

有限要素法による R. C. 部材の弾塑性解析 (その 1)

— 柱—はり部材 —

井 元 勝 慶
武 田 寿 一

Non-linear Analysis of Reinforced Concrete by the Finite Element Method (Part 1)

—Beam-Column—

Katsuyoshi Imoto
Toshikazu Takeda

Abstract

The Finite Element Method is recommended as a powerful weapon for numerical analysis to trace precisely the deformations and the internal concrete and steel stresses in reinforced concrete (RC) structures. In the recent several years, inelastic analyses of RC structures by FEM has come to be possible by replacing them with proper mathematical models and applying the studies made on non-linear characteristics of materials.

Such kinds of studies are presented in this paper also and as the first step the propriety of the method is examined by numerical examples of two-dimensional RC members. The computer program developed for the analysis can be applied for three-dimensional axi-symmetrical problems, such as PCR/V, by moderate modifications which will be reported at the next opportunity.

概 要

鉄筋コンクリート構造物の部材内部応力の流れ、破壊の進行状態、鉄筋の応力分担の割合等を精確に把握するための有力な数値解析法として有限要素法による解法があげられる。ここ数年来、材料の非線形特性、破壊の定義等に関する研究が盛んに行なわれ、優れた数学的モデルに置換することによって、有限要素法による弾塑性解析が可能になってきた。

ここでも、有限要素法を用いて鉄筋コンクリート構造物連続体の解析を進めてきたが、まずその第1段階として、2次元 R. C. 部材の弾塑性解析の概要とその計算例によって、この解法の妥当性を検討した結果をここに報告する。また本解法によるプログラムは、ある程度の修正をすることによって、3次元軸対称問題(例えば、PCR/V の解析)にも適用可能であるが、それについては次の機会に報告する。

1. 序

最近、鉄筋コンクリート構造物の解析に有限要素法を適用し、その弾性挙動だけでなく塑性状態を経て、崩壊機構に達するまでの解析を試みた研究論文がいくつか発表されている。しかしながら、コンクリートの破壊の定義、材料の非線形特性、鉄筋とコンクリートの相関関係、除荷の問題など多くの解明すべき点が残されている。

ここでもこれらの問題に対していくつかの仮定を設け、R. C. 部材の二次元弾塑性解析を有限要素法を用いて試みた。コンクリート要素の圧縮破壊については、圧縮破壊後の応力とひずみの関係を梅村博士の e - ϵ

数法に近似させ、またひびわれ発生時や圧縮破壊時に起る除荷の問題を考慮に入れて解析した。解析例としては、せん断スパン比の異なる二種類の柱—はり部材に対し、それぞれ定軸方向力のある場合とない場合の合計四例について行ない、実験結果との比較検討をしている。その結果をここに報告する。

2. 構造物のモデル化

R. C. 柱—はり部材の解析に際し以下のような仮定を設けた。

- i) 対象を二次元平面応力場の問題とする。
- ii) 構造物の幾何学的非線形性、コンクリートのクリープ、収縮等時間に関するもの、ひびわれ面の骨

材の摩擦などについては考慮しない。

iii) コンクリートに対しては三角形要素, 鉄筋に対しては, その両端でコンクリートの三角形要素の二節点に完全に剛接合された線要素で軸力のみを負担するものとし, 鉄筋のダボ効果も考慮しない。この仮定には問題があるように思われるが便宜的に設けた。ところで, いくつかの論文では, 鉄筋とコンクリートの付着性状についてはポンドリンクなる要素を仮定して解析している^{2), 5), 6)}。

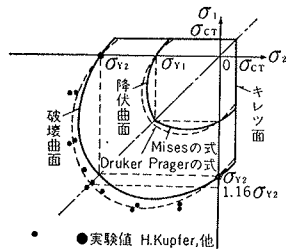
しかし, 鉄筋とコンクリートとの付着性状がまだ十分に解明されていないため, 現在のところ数学的モデルに付着の効果を考慮することは, 多くの点で難かしいように思われる。それゆえ, ここでも岩下博士⁴⁾, 磯畑氏³⁾, Valliapan⁶⁾ らと同様に完全付着の簡単な数学的モデルを使った。

iv) コンクリートの圧縮破壊後, 既に破壊している要素に除荷が発生しても, その剛性回復はないものとする。また破壊後の応力-ひずみ関係は e 関数法に基づく近似直線で表わせるものとする。

