

# 三次元有限要素法による振動解析

中川 恭次 伊藤 雅保  
武田 寿一

## Vibration Analysis by Three-Dimensional Finite Element Method

Kyoji Nakagawa Masayasu Ito  
Toshikazu Takeda

### Abstract

Many vibration analyses of structure-soil systems using two-dimensional finite element methods have been made recently. But to understand the phenomena of such a structural system subjected to earthquake more precisely, it should be treated by a three-dimensional finite element method for a proper model representing the system as a whole. As the first step of this kind of analysis, although limited within the elastic range, a three-dimensional method was tried in this paper under the following assumptions:

- i) An arbitrarily shaped hexahedral element is adopted.
- ii) Masses are concentrated at the nodal points in each element.
- iii) External force is applied only in the x-direction.

### 概要

構造物—地盤系の連成振動解析を二次元有限要素法を用いて行なう試みが最近なされている。しかし、構造物の地震時の性状を正確に把握する為には、構造物—地盤系を三次元の問題として取り扱うことが必要と思われる。そこで、i) 三次元有限要素としては、任意形状の六面体要素を用いる。ii) 質量は節点に集中するものとする。iii) 外力は1方向のみから作用する。以上の仮定のもとに、剛性マトリックス、質量マトリックスを求め、弾性理論の範囲内ではあるが、構造物—地盤系を三次元的に取り扱って、振動解析を試みることにした。なお、固有値、固有ベクトルの計算はヤコビ法、応答計算は Modal Analysis によっている。最後に、簡単な例題についての計算結果を示した。

### 序

有限要素法を用いて、構造物—地盤系を二次元的に取り扱って、振動解析を行なう試みが最近行なわれている。しかし、構造物の地震時の性状を正確に把握するには構造物のまわりの地盤をできるだけ実際に近い形でモデル化し、構造物と地盤を一つの系と考え、解析を行なわねばならない。そのためには、構造物—地盤系を三次元の問題として取り扱うことが必要である。

そこで、i), ii), iii) の仮定のもとに、弾性理論の範囲内ではあるが、構造物—地盤系を三次元的に取り扱って、振動解析を試みることにした。

- i) 要素として、任意形状の六面体要素を用いる。
- ii) 質量は節点に集中するものとする。
- iii) 外力は x-方向のみから作用するものとする。

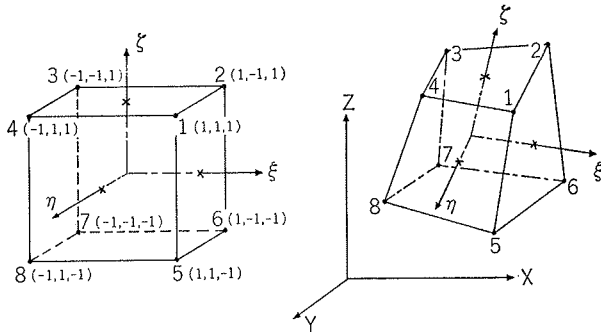
### 1. 六面体要素

図—1 (b)に示したような、任意形状の六面体要素を三次元の有限要素として用いることにする。すると、六面体の各面は一般には平面ではなくて捩れた面となる。ここで、図—1 (a)に示したような局部座標系— $\xi\eta\delta$  を考えると、全体座標系— $xyz$  との間には次の関係式が成立する。

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(1)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_8\}^T \\ \bar{y} &= \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_8\}^T \\ \bar{z} &= \{z_1, z_2, z_3, \dots, z_8\}^T \\ P &= \{P_1, P_2, P_3, \dots, P_8\} \\ P_i &= \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i) \end{aligned}$$



(a) 局部座標系 (b) 全体座標系

図-1 全体座標系と局部座標系

### 2. 変位函数

変位函数を考える場合に、要素内で変位が直線的に変化すると仮定すれば、(1)式で用いられている補間函数(P)を変位函数として用いることができ、変位函数は次のように定義される。

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(2)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_8\}^T \\ \bar{v} &= \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_8\}^T \\ \bar{w} &= \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_8\}^T \end{aligned}$$

