

有限要素法による浸透流・熱流などの解析 (定常・非定常)

齋藤 二郎
藤原 紀夫

Finite Element Analyses of Seepage Flow, Heat Flow and Others (Steady・Unsteady)

Jiro Saito
Toshio Fujiwara

Abstract

The solution of field problems, that is, seepage flow, heat flow, and so on, is governed by a quasi-harmonic differential equation. The outline of finite element analysis, treatment of axial symmetric problems, determination of stream lines and the procedure of computer programming are described. As analyzed examples, the seepage flow through a dam, sand-blow stream of a submerged tunnel and time-dependent heat flow of a low-temperature underground tank are shown. It is shown that the finite element method is excellent for solving these problems.

概 要

浸透流・熱流・渦無しの流れなどの問題は、場の問題 (Field problems) と呼ばれ、準調和微分方程式を解くことによって、その解が得られる。これらの問題を有限要素法で解く場合の基礎理論の概要と軸対称問題の取り扱い方、流線の決定方法などについて述べ、また、電算プログラムの組み方の手順についても述べる。解析例として、ダム下の浸透流、沈埋砂吹込み工法における水流、地下低温タンクの非定常熱流などについて示す。これまで有力な解法がなかった解析領域の複雑な場合や異方材料、異質材料、軸対称問題などの場合に、有限要素法が非常に有力な解法であることを示す。

1. まえがき

有限要素法解析は、構造力学・連続体の力学などに用いられて、大いにその成果をあげている。本報告は、この解析方法を場の問題に用いてみたものである。場の問題、すなわち、浸透流・熱流・磁場の分布などの問題は、いずれも、準調和微分方程式を支配方程式とする物理問題である。

有限要素法によって弾性問題を解く場合には、基本的な式が細部のつり合い条件を考慮することなく、取り扱う系の全ポテンシャルエネルギーを最小にすることを用いて公式化する。一方、場の問題においては、ある汎関数を、ある領域内で最小にする問題として、公式化する。これらの基礎理論の概要と電算プログラムの組み方の手順について述べ、解析例として、浸透流・非定常熱流・渦無しの流れなどについて示す。

2. 基礎理論

2.1. 基礎方程式

場の問題を表わす非定常微分方程式は次式で示され

る。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + Q(x, y) - c\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

ここに、 ϕ ; 未知関数で水頭、温度など、 k_x, k_y ; x, y のある定まった既知関数で透水係数、熱伝導率など、 Q ; 排 (給) 水量など、 c ; 比熱など、 ρ ; 密度などを示す。

(1)式において、 t に関する第4項がなければ、当然、定常問題となる。

Euler の理論¹⁾によれば、最小化を必要とする汎関数 (χ) は次式で示される。

$$\chi = \iint \frac{1}{2} \left\{ \left[k_x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + k_y \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] - \left[\left(Q - c\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \phi \right] \right\} dx dy \quad \dots\dots\dots(2)$$

次に、三角形要素に分割された領域を考える。ある要素の各節点を、左まわりに、 i, j, m とする。この要素内における関数 ϕ を、次式で定義する。

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad \dots\dots\dots(3)$$

三つの定数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ は (x, y) に節点座標を代入して得られる三つの連立方程式を解くことにより、簡単に求めることができる。この $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を(3)式に代入すると、

$$\phi = [N_i, N_j, N_m] \{ \phi \}^e \quad \dots\dots\dots(4)$$

ここに、サフィックス e ; 要素を意味する。
 N_i ; $(a_i + b_i x + c_i y) / 2\Delta$ など、 $a_i; x_j x_m - x_m y_j, b_i; y_j - y_m, c_i; x_m - x_j, \Delta$; 要素の面積。

(2)式を微分し、これに(4)式を入れると、

$$\left\{ \frac{\partial \chi}{\partial \phi} \right\}^e = [h]^e \{ \phi \}^e + [F]^e + [P] \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\}^e \quad \dots\dots\dots(5)$$

ここに、 $h_{pq} = (k_x b_p b_q + k_y c_p c_q) / 4\Delta$,

$$[F]^e = -\frac{Q\Delta}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, [P] = \iint c\rho [N]^T [N] dx dy$$

(5)式は $[h]^e$ を要素の剛性マトリックス、 $[F]^e$ を内部に分布する荷重と考え、重ね合せによる構造方程式の組立てと、まったく同じになる。(5)式を全体の系についてまとめると、次のごとくなる。

$$[H] \{ \phi \} + [F] + [P] \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots(6)$$

