

有限要素法による三次元応力解析について

武田 寿一
伊藤 雅保

概 要

平面応力の解析，薄板の曲げ，軸対称回転体の応力解析などのように，連続体の応力解析手法として有限要素法がさかんに用いられている。ここでは，それを三次元連続体にまで拡張して，任意形状の三次元連続体について有限要素法による解析を試みた。まず，要素としては，任意形状の六面体要素を用いることにした。要素の剛性行列は数値積分によって近似値を求めている。また，方程式の解法は FRAN と同様の手法，即ち，UNIT 分割法によっている。

次に，簡単な例題によって，在来の理論による解と比較し，有限要素法による解法の妥当性を検討した。最後に，解析例として，OWS 壁とつなぎ梁とが一体となった連続体の解析結果を示した。

1. 序

有限要素法を用いた連続体の三次元的応力解析に用いられる要素の形状については，一般的には大きく分けて，

- 1) 四面体要素（三角錐）
- 2) 五面体要素（三角柱）
- 3) 六面体要素（直方体）

の3種類のもので用いられているようである。

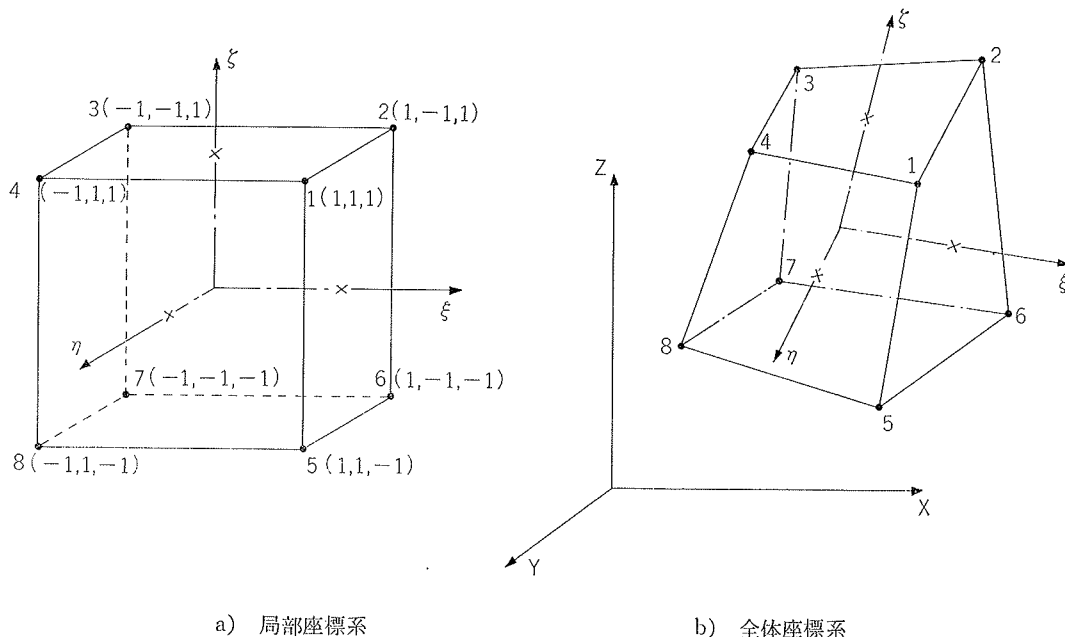
ここでは，3) の系統の任意形六面体要素（8節点）を用いて，連続体の三次元的応力解析を試みることにした。

2. 全体座標系と局部座標系

図一の b) に示したような，任意形状の六面体要素を考えることにする。六面体の各面は一般には平面ではなくて，捩れた面となる。

ここで，図一の a) に示したような局部座標系 $-\xi\eta\zeta$ を考えることにする。この局部座標系においては，例えば， ξ その値は (1, 2, 6, 5) 面上では +1 の値をとり，(4, 3, 7, 8) 面上では -1 の値をとるようなものを考えている。 η, ζ についても同様である。

次に全体座標系 $-xyz$ と局部座標系 $-\xi\eta\zeta$ との間には，(1)式の関係が成り立つものとする。



図一 全体座標系と局部座標系

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_8 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_8 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_8 \end{bmatrix} \cdots \cdots (1)$$