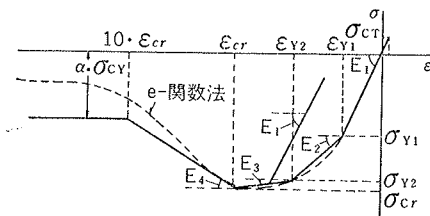
3. 解析

3.1. 応力とひずみの関係

コンクリートは最初, 等質等方性の弾性体とし, 応力とひずみの関係は Hooke の法則に支配される。降伏判定と圧縮破壊(以後, 圧壊と呼ぶ)の判定は Mises の条件式に従うものとする。またひびわれが存在する要素については, 直交異方性体として応力とひずみ関係は導かれる。これらの応力-ひずみ関係は参考文献に記載されているからここでは省略する^{1), 2), 3), 8)}。図一1のようにコンクリートの破壊曲面と降伏曲面を仮定する。コンクリートの一軸圧縮(引張)試験の応力-



図一1 コンクリートの破壊曲面



図一2 コンクリートの応力とひずみ関係

ひずみ曲線は図一2のようになる。最大圧縮ひずみ (ϵ_{cr}) に達するまでの応力-ひずみ関係を Trilinear とし, 大胆に次の仮定を試みた。すなわちひずみ (ϵ) が $\epsilon \geq \epsilon_{cr}$ のときには e 関数法に基いて $\epsilon = 10\epsilon_{cr}$ まで負勾配の剛性 (E_4) をもつものとし, $\epsilon > 10\epsilon_{cr}$ のとき破壊要素は最大応力度の α 倍の応力度を保持し続け, 剛性は零とする。ここでは $E_4 = -8.0 \text{ Ton/cm}^2$ と仮定した。

3.2. 破壊時の等価節点力と残留応力度の計算

3.2.1. 圧壊 ひびわれのない要素の圧壊の判定には相当ひずみ ($\bar{\epsilon}$) を用いて行なう。すなわち $\bar{\epsilon} \leq \epsilon_{cr}$ のとき引き続き弾性または塑性状態を保ち, $\bar{\epsilon} > \epsilon_{cr}$ のとき要素は圧壊する。要素にひびわれが存在する時はひびわれに平行なひずみ (ϵ_{y1}) を求め, $\bar{\epsilon} = \epsilon_{y1}$ において同様な判定を行なう。今, 図一3に示すように, 第 n 回目の計算ステップのとき, 既に圧壊している要素の相当応力度を $\bar{\sigma}_n$, このときの相当ひずみを $\bar{\epsilon}_n$, ひずみ増分を $d\bar{\epsilon}_n$ とし, 前回のこれらをそれぞれ $\bar{\sigma}_{n-1}$, $\bar{\epsilon}_{n-1}$ とすると, 第 n 回目のステップで三節点に解放すべき等価節点力 $\{\Delta F_n\}$ と要素内の残留応力度 $\{\sigma_n\}$ はそれぞれ次式で与えられる。

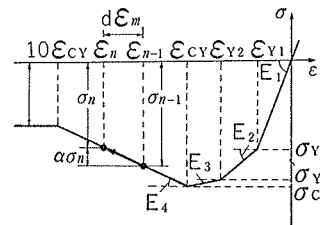
$$\{\Delta F_n\} = E_4 \cdot \frac{d\bar{\epsilon}_n}{\bar{\sigma}_{n-1}} \cdot t \cdot A_n [N_n]^T \cdot \{\sigma_{n-1}\} \dots \dots \dots (1)$$

$$\begin{aligned} \{\sigma_n\} &= \{\sigma_{n-1}\} + \{d\sigma_n\} \\ &= (1 + E_4 \cdot \frac{d\bar{\epsilon}_n}{\bar{\sigma}_{n-1}}) \{\sigma_{n-1}\} \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

