇、降下する場合あるいはコンクリートの硬化乾燥収縮により一方向に収縮をした場合について解析を行なう。

梁の変形を拘束することにより発生する力を部材荷重 C とすれば

$$\begin{matrix} \leftarrow C_A' & C_B' \rightarrow \\ \cdot & \cdot \\ A & B \end{matrix} \quad \begin{matrix} C_A' = AE\alpha\Delta t \\ C_B' = -AE\alpha\Delta t \end{matrix}$$

ここに

A: 断面積 E: コンクリートのヤング係数
 α : コンクリートの熱膨張係数 Δt : 温度差
 等価節点荷重は、

$$P_A = \begin{pmatrix} P_A^1 \\ P_A^2 \\ P_A^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -AE\alpha\Delta t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_B = \begin{pmatrix} P_B^1 \\ P_B^2 \\ P_B^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE\alpha\Delta t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. フローチャート

剛性マトリックス法による流れ図を図-4 に示す³⁾。

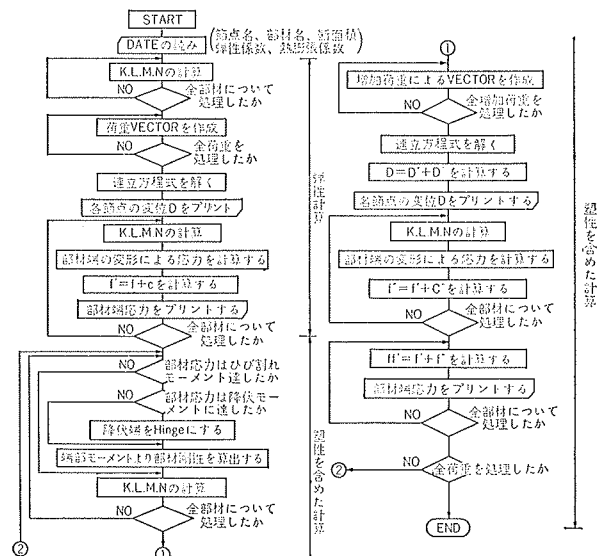


図-4 フローチャート

4. 数値解析

4.1. 対象建物

対象建物は当研究所実験棟7スパン1層ラーメン(50.4m×14.4m, 1スパンの長さは7.2m, 軒高3.5m)で、桁方向壁はプレキャストコンクリートパネルを使用し、妻側壁は現場打ちコンクリートとなっている。ここでは①通のフレームについて解析を行なった。

建物の梁伏図および矩計図を図一5に示す。

部材断面および配筋を図一6に示す。

4.2. 解析に使用した数値

計算に使用した数値は下記のごとくである。

- コンクリート圧縮強度 200 kg/cm²
- ヤング係数 2.1×10⁵ kg/cm²
- 鉄筋の強度 3,000 kg/cm²
- ヤング係数 2.1×10⁶ kg/cm²
- コンクリートおよび鉄筋の熱膨張係数 1.2×10⁻⁵ cm/cm・°C
- 梁の曲げ剛性
 - 外端梁 0.80×10¹¹ kg・cm²
 - 内梁 2.07×10¹¹ kg・cm²
- 柱の弾性曲げ剛性
 - 外柱 0.45×10¹¹ kg・cm²
 - 内柱 0.43×10¹¹ kg・cm²
- 柱の軸方向力(固定荷重)
 - 外柱 $\sigma_0 = 6.2$ kg/cm²
 - 内柱 $\sigma_0 = 10.4$ kg/cm²

柱についてはひび割れ発生以前を弾性計算で行ない、ひび割れ発生以後は塑性剛性を各荷重段階ごとに計算し、変形、応力を計算する方法および初荷重時から塑性剛性を求め計算を行なう方法とした。また梁については外端梁の剛性はひび割れ曲げ剛性を、内端梁は弾性剛性を使用して数値解析を行なった。