ここで、

$$P_i = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i)(1 + \zeta \zeta_i) \cdots \cdots (2)$$

である。

(1)式を書き替えると、

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} \cdots \cdots (3)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\} \\ \bar{y} &= \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8\} \cdots \cdots (4) \\ \bar{z} &= \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8\} \\ P &= \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8\} \end{aligned}$$

である。

3. 変位函数

要素内で、変位が直線的に変化するものと仮定する。そうすると、(3)式の補間函数を変位函数として用いることができる。即ち、変位函数を次のように定義する。

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{bmatrix} \cdots \cdots (5)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\} \\ \bar{v} &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\} \cdots \cdots (6) \\ \bar{w} &= \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8\} \end{aligned}$$

である。

4. 歪

連続体の三次元問題の応力解析においては、6ケの歪成分が全て関係し、それは線形理論では、次の(7)

$$\varepsilon_e = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} \cdots \cdots (7)$$

式で与えられる。

(5)式で定義された変位函数を用いると(7)式は次のようになる。

$$\varepsilon_e = \begin{bmatrix} \partial P / \partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial P / \partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial P / \partial z \\ \partial P / \partial y & \partial P / \partial x & 0 \\ 0 & \partial P / \partial z & \partial P / \partial y \\ \partial P / \partial z & 0 & \partial P / \partial x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{d}_e \cdots (8)$$

ここで、

$$\begin{bmatrix} \partial P / \partial x \\ \partial P / \partial y \\ \partial P / \partial z \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \partial P / \partial \xi \\ \partial P / \partial \eta \\ \partial P / \partial \zeta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi & \partial z / \partial \xi \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta & \partial z / \partial \eta \\ \partial x / \partial \zeta & \partial y / \partial \zeta & \partial z / \partial \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial P / \partial \xi \\ \partial P / \partial \eta \\ \partial P / \partial \zeta \end{bmatrix} \cdot [\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}]$$

である。

5. 応力

等方性材料のみを考えると、前節の歪に対応する応力は、三次元弾性理論によって、次のように与えられている。

$$\sigma_e = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x & E_y & E_y & 0 & 0 & 0 \\ E_y & E_x & E_y & 0 & 0 & 0 \\ E_y & E_y & E_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \mathbf{D} \varepsilon_e \cdots (9)$$

ここで、

$$E_x = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad E_y = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

である。

6. 要素の剛性行列

要素内の応力に静的に等しい等価節点力 \mathbf{f}_e を求めるのに最も簡単な方法は、仮想仕事の原理を用いることである。

仮想変位 \mathbf{d}_e^* によってなされる外部仕事 (W_0) は、

$$W_0 = (\mathbf{d}_e^*)^T \mathbf{f}_e \cdots \cdots (10)$$

仮想変位 \mathbf{d}_e^* によって生じる歪 ε_e^* によってなされる内部仕事 (W_i) は、

$$W_i = \int_V (\varepsilon_e^*)^T \boldsymbol{\sigma} dV \cdots \cdots (11)$$

ここで、 $W_0 = W_i$ より

$$\mathbf{f}_e = \left[\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \right] \mathbf{d}_e \cdots \cdots (12)$$

となる。ここで、

$$\mathbf{K}_e = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \cdots \cdots (13)$$

とすると、 K_e が要素の剛性行列である。ここで、

$$dV = dx dy dz = |J| d\xi d\eta d\zeta$$

であるから、(13)式は次のようになる。

$$K_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T DB |J| d\xi d\eta d\zeta \quad \dots\dots\dots(14)$$

(14)式の ξ, η, ζ に関する積分はまず不可能と思われるので、Gauss の求積法を用いて、数値積分によって K_e の値を求めることにした。

7. Gauss の求積法

Gauss の求積法の一般式は次のように与えられる。

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n H_i H_j H_k f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \quad \dots\dots\dots(15)$$