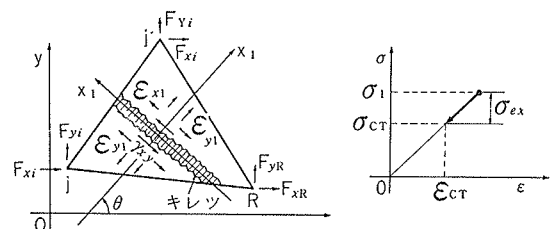
ここに, E_4 : 負剛性係数, t : 要素の厚さ, A_n : n 回目の要素の面積, $[N_n]$: 座標係数マトリックス,

$$\{\Delta F_n\} = \{\Delta F_{n_xi}, \Delta F_{n_yi}, \Delta F_{n_xj}, \Delta F_{n_yj}, \Delta F_{n_xk}, \Delta F_{n_yk}\}^T$$

$\{\sigma_n\} = \{\sigma_x^n, \sigma_y^n, \tau_{xy}^n\}^T$ である。



図一3 破壊要素の応力増分, ひずみ増分



図一4 要素のひびわれ破壊と余剰応力

3.2.2. ひびわれ ひびわれは主応力 (σ_1) が引張限界応力度 (σ_{eT}) 以上になったとき発生する。要素内の余剰応力度 (σ_{ex}) を次式で定義する (図-4 参照)。

$$\sigma_{ex} = \sigma_1 - \sigma_{eT} \quad \dots\dots\dots(3)$$

ひびわれ発生時の等価節点力 {F} と要素内の残留応力度 $\{\sigma_r\}$ はそれぞれ次式で与えられる。

$$\{F\} = \{F_e\} + \{F_o\}$$

$$= t \cdot A_n [N_n]^T \left\{ \frac{\sigma_{ex}}{\sigma_1} [I] + (1 - \frac{\sigma_{ex}}{\sigma_1}) [T]^T [T] \right\} \cdot \{\sigma\} \quad (4)$$

$$\{\sigma_r\} = (1 - \frac{\sigma_{ex}}{\sigma_1}) \{ [I] - [T]^T [T] \} \cdot \{\sigma\} \quad (5)$$

ここに, {F_e} : 余剰応力度の解放力, {F_o} : ひびわれ発生による解放力, $\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T$: ひびわれ発生直前の応力度, [I] : 3×3の単位行列, [T], [T₁] : 座標変換マトリックスで $\lambda = \cos \theta$, $\mu = \sin \theta$ とおいて

$$[T] = \begin{pmatrix} \lambda^2 & \mu^2 & \lambda\mu \\ \mu^2 & \lambda^2 & -\lambda\mu \\ -2\lambda\mu & 2\lambda\mu & \lambda^2 - \mu^2 \end{pmatrix}, [T_1] = \begin{pmatrix} \lambda^2 & \mu^2 & 2\lambda\mu \\ 0 & 0 & 0 \\ -\lambda\mu & \lambda\mu & \lambda^2 - \mu^2 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots(6)$$

3.3. 除荷判定

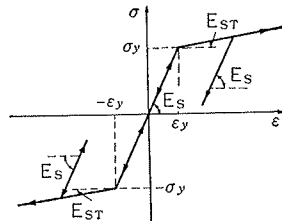
塑性要素についてのみ各計算ステップで除荷の判定を行なう。ひびわれが発生していない要素については Ruess の式 $\frac{d\epsilon_{y1j}}{\sigma_{ij}'} = d\lambda \quad \dots\dots\dots(7)$

$d\epsilon_{y1j}$: 塑性ひずみ増分, σ_{ij}' : 偏差応力度の比例定数 $d\lambda$ によって判別し, ひびわれが存在する要素ではひびわれに平行な方向の全ひずみ (ϵ_{y1}) と今回のひずみ増分 ($d\epsilon_{y1}$) の関係が

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{y1} \cdot d\epsilon_{y1} \geq 0 \text{ のとき引続き塑性} \\ \epsilon_{y1} \cdot d\epsilon_{y1} < 0 \text{ のとき除荷発生, } E = E_1 \text{ とする。} \end{aligned} \right\} (8)$$

3.4. 鉄筋の解析

鉄筋要素の応力とひずみの関係を図-5のように Bilinear とし, 破断は生じないものとする。除荷判定は塑性要素についてのみ式(8)