### 3. 歪

三次元の連続体では、歪と変位との間には次の関係式が成立する。

$$\epsilon_e = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(3)$$

(2)式で定義された変位函数を用いると(3)式は次のようになる。

$$\epsilon_e = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial P}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial P}{\partial z} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} & 0 & \frac{\partial P}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} = \mathbf{Bd}_e \dots\dots\dots(4)$$

ここで、

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial P}{\partial \xi} \\ \frac{\partial P}{\partial \eta} \\ \frac{\partial P}{\partial \zeta} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \begin{Bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi & \partial z / \partial \xi \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta & \partial z / \partial \eta \\ \partial x / \partial \zeta & \partial y / \partial \zeta & \partial z / \partial \zeta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial P / \partial \xi \\ \partial P / \partial \eta \\ \partial P / \partial \zeta \end{Bmatrix} \cdot \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$$

### 4. 応力

等方性材料のみを考えると、前節の歪に対応する応力は、三次元弾性理論によって次のようになる。

$$\sigma_e = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x & E_y & E_y & 0 & 0 & 0 \\ E_y & E_x & E_y & 0 & 0 & 0 \\ E_y & E_y & E_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}\epsilon_e \dots\dots\dots(5)$$

ここで、

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad E_y = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \\ G &= \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned}$$

### 5. 要素の剛性行列と質量行列

要素の剛性マトリックス ( $\mathbf{K}_e$ ) は一般に、

$$\mathbf{K}_e = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\xi d\eta d\zeta \dots\dots(6)$$

で示されるが、(6)式を  $\xi, \eta, \zeta$  に関して積分することは困難であるから、Gauss の数値積分によって近似的に求めている。

また、要素の質量マトリックスは、要素の各頂点に質量が集中するものとして求めている。

### 6. x-方向の剛性行列

全体の剛性マトリックスは要素の剛性マトリックス

を重ね合わせれば求められる。ここで、外力は x-方向のみに作用するものと仮定したから、全体の釣合式は次の形で表わされる。

$$\begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots(7)$$

(7)式より、 $d_y, d_z$  を消去すれば、x-方向の剛性マトリックスが得られ、それを次の式で表わす。

$$K_{xx} \cdot d_x = P_x \dots\dots(8)$$

### 7. 固有値

自由振動に対する運動方程式は一般に、

$$K \cdot d = -M \cdot \ddot{d} \dots\dots(9)$$

で表わされる。変位  $d$  を

$$d = d_0 \sin \omega t$$

とすると、(6)式は次のようになる。

$$[K - \omega^2 M] d_0 = 0 \dots\dots(10)$$

(7)式は典型的な“固有値”問題であり、今回は“修正ヤコビ法”によって固有値、固有ベクトルを求めている。

### 8. 応答計算

応答計算は Modal Analysis を用いた。ここで、刺激係数は次の式によった。

$$s\beta = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \cdot s u_i}{\sum_{i=1}^N m_i \cdot s u_i^2} \dots\dots(11)$$