今回は、 K_e の値を求めるのに、 $n=4$ を用いることにしたが、そのときには、

- $\xi_1, \eta_1, \zeta_1 = -0.861136311594053$
- $\xi_2, \eta_2, \zeta_2 = -0.339981043584856$
- $\xi_3, \eta_3, \zeta_3 = 0.339981043584856$
- $\xi_4, \eta_4, \zeta_4 = 0.861136311594053$
- $H_1, H_4 = 0.347854845137454$
- $H_2, H_3 = 0.652145154862546$

を用いて計算すればよい。

8. 方程式の解法

前に求めた K_e は1つの要素についてのものであり、構造物全体の剛性マトリックス K は全要素の K_e を重ね合わせたものとなる。

全体の剛性マトリックス K は (節点数) \times 3 の 2 乗となって非常に大きくなる。従って、一度に全体を解くことは一般には不可能であり、逐次解法によらざるを得ない。ここでは、FRAN と同様の手法、即ち全体の構造を UNIT に分けて計算する方法を用いている。

9. 主応力の計算

節点の変位が求められれば、要素の応力は、(8), (9) 式より求められる。次に要素の応力 ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$) が求められれば、主応力 ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) は l, m, n を方向余弦とすると、

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma) \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{zx} \cdot n = 0 \\ \tau_{xy} \cdot l + (\sigma_y - \sigma) \cdot m + \tau_{yz} \cdot n = 0 \\ \tau_{zx} \cdot l + \tau_{yz} \cdot m + (\sigma_z - \sigma) \cdot n = 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots(16)$$

を満足するような l, m, n が $l=m=n=0$ 以外の根を持たねばならないという条件より求められる。その条件より

$$\sigma^3 - J_1 \sigma^2 - J_2 \sigma - J_3 = 0 \quad \dots\dots\dots(17)$$

但し、

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ J_2 &= \tau^2_{yz} + \tau^2_{zx} + \tau^2_{xy} - (\sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_y) \\ J_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z - (\sigma_x \tau^2_{yz} + \sigma_y \tau^2_{zx} + \sigma_z \tau^2_{xy}) \\ &\quad + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} \end{aligned}$$

(17)式の三次方程式の3根を求めれば、それが主応力 ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) である。

各主力に対応する方向余弦 l, m, n の値は主応力の値を(16)式に代入して、 l, m, n について解けば求められる。

10. プログラムの流れ

いままで導いた各式を用いて応力解析用プログラムを作成した際の全体のフロー・チャートを図-2 に示した。

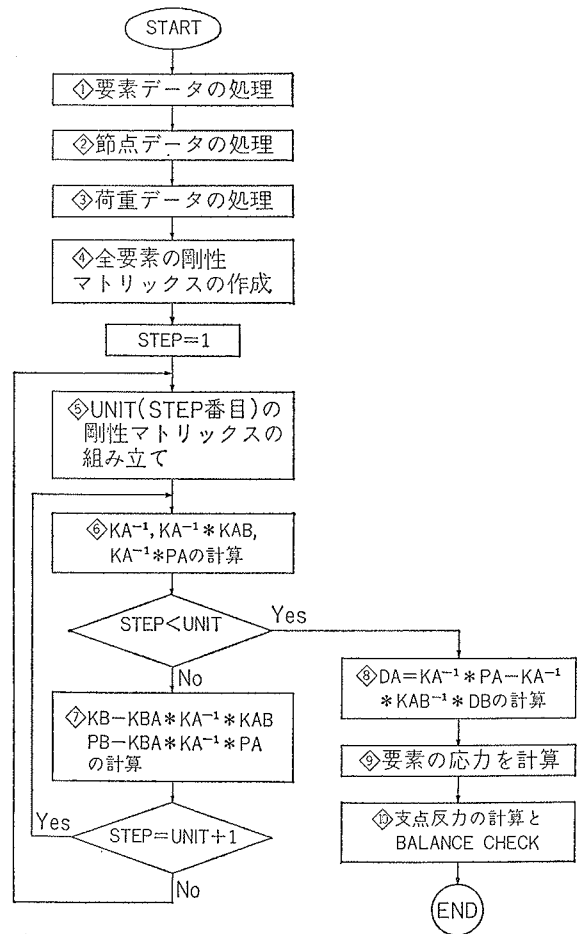


図-2 フロー・チャート

11. 例題 1

有限要素法による三次元応力解析方法の妥当性を検討する為の簡単な例題として、図-3に示したような片持梁の計算を行なった。計算にあたって、図-4に示したような3種類の大きさの要素について考え、要素の大きさと解の精度との間の関係を調べることにした。