2.2. 時間項の処理

(6)式は時間の項を含んでいるので、この処理方法を考えないと解けない。ここでは、差分手法を用いることにする。Wilson & Clough の提案する方法を用いると、次のような漸化式がえられる。

$$\begin{aligned} & \left([H] + \frac{2}{\Delta t} [P] \right) \{ \phi \}_t \\ & = \left(-\frac{2}{\Delta t} [P] - [H] \right) \{ \phi \}_{t-\Delta t} - 2[F] \quad \dots\dots\dots(7) \end{aligned}$$

ここで、 $[ST1] = [H] + \frac{2}{\Delta t} [P]$, $[ST2] = \left\{ \frac{2}{\Delta t} [P] - [H] \right\}$ とすると (7)式は次式となる。

$$[ST1] \{ \phi \}_t = [ST2] \{ \phi \}_{t-\Delta t} - 2[F] \quad \dots\dots\dots(7')$$

また、後進差分式を用いた場合には、次のような漸化式を得る。

$$\begin{aligned} & \left([H] + \frac{1}{\Delta t} [P] \right) \{ \phi \}_t \\ & = \frac{1}{\Delta t} [P] \{ \phi \}_{t-\Delta t} - [F] \quad \dots\dots\dots(8) \end{aligned}$$

(7), (8)式の漸化式を用いて、 Δt (時間刻み) ごとに $\{ \phi \}_t$ を求めてゆけばよい。(7), (8)式のどちらを用いてもよいが、実際に、演算してみた所(7)式の方が少しだけ取れん性がよいようである。この際、 Δt の大きさの取り方が問題となるが、これには、各材料について、次式を満足するように Δt を決めればよい。

$$\frac{k\Delta t}{c\rho} \left\{ \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \right\} < \frac{1}{2} \quad \dots\dots\dots(9)$$

ここに、 Δx ; 最も小さい要素の x 方向の長さ、 Δy ; 同じ要素の y 方向の長さ。

2.3. 流速・流量の求め方

(4)式を微分すると、次式のような勾配マトリックスが決まる。

$$[\text{grad } \phi] = [G] \{ \phi \}^e \quad \dots\dots\dots(10)$$

$$\text{ここに、} [G]; \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \end{bmatrix}$$

勾配マトリックスがわかれば、次式を用いて流速を計算することができる。

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \{ \text{grad } \phi \} \quad \dots\dots\dots(11)$$

流量を求めるには、流量を計算する断面を定め、この断面の長さ (l) に(11)式で求めた流速を乗ずればよい。後述の軸対称問題では、流速に $2\pi \cdot l$ を乗ずれば求まる。

2.4. 軸対称問題

軸対称の浸透流・熱流などの方程式は、次のような標準的な形で表わされる。

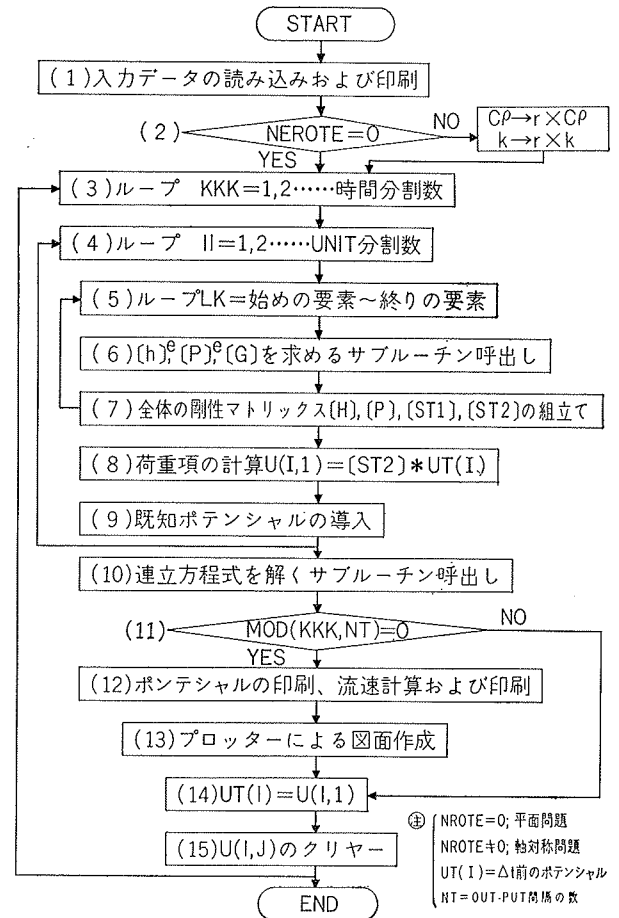


図-1 フローチャート (非定常)