また、線形微分方程式の解法は Runge-Kutta の方法を用いている。

### 9. 計算例

以上により開発したプログラムにより簡単な例題についての計算結果を以下に示した。

#### 9.1. 例題 1

図-2 に示したような、簡単なモデルについて、3

種類の異なる要素分割を行ない、計算した。

ここで、減衰定数は 1 次に対して 5% とし、高次は振動数に比例させ、支持条件は底面固定とした。

表-1 には、各々の場合についての、固有周期と刺激係数の値を示した。なお、参考の為に、二次元の問題としての解も添えた。

図-3 には、case 3 の場合の固有モードを示したが、2, 4, 5 次のモードは刺激しないモードである為、省略した。

次に、図-4 に case 3 の場合について、ElC entro 1940 NS に対する応答曲線を示した。

#### 9.2. 例題 2

次の計算例として、直接、構造物-地盤系の連成振動とは関係ないが、応用例の 1 つとして、図-5 に示

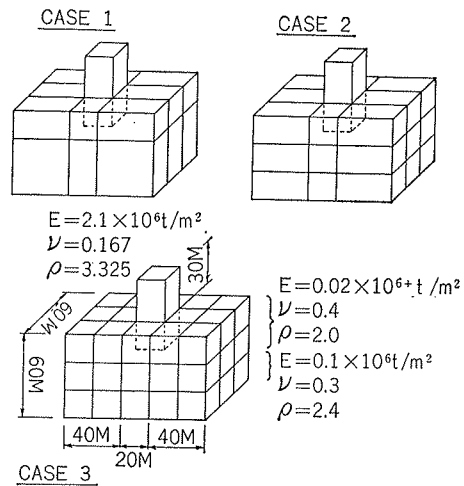


図-2 要素分割と諸定数

	1 次		3 次		6 次	
	固有周期	刺激係数	固有周期	刺激係数	固有周期	刺激係数
CASE 1	0.97	230.8	0.53	-33.6	0.43	7.7
CASE 2	1.13	215.1	0.61	-51.8	0.45	10.0
CASE 3	1.17	214.1	0.61	-57.0	0.51	-2.6
二次元 F.E.M.	(1次) 1.31	-	(2次) 0.58	-	(3次) 0.39	-

表-1 固有周期と刺激係数

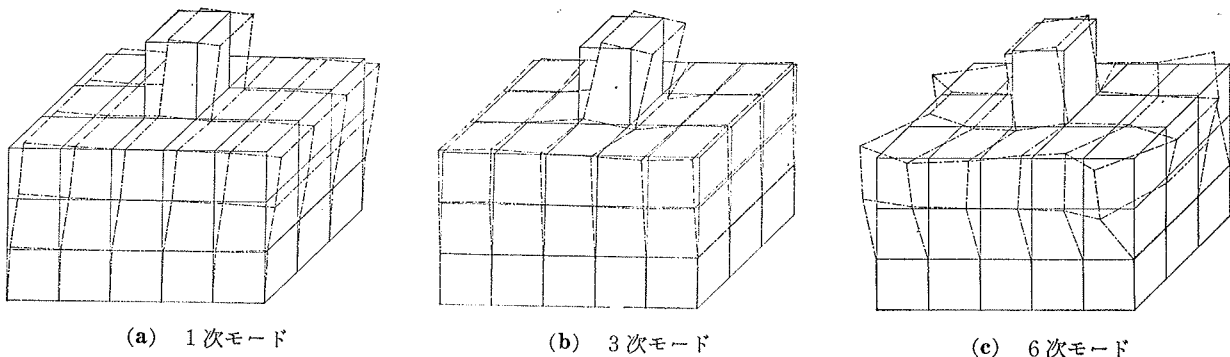


図-3 固有モード

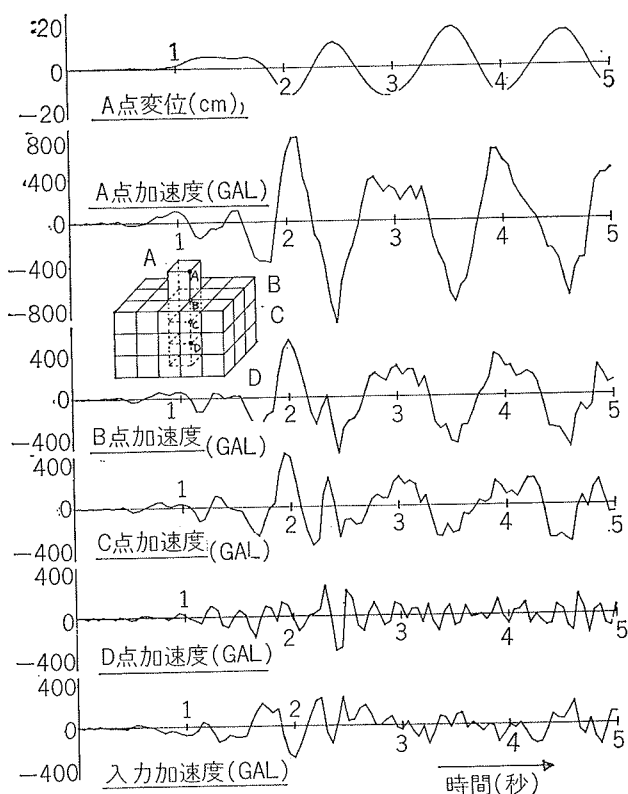


図-4 El Centro 1940 NS 応答曲線

したような P. C. R. V. のような立体モデルについての計算結果を示すことにする。

ここで、解析は脚部固定で行ない、減衰定数は各次とも 2% としている。

図-6、図-7 に PCR V Model の要素分割と節点番号を示した。図-9 に Y-方向入力に対する 1 次から 4 次までの固有モード、固有周期、刺激係数を示した。また図-8 には El Centro 1940 NS に対する応答曲線の一部を示した。