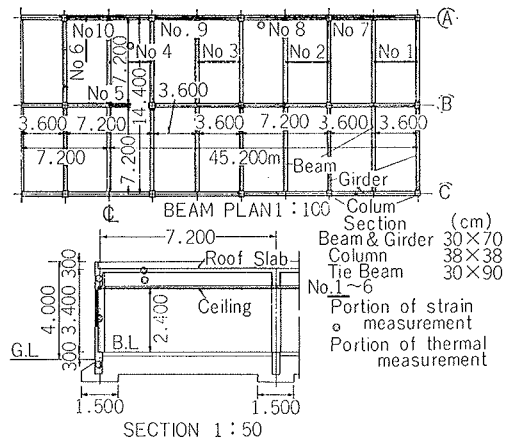
温度荷重変化は梁にのみ生じるものとし、温度は一方向に降下するものとした。-10°Cまでは弾性計算、-10°C以降は-2°Cピッチで塑性を考慮した変形および応力計算を行なった。また0°Cからただちに塑性剛性を求める方法でも計算を行なった。荷重段階は2°C, 4°C, 6°Cピッチのおのおのである。解析に当たり柱脚は固定とした。

4.3. 計算結果

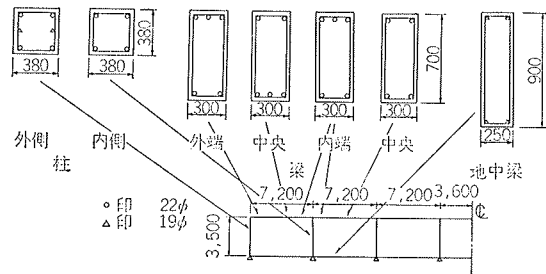
柱および梁の曲げモーメント—曲率の関係を図一7に示す。

外柱の曲げ剛性低下を示す係数 h_1, h_2, h_3, h_4 の値を図一8に示す。

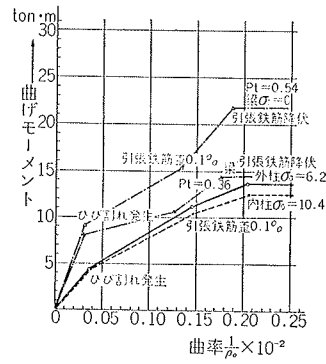
またせん断剛性低下を示す係数を $(h_1+h_3), (h_2+h_4)$,



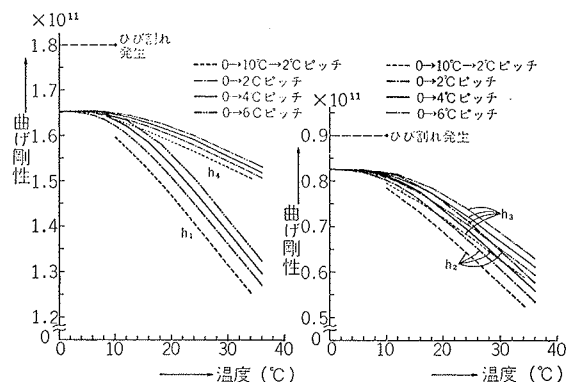
図一5 梁伏図および矩計図



図一6 部材断面および配筋



図一7 曲げモーメント—曲率



図一8 外柱の曲げ剛性

($h_1+h_2+h_3+h_4$)の値を図-9に示す。

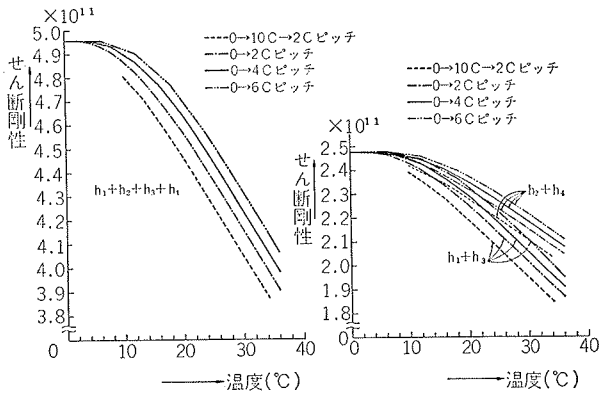


図-9 外柱のせん断剛性

外端柱脚モーメントおよび外端柱頭水平変位との関係を図-9に示す。温度降下 -10°C で外柱にひび割れが発生し、弾性線からずれ、徐々に柱脚モーメントの増加は低下し、柱頭の変位は進む。 -34°C で柱脚モーメントは降伏モーメント $13.6\text{ton}\cdot\text{m}$ に達し、そのときの柱頭水平変位は 0.95cm である。また -62°C 降下時の柱頭水平変位は 1.78cm である。

外端柱頭モーメントおよび外端柱頭水平変位との関係を図-11に示す。

柱のひび割れ発生および Hinge 発生温度を図-12に示す。降伏部分の発生順序は外柱柱脚(-34°C)、内柱柱脚(-38°C)、内柱柱頭(-42°C)、外柱柱頭(-60°C)となった。