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(rk \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(rk \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - rc\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \dots(12)$$

ここに、座標は x と y に代って、半径方向と軸方向の r および z である。

(1)と(12)式を比較照合してみれば、直ちに理解されるように、平面プログラムを軸対称問題の解析に利用するには、平面問題の k のかわりに (rk) 、 $(c \cdot \rho)$ のかわりに $(r \cdot c\rho)$ とおきかえればよい。

2.5. 流線の決定

流れの関数を ϕ とすると、 v_x , v_y は次式で示される。

$$\begin{aligned} v_x &= \partial\phi/\partial y & \dots\dots\dots(13) \\ v_y &= \partial\phi/\partial x \end{aligned}$$

(11)式と(13)式から次式を得る。

$$\begin{aligned} \partial\phi/\partial x &= -1/k_x \cdot \partial\phi/\partial y & \dots\dots\dots(14) \\ \partial\phi/\partial y &= 1/k_y \cdot \partial\phi/\partial x \end{aligned}$$

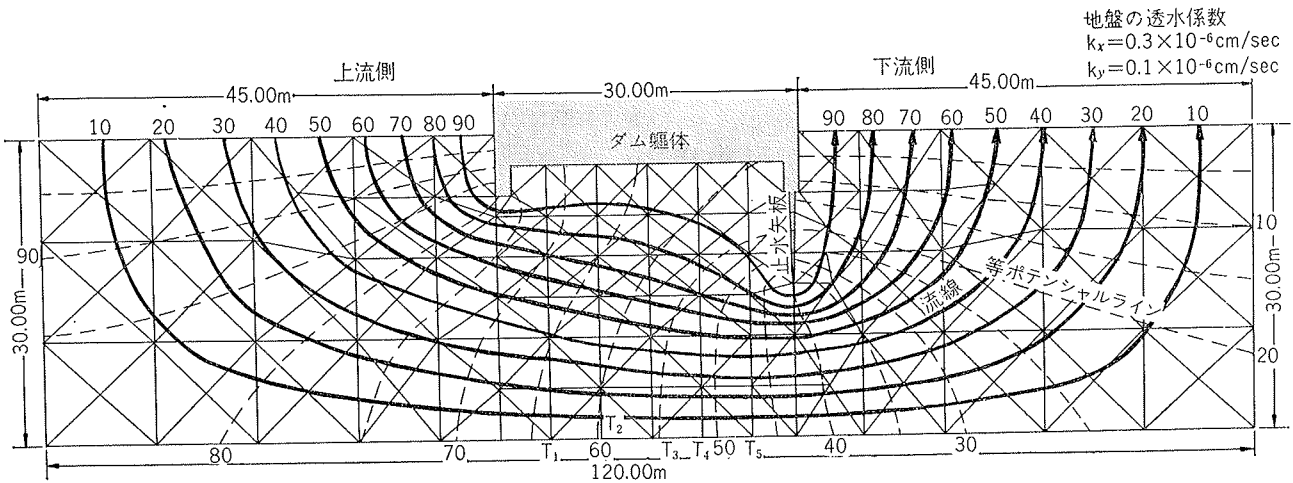
(14)式を(2)式に代入すれば理解されるように、 k_x を $1/k_y$, k_y を $1/k_x$ に変換すれば、 ϕ の決定と同じプロセスによって、 ϕ を決定することができる²⁾。この際、境界条件の取り方は、著者らの研究³⁾の中で示し