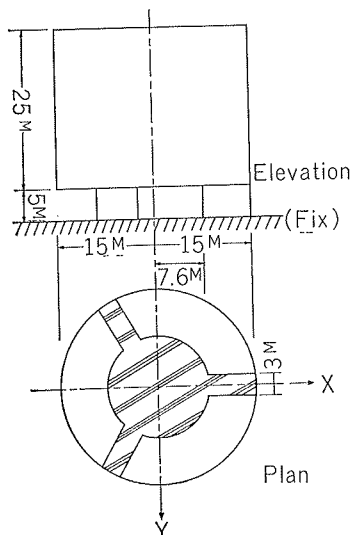


図-5 PCR V モデル

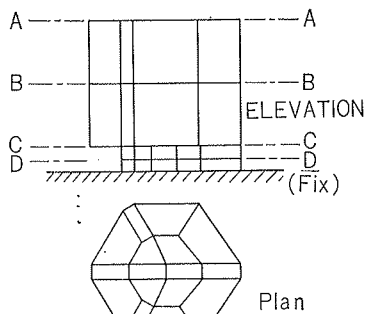


図-6 要素分割

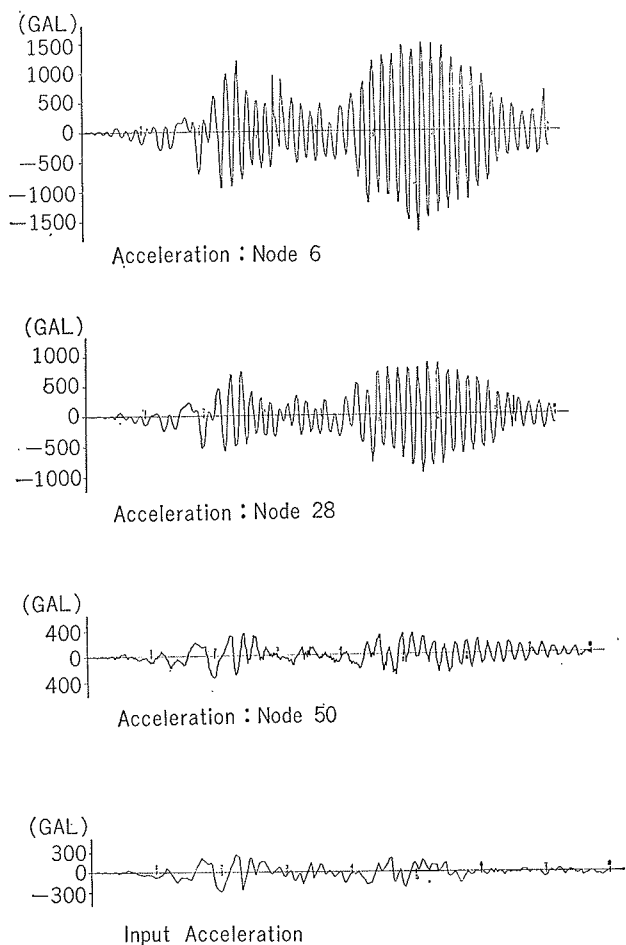


図-8 El Centro 1940 NS 応答曲線

## 10. 結び

以上、3次元有限要素法による振動解析について、その概略を示したが、i) より大きな固有値問題の数値解法、ii) 減衰定数のとり方等、本解法をより実用的なものとする為には、これから解決しなければならない問題点も多く残されていると思われる。