図-14に各節点の水平変位を示す。また図-15に梁部材の変形程度を示す。無拘束部材と中央部材とでは約1割の変形に差があり、中央部材は拘束の影響を受けて変形が少ない値を算出している。中央部材の拘束を表わすものとして、図-13に梁の軸方向力を示す。温度降下 30°C まではほぼ直線的に応力は増加し、中央

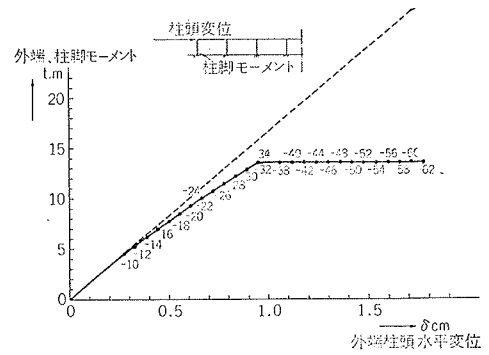


図-10 柱脚モーメントおよび柱頭変位

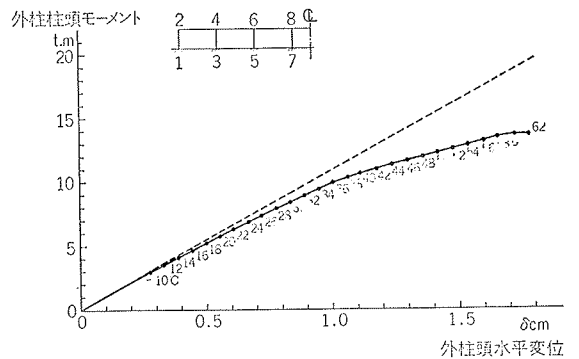


図-11 柱頭モーメントおよび柱頭変位

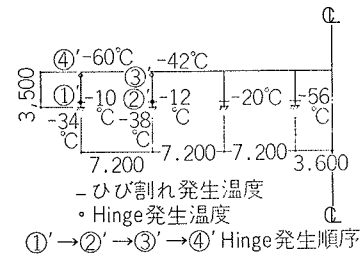


図-12 ひび割れ発生および鉄筋降伏発生温度

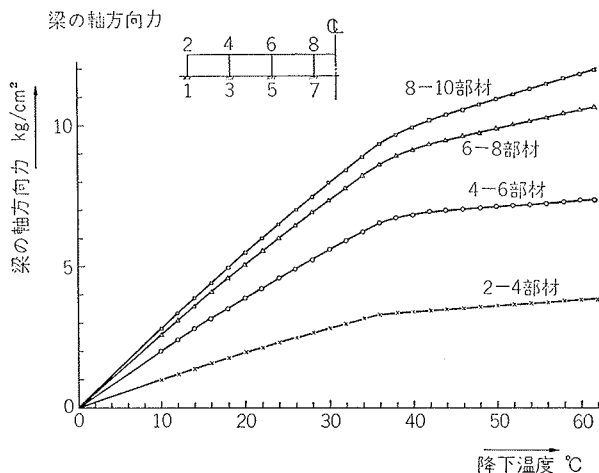


図-13 梁の軸方向力

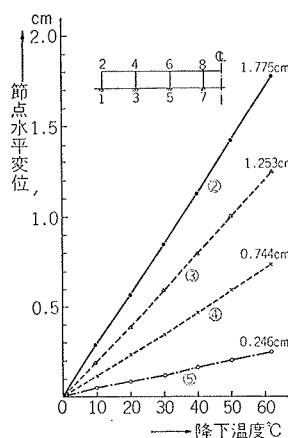


図-14 節点水平変位

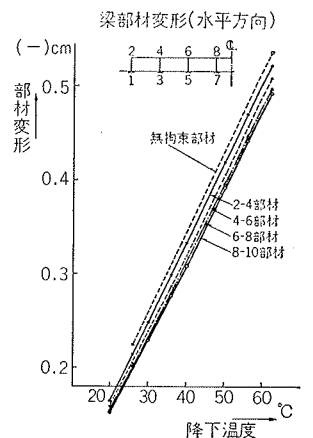


図-15 梁部材変形

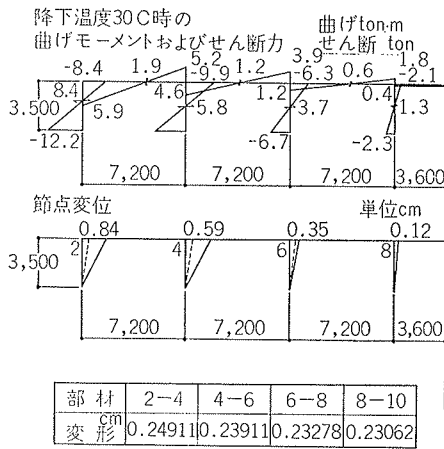


図-16 降下温度30°C時の応力および変形

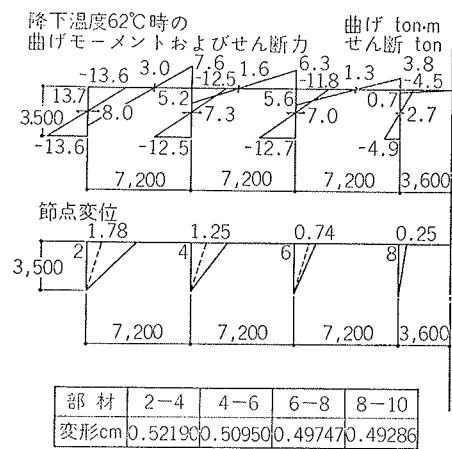


図-17 降下温度62°C時の応力および変形

部材の軸方向力は 8.0 kg/cm²、外端部材の軸方向力は 2.8 kg/cm² の値である。以後応力の増加は減少し、-62°Cで中央部材の軸方向力は、11.9 kg/cm²、外端部材の軸方向力は 3.8 kg/cm² の計算値を得た。

図-16には温度降下30°Cにおける変形および応力図を、図-17に温度降62°Cにおける変形、応力の計算結果を示す。

5. 実測結果との比較検討