た電気アナログ法による流線の決定の場合と同じである。

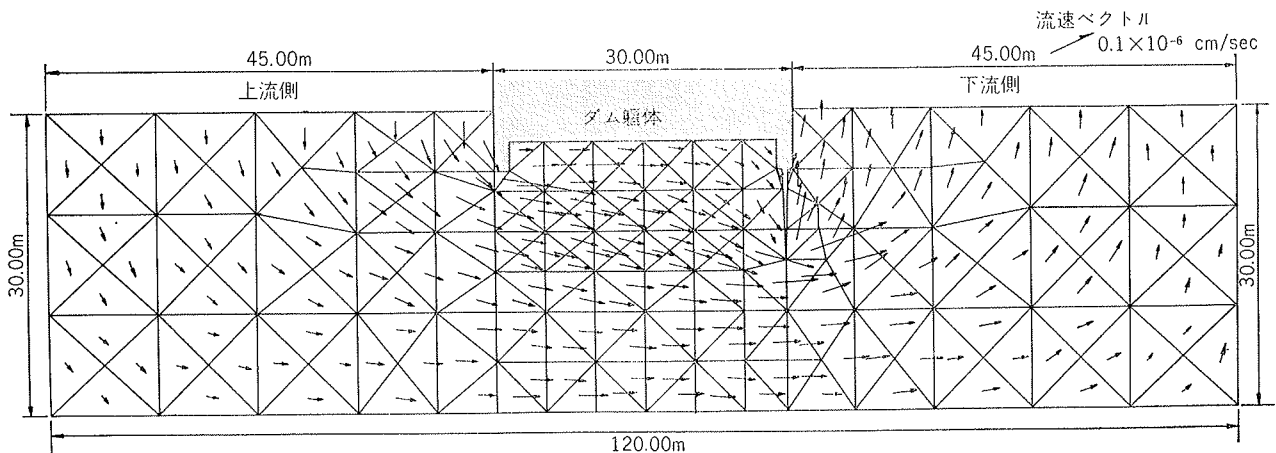
2.6. フローチャート

(図一1)に、非定常問題を解く場合の電算プログラムのフローチャートを示す。定常問題の場合には、本図の中から(3), (8), (11), (14), (15)と(6), (7)の一部を除いたものになる。(図一1)の中には、{F}の項が入っていないが、これを追加するには、前述したように、(8)の所に{F}の項を加えればよい。

有限要素法解析では、多元の連立方程式を能率よく処理しなければならない。ここでは、“対角化分割法”を用いて、連立方程式の解法は“掃出し法”を用いている¹⁾。一度に解ける連立方程式100元が限度とされている。定常問題の場合には50元、非定常問題では30元の連立方程式になるようにUNIT分割して解いている。非定常の場合に30元となったのは、当社の電算機NEAC 2200(容量208K)では、プログラムが容量オーバーとなったため、連立方程式の解析能力から決まったものではない。



図一2 ダム下を流れる浸透流の流線網図



図一3 ダム下を流れる浸透流の流速分布図

アウトプットはプロッター (NATIONAL FAI430/100) によって、自動図化させている。

3. 解析例

3.1. ダム下の浸透流

水平な不透水性基盤の上に、厚さ 30m の透水性地盤があり、この上に幅30mのコンクリートダムがある場合の浸透流の解析を行なってみる。この種の問題を取り扱う場合には計算に先だて、まず解析領域を決

断面	上流側	下流側	平均
T ₁	7.167×10^{-1}	6.759×10^{-1}	6.963×10^{-1}
T ₂	6.735×10^{-1}	6.754×10^{-1}	6.745×10^{-1}
T ₃	6.740×10^{-1}	6.738×10^{-1}	6.739×10^{-1}
T ₄	6.756×10^{-1}	6.679×10^{-1}	6.717×10^{-1}
T ₅	6.709×10^{-1}	6.875×10^{-1}	6.792×10^{-1}

表一 浸透流量 (l/sec/m)

定しなければならない。ここでは、ダムのセンターから両側に60mの所に不透水層を仮定した。要素数243, 節点数148, UNIT 数は4分割とした。また止水矢板はダムとの接合部で幅 50cm, 先端部を三角形の頂点とする極めて細長い三角形を仮定した。

(図一2)に流線網を、(図一3)に流速分布図を示す。透水地盤の透水係数は $k_x = 0.3 \times 10^{-6} \text{cm/sec}$, $k_y = 0.1 \times 10^{-6} \text{cm/sec}$ とし、異方性地盤を仮定した。