と同様に行なえばよい。図-5 鉄筋の応力ひずみ関係

3.5. 計算手順

本解法による弾塑性解析の計算手順を図-6に示す。

4. 解析モデル

局所的な圧壊が部材に発生してから引張鉄筋が降伏し, 系全体が崩壊に達するまでの挙動を調べるために以下のような部材を選んだ。試験体諸元を表-1に示す。表-1の試験体記号は, アルファベットの左添字がせん断補強筋比を表わし, 右添字が軸方向応力度を

表わす。Aはせん断スパン比が2.33, AAは1.5の試験体を表わす。試験体寸法を図-7に示す。表-2に

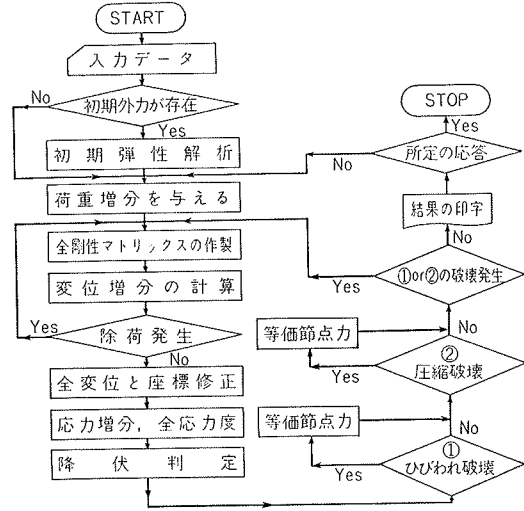


図-6 計算手順

試験体	断面形 B×D (cm×cm)	a/D	N/B D (kg/cm ²)	P _r (%)	せん断補強筋	
					ω _r (%)	間隔 (mm)
0.5A0	30×30	2.33	0	2.0	0.5	2-D10@95
0.5A56	"	"	56	"	"	"
0.5AA0	"	1.50	0	"	"	"
0.5AA56	"	"	56	"	"	"

表-1 試験体諸元

試験体	σ _{cT} (kg/cm ²)	σ _{v1} (kg/cm ²)	σ _{v2} (kg/cm ²)	ε _{cT} (×10 ⁻⁶)	E ₁ (TON/cm ²)	E ₂ (TON/cm ²)	E ₃ (TON/cm ²)	E ₄ (TON/cm ²)
0.5A0	18.2	-140.7	-211	-1850	215	87.5	0.	-12.5
0.5A56	16.4	-134.0	-201	-2340	186	67.7	0.	-12.5
0.5AA0	17.8	-132.0	-182	-1940	195	67.2	0.	-12.5
0.5AA56								

表-2 コンクリートの性質

試験体	σ _v (kg/cm ²)	σ _v (×10 ⁻⁶)	E _s (TON/cm ²)	E _{sT} (TON/cm ²)
A - 試験体	3500	1724	2030	19.6
AA - 試験体	3535	1683	2100	19.0

表-3 鉄の性質

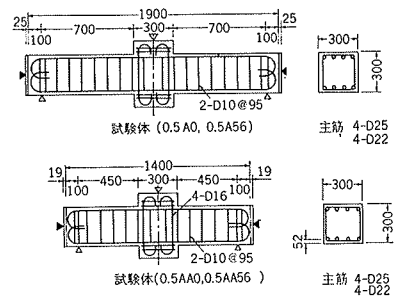


図-7 試験体寸法

コンクリート, 表-3 に鉄筋の力学的性質を示す。解析モデルとしては上記試験体の対称性を利用し左半分行ない, 図-8 のような要素の分割と鉄筋の配置をした。

5. 結果と実験結果の比較

実験結果は, 試験体の加力方法が最初の正荷重時に部材角 $R=1/200$ で除荷し, その後 $R=\pm 1/100$ で2サイクル, $R=\pm 1/70$ で1サイクル, $R=\pm 1/50$ で1サイクル載荷した後に, 最終破壊させて得られたものである。また使用した計算機はNEAC 2200モデル500で計算時間は各試験体とも約3時間半であった。荷重増分はA-試験体のとき0.5Ton, AA-試験体のとき1.0Tonとした。