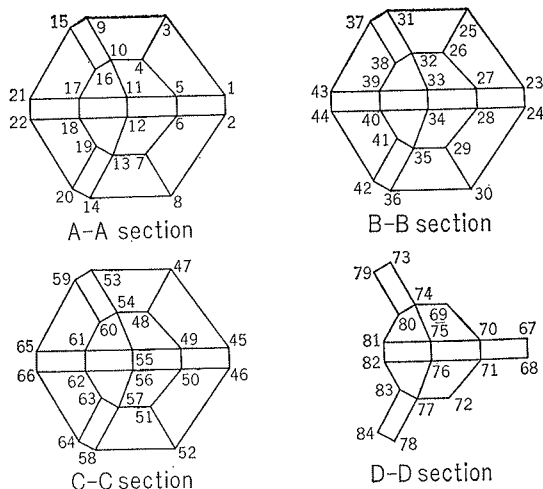


図-7 節点番号

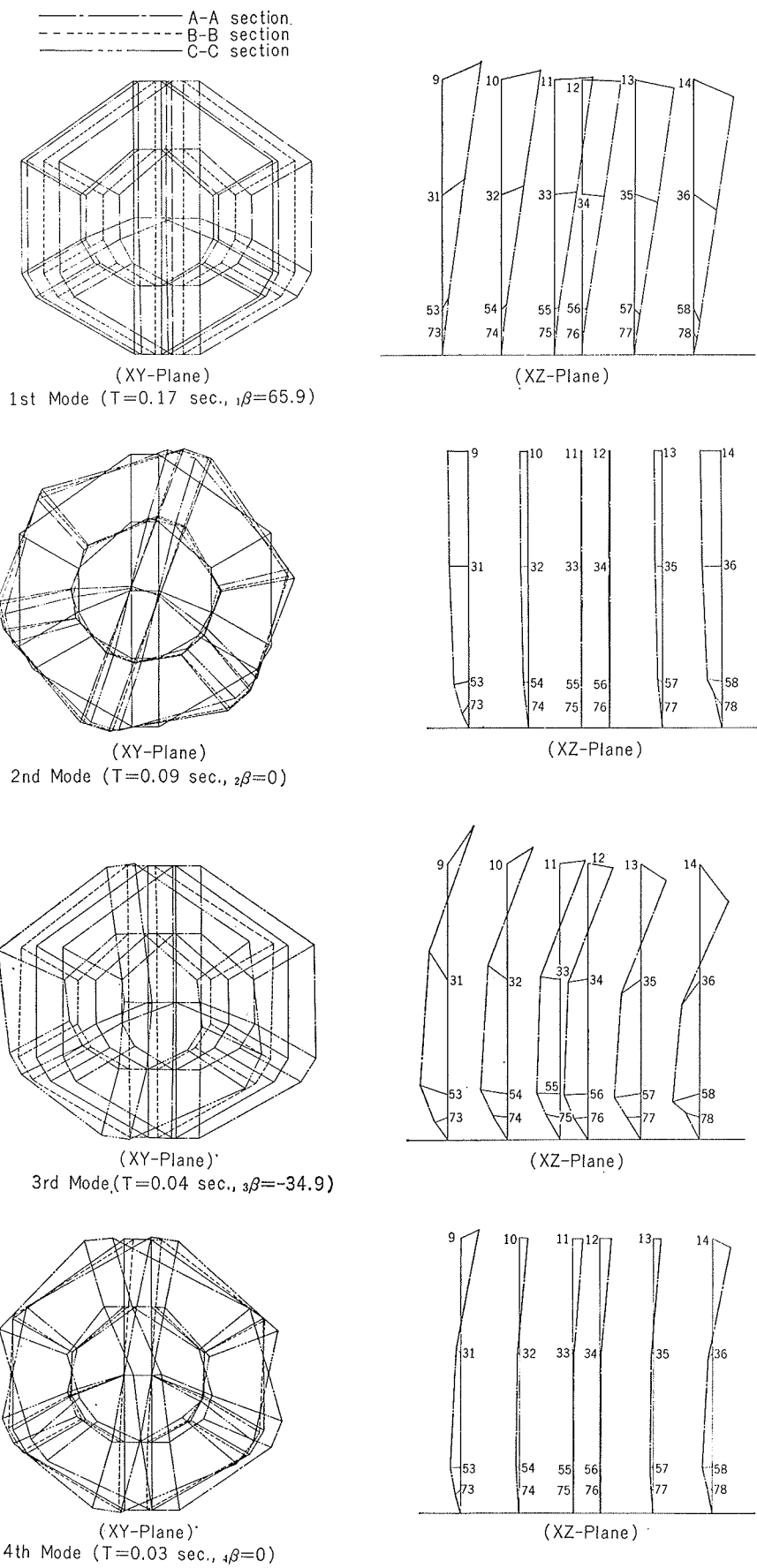


図-9 固有モード