浸透流量の計算結果を(表一)に示す。表の中の T₁~T₅ 断面とは(図一2)の中に示した通りである。

3.2. 沈埋トンネルの砂吹き込み工法の水流

沈埋トンネルの基礎工の型態として、砂吹き込み工法

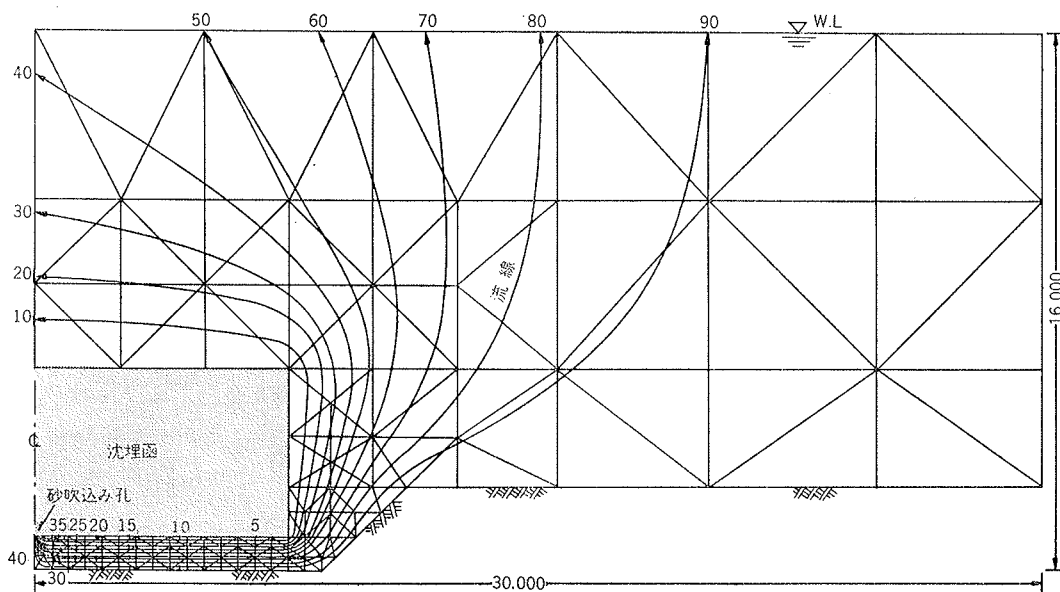
がある。一般に、砂の吹き込みは沈埋函を仮支持台にのせた後、函の横から吹き込む方法が行なわれる。クリスチャン・ニールセン方式などはその代表的なものである。しかし、沈埋函の内部から砂を吹き込む方法も考えられる。当社では、この方法の有用性に目をつけ、開発を進めている。ここでは、この工法に関して、沈埋函の内部から土砂流を吹き込んだ場合の水流を、渦無しの流れとして解析してみた。水流を渦無しの流れとして解析する方法は水門の水流解析などに用いられている方法である。この場合には、未知関数 ϕ は速度ポテンシャルと呼ばれるものになる。

解析モデルとして、水深16mの海底に、高さ5m, 幅 15m の沈埋函を沈設する場合を想定し、函底の中央の孔から砂を吹き込む場合を考える。軸対称問題と仮定し、右半分の解析領域だけを考え、要素数 191, 節点数129に分割した。

(図一4)に流線網図を示す。函底と水底との間を流れる水流は一様な流れとなり、函の外に出ると急に流線が広がっている。ここでは、紙面の都合で示すことができないが、流速分布も同時に計算させている。これらの流速と吹き込み砂の沈降限界速度とを比較すれば、砂のタイ積状況が推定できる。

3.3. 地下低温タンクの非定常熱流

地下低温タンクは、一般に、鉄筋コンクリートで製作され、内部は断熱材でおおわれる。そこで、解析モデルとして、内空直径4.0m, 内空高さ7.0mの円筒状のタンクを想定した。このタンクに、液体窒素(沸点-196°C)を満した時の非定常熱流を解析してみる。解析領域は、軸対称問題として、対称軸の右半分の領



図一4 沈埋トンネルの砂吹き込み工法における水流の流線網図

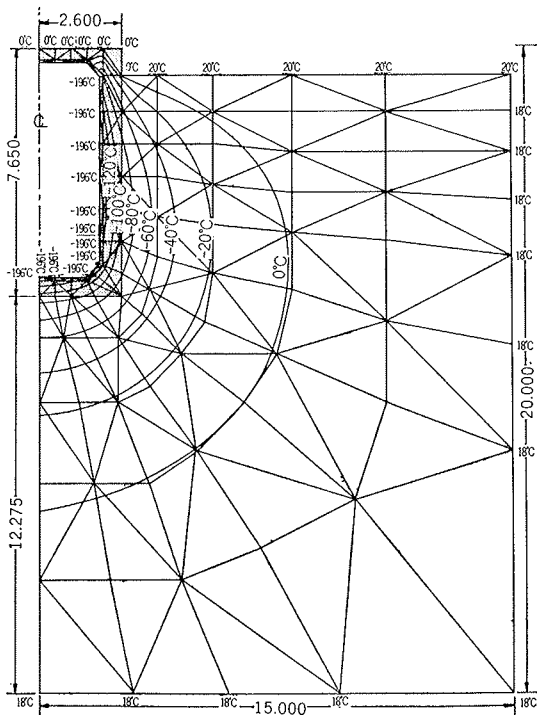


図-5 地下低温タンクの温度分布 (定常状態)