各試験体の荷重変位関係を図-9, 図-10に示す。

図中の実験値は繰返し載荷による変位の包絡線を表わし, 直線は弾性剛性及びe関数法による計算値で, ひびわれ発生点と降伏時の変位とを結びその中間点を表わしている。図中の太線がF.E.M.による解析値である。表-4に曲げひびわれ発生荷重を示す。表中の略算値は試験体を弾性体とし, 引張縁応力度が $0.1\sigma_{cr}$ に達した時に曲げひびわれが発生するものと仮定した。また表中のプラスは正荷重, マイナスは負荷重時の実験値である。

表-5に斜めせん断ひびわれ発生荷重を示す。表中の略算値は曲げ応力の影響を無視した次式より求めた⁷⁾。

$$P_{計} = A_e \cdot \sqrt{\sigma_{ct} \cdot (\sigma_{ct} - \sigma_o)} \dots\dots\dots(9)$$

ここに, σ_{ct} : コンクリートの引張応力度, σ_o : 軸方向力を等価コンクリート断面積で除した値, A_e : 等価コンクリート断面積

表-6に各試験体の最大荷重を示す。表中の略算値はe関数法によって求めた値である。FEM値は引張鉄筋が降伏した時を最大荷重とした。0.5AA56試験体のみが引張側と圧縮側の鉄筋が同時に降伏した。

FEMから得られた各試験体の破壊性状を図-11~14に示す。図中, 実線, 破線, 実破線は特定荷重時にひびわれが発生している要素とその方向を表わし, 二重線で囲まれた領域は降伏領域であり, ハッチした領域は圧壊領域を示す。試験体の破壊型は実験結果によると, 0.5A0は曲げ破壊に近い曲げせん断混合型, 0.5A56, 0.5AA0は曲げせん断混合型, 0.5AA56が曲

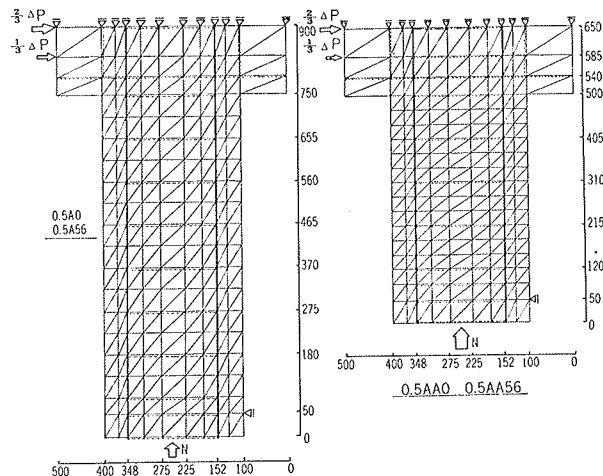


図-8 試験体のモデル化(分割法, 外力, 支持条件)

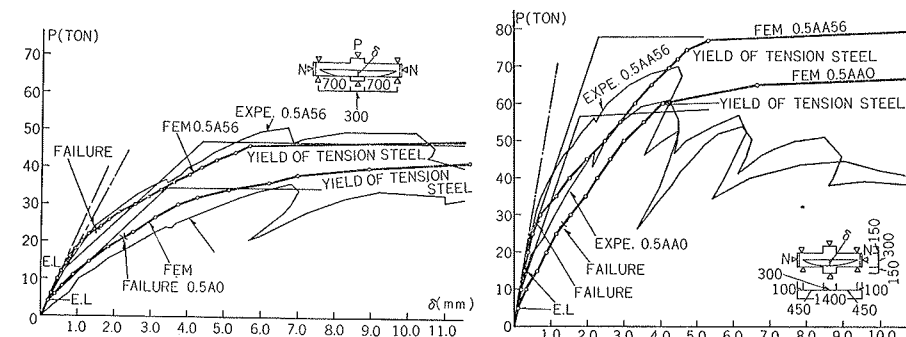


図-9 荷重-変位曲線(0.5A0, 0.5A56) 図-10 荷重-変位曲線(0.5AA0, 0.5AA56)