図-5に Beam Theory によって求めた撓みと、有限要素法によって求めた撓みとを示したが、Case 3の場合には Beam Theory による解とほぼ一致している。

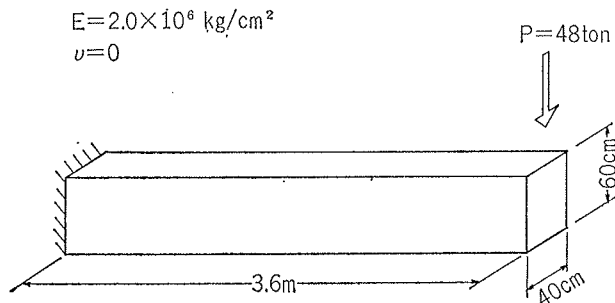


図-3 片持梁の諸定数

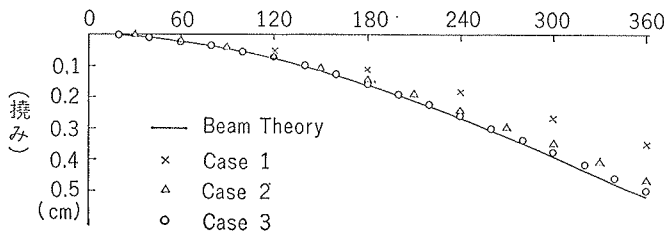
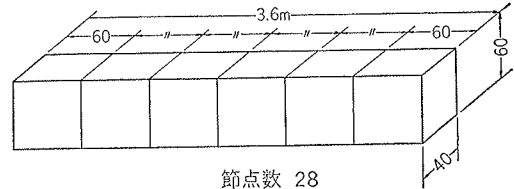


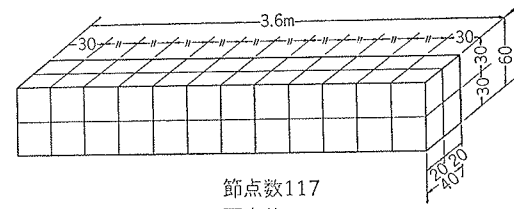
図-5 撓み

12. 例題 2

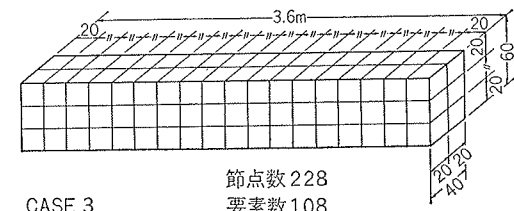
次の例として、図-6に示したような OWS 壁とつなぎ梁とが一体となった OWS 構造物の解析を次の3種類の荷重条件のもとで行なった。