図-5中の変位計 No. 7, 8, 9, 10による日間の変位測定結果を図-18に示す。実際の建物は本計算に含まれていない要素も多分にあるので、単純に計算結果と比較することはできないが、中央部梁の変形程度は一致していることがわかる。端部梁は無拘束部材の変形に一致している。ここに実測されている温度は屋根スラブの内部温度であり、計算に使用した温度は梁部材の温度である点が相違している。この点に関しては、スラブおよび壁パネルがフレームにおよぼす構造的拘束の程度について検討すべき問題を包含しているものと思われる。

6. 結び

解析および実測結果からも明らかなように、建物を断熱せず、直接に温度の影響を受けた場合は、熱応力ならびに変形が大きくなる。本フレームでは約10°Cの温度変化で外端柱は半塑性域（ひび割れ）にはいり、約34°Cで降伏に達するという結果となり、場合によっては熱応力が設計地震時応力よりまさり、それに対する考慮が必要になることを示している。

それゆえに、断熱的な考慮を払われていない防水設計では、建物の挙動および温度応力を設計時点でチェックする必要があり、そのうえではじめて完全な防水設計となるものと思われる。

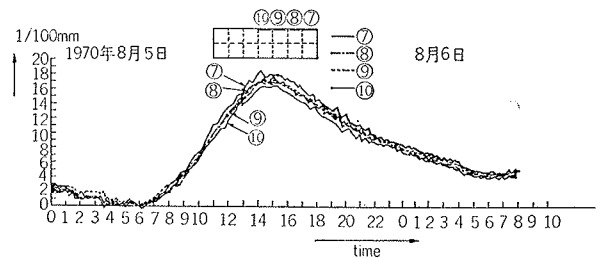


図-18 屋根変形測定結果 ('70/8/5~6)

実測結果	温度差 17.8°C (但しスラブ内部)	部材			
		無拘束	2-4梁	4-6梁	6-8梁
8月5日 15:00					
8月6日 6:00		0.140	0.134	0.125	0.122
計算結果	16°C	0.138	0.133	0.127	0.123

表-1 実測値および計算値の比較

謝辞

理論解析に当たり助言をいただきました東大梅村教授、直接御指導いただいた大林組技研構造研究室武田室長および演算に協力いただいた機械計算機室内山、板橋両職員に感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 高橋, 中島: 温度変化によるコンクリート建物屋根の変形測定, 建築学会大会講演, 昭和45年
- 2) S. Timoshenko: Strength of Materials
- 3) 武藤 清: 鉄筋コンクリート構造物の塑性設計耐震設計シリーズ 2 丸善
- 4) 松岡, 内山, 板橋: Direct Stiffness Matrix による骨組の解析について。