試験体	実験値(TON)		略算値		FEM		実験値/略算値		実験値/FEM		略算値
	+	-	(TON)	(TON)	+	-	+	-	+	-	
0.5A0	3.7	-	4.7	3.0	0.787	-	1.233	-	1.567		
0.5A56	12.0	9.0	12.5	11.5	0.957	0.720	1.043	0.783	1.087		
0.5AA0	8.0	-	6.0	4.2	1.333	-	1.905	-	1.429		
0.5AA56	16.0	19.0	18.8	17.0	0.851	1.011	0.941	1.118	1.106		

表-4 曲げひびわれ発生荷重

試験体	実験値(TON)		略算値		FEM		実験値/略算値		実験値/FEM		略算値
	+	-	(TON)	(TON)	+	-	+	-	+	-	
0.5A0	12.7	18.0	26.1	12.0	0.488	0.691	1.059	1.500	2.168		
0.5A56	28.0	26.0	41.6	27.0	0.674	0.925	1.037	0.963	1.538		
0.5AA0	24.0	22.0	23.2	19.0	1.035	0.947	1.263	1.157	1.273		
0.5AA56	40.0	37.0	41.5	35.0	0.964	0.891	1.142	1.058	1.185		

表-5 斜めひびわれ発生荷重

試験体	実験値(TON)		略算値		FEM		実験値/略算値		実験値/FEM		略算値
	+	-	(TON)	(TON)	+	-	+	-	+	-	
0.5A0	35.9	41.0	35.9	39.5	1.000	1.141	0.909	1.038	0.900		
0.5A56	51.0	48.8	48.5	48.0	1.050	1.005	1.062	1.017	1.010		
0.5AA0	60.9	49.0	58.2	65.0	1.045	0.842	0.937	0.753	0.895		
0.5AA56	70.0	68.0	77.3	76.0	0.906	0.880	0.921	0.894	1.016		

表-6 最大荷重

げせん断混合型に近いせん断破壊型であった。FEMの結果も大体実験結果と同じであることが図より分かる。

図-15にFEMによるせん断応力度の分布形状を示す。各試験体とも支持点と荷重作用点を結ぶ線上で最大せん断応力度が生じていた。また破壊が進むにつれ

て、せん断応力度の分布が大きく影響を受けている。図-16にコンクリート、鉄筋の荷重-ひずみ関係を、それぞれ実験値と FEM 値を比較して示す。これらより FEM 値は実験値を定性的にはよく表わしているが、破壊が進むにつれて定量的に実験値と合わなくなる傾向を示している。

6. むすび

以上、FEM による R.C. 部材の弾塑性解析の結果、大胆な仮定にもかかわらず、弾塑性挙動をある程度追跡することができた。この結果を礎にしてより合理的な R.C. 構造物の弾塑性解析法を求めて行きたい。

最後に実験資料を提供して下さった当技研構造研究室吉岡職員に深く感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 山田, “塑性力学” 日刊工業新聞社 S 40. 1
- 2) 黒正・滝口, 日建論報, S 46. 11, 大会梗概集 S 47. 11
- 3) 磯畑, 日建論報 S 46. 11
- 4) 岩下, 日建論報 S 42. 11
- 5) 宮下・他, 大会梗概集 S 46. 11, S 47. 11
- 6) A. C. Scordelis, A. H. Nilson, S. Valliappan らの研究論文
- 7) 吉岡, 当技研所報 No. 5, 1971
- 8) O. C. Zienkiewicz, Y. K. Cheung, McGraw Hill, 1968