CASE 1



CASE 2



CASE 3

図-4 分割形式

Q=50ton
Qt=75ton

E=2.1 x 10^6 kg/cm^2
nu=0.17

節点数: 362
要素数: 208

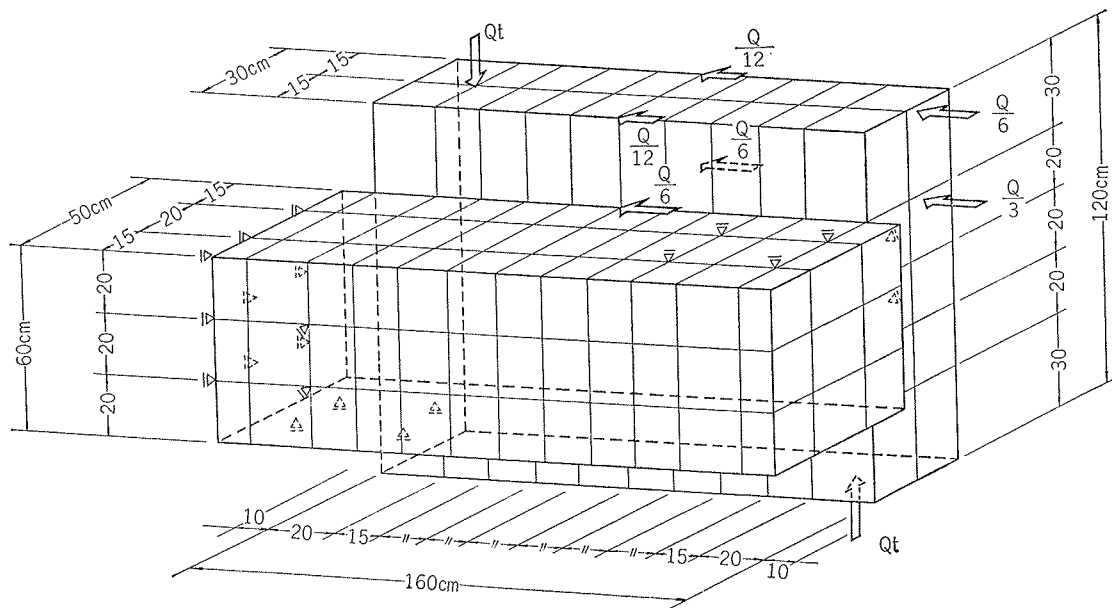
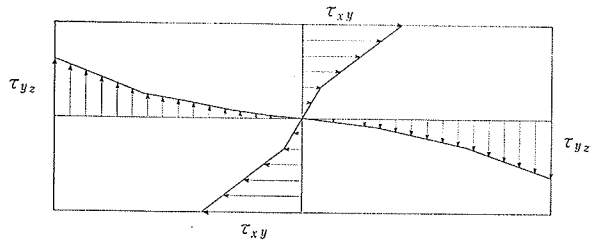


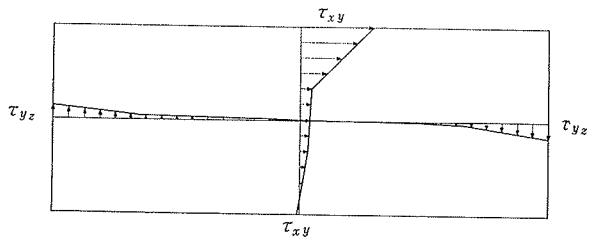
図-6 OWS 構造物の諸定数と分割形式

- 1) $Q_t=75\text{ton}$ が作用する場合。
- 2) $Q=50\text{ton}$ が作用する場合。
- 3) $Q_t=75\text{ton}$ と $Q=50\text{ton}$ との両方が作用する場合。

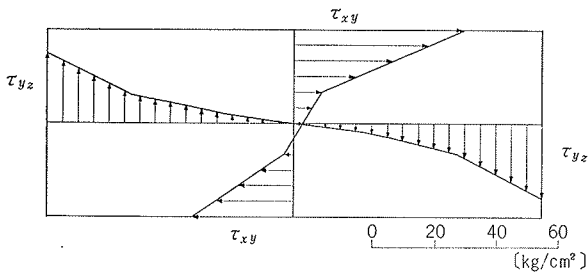
計算結果の1例として、図-7に OWS 壁とつなぎ梁との接合面に生じている剪断力の分布を示した。



(1) $Q_t=75\text{ton}$ が作用する場合



(2) $Q=50\text{ton}$ が作用する場合



(3) $Q_t=75\text{ton}$ と $Q=50\text{ton}$ との両方が作用する場合

図-7 OWS 壁とつなぎ梁との接合面における剪断力分布

13. 結 び

以上、有限要素法を用いた三次元応力解析についての概略を記述し、在来の理論では解けないような連続体の三次元問題に対して、有限要素法が有用な方法であることを示した。

終りに、本研究を進めるに際して、当組機械計算部の板橋職員の協力を得ました。ここに深く謝意を表します。

参考文献

Ray W. Clough, "Comparison of Three Dimensional Finite Elements", Proceedings of the Symposium on Application of Finite Element Methods in Civil Engineering, 11' 1969, NASHVILLE, TENNESSEE