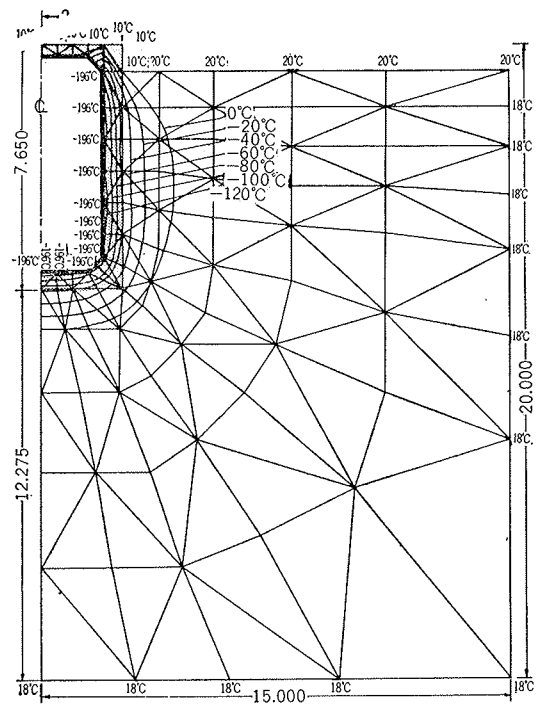


図-6 地下低温タンクの温度分布 (20日後)

域を考え、これを節点数 110、要素数 172 として、UNIT 数を 4 分割とした。

(図-5) に定常状態の温度分布図を、(図-6) に 20 日後の温度分布図を示す。断熱材、コンクリート、地盤の熱伝導率は、それぞれ、0.2, 1.5, 2.0 (Kcal/mh°C) を、比熱と密度の積 ($c \cdot \rho$) は、それぞれ、25.0, 500.0, 900.0 (Kcal/m³C) を仮定した。また、境界拘束条件などは図中に示した通りである。

この解析で問題となったのは、境界条件の取り方である。地盤をどの範囲まで考えるか、地表面の境界温度、とくに、タンク周辺部の地表面温度などの考え方である。この解析では、タンク周辺の地表面温度を経過時間に応じて、変化させる方法を用いてみた。

4. むすび

有限要素法による場の問題の解析に関し、その基礎理論の概要といくつかの解析例について述べてきた。解析例で理解されるように、有限要素法は、これまで他の方法では解析することが困難であった複雑な境界をもつ問題や異方・異質地盤 (材料) の場合に用いて、非常に有力な解析方法であると言える。

演算時間について述べておくと、当社の電算機 (N EAC 2200) を用いた場合、3.1. の解析例 (節点数148) で、流線を求めるのに、CPU Time (実演算時間) に

して、2分19秒、ポテンシャルを求めるのに、2分18秒を要した。3.3. の解析例 (節点数110) の場合には、非定常問題であるため、 Δt 時間ごとの繰返し計算となるが、20回の繰返し計算に、14分21秒を要した。

今後、このプログラムを三次元問題に拡張したり、時間項の処理を直接有限要素化するなどの改良を加えるつもりである。

最後に、このプログラムの開発にあたって、当社の機械計算部・開発課の太田、徳永の両氏に多大な御援助をいただいた。また、この研究の一部は、日大理工学部、最上・酒井両先生の御指導を受けていた高久・関山両君に実施してもらった。ここに記して、深く感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 吉識雅夫監訳：マトリックス有限要素法，培風館
- 2) 山上・小田：非均質異方性地盤の流れに関する有限要素解析について，土と基礎，March, 1972
- 3) 斎藤・藤原：二重締切り矢板壁の浸透流について，第7回土質工学研究発表，E-7-136
- 4) W.D. Liam Finn; Finite-Element Analysis of Seepage Through Dams, Proc. of ASCE, SM-6, November 1967