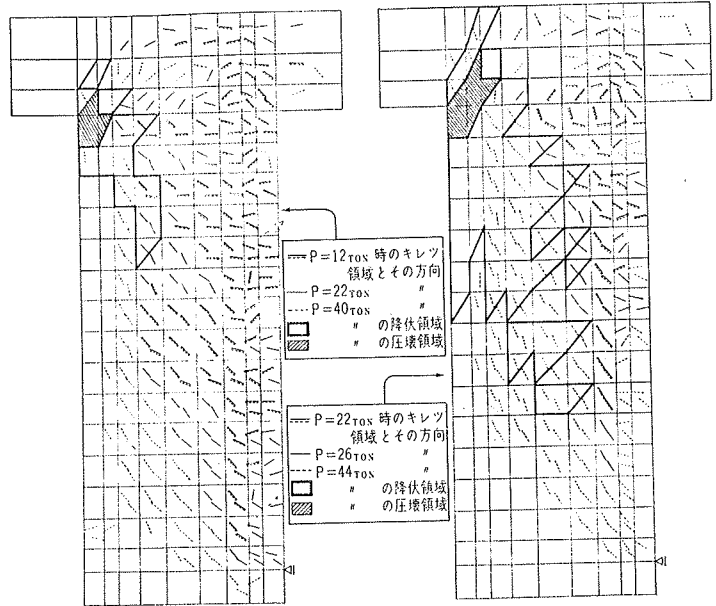


図-11 0.5A0の破壊性状

図-12 0.5A56の破壊性状

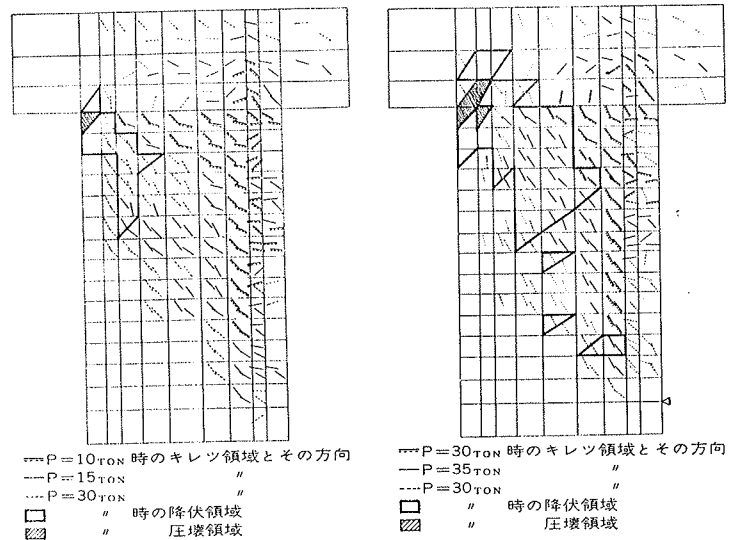


図-13 0.5AA0の破壊性状

図-14 0.5AA56の破壊性状

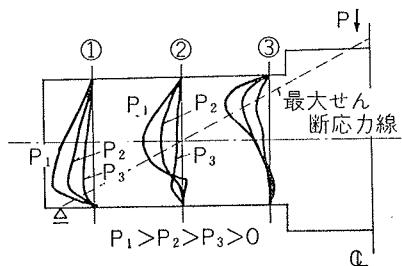


図-15 せん断応力度の分布 (0.5AA56)

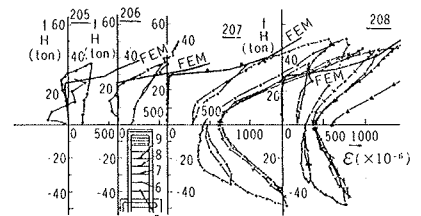
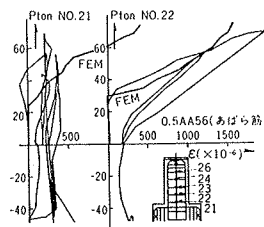
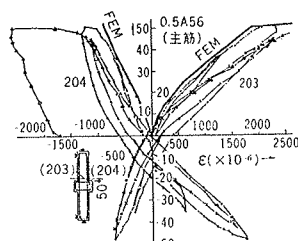
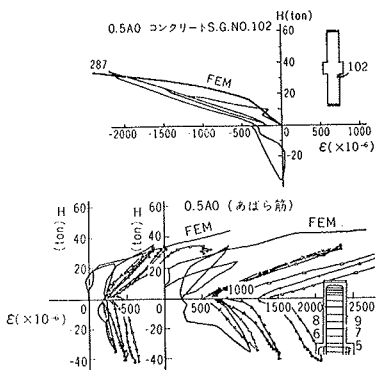


図-16 コンクリート、鉄筋の荷重-ひずみ曲線