

有限要素法による R. C. 部材の弾塑性解析

(その 2)——軸対称回転体——

(その 3)——柱—はり部材の復元力特性——

井 元 勝 慶

武 田 寿 一

Non-linear Analysis of Reinforced Concrete by the Finite Element Method

(Part 2)—Axisymmetrical Problems

(Part 3)—Beam-Column under Repeated Loading

Katsuyoshi Imoto

Toshikazu Takeda

Abstract

This report describes a series of studies made to establish a way for non-linear analysis of reinforced concrete by the finite element method. In the previous report (Part 1), a method of non-linear analysis of reinforced concrete structural members had been studied. Elasto-plastic behaviors of reinforced concrete members can be approximately analyzed by that method.

The report presented here consists of two parts: in the first (Part 2), a method of non-linear analysis of three-dimensional axisymmetrical reinforced concrete problems is developed and the propriety of the method is discussed with a PCR/V test model as the analytical example; in the second (Part 3), a method of non-linear analysis of reinforced concrete structural members subjected to repeated loading is developed.

概 要

本報告は有限要素法を用いて R. C. 連続体の弾塑性解析を確立するために行った一連の研究を述べたものである。前報告で 2 次元 R. C. 部材の弾塑性解析を行ったが、この解析法により R. C. 部材の弾塑性挙動を追跡できることが判明した。ここではまず、(その 2)において 3 次元軸対称回転体の弾塑性解析を試みた。解析例として PCR/V のモデルを採用し、解析結果について検討している。実験結果との比較検討については PCR/V 構造物に関する研究 (1-1 PCR/V 内圧実験) の項で述べる。(その 3) では(その 1) の解析に新しい仮定と解析法を考慮することによって、繰返し外力を受ける R. C. 部材の復元力特性を求める弾塑性解析を試みた。ここにこの解析の概略を記し、解析結果と実験結果の比較考察を行う。

(その 2)—— 3 次元軸対称問題——

1. 序

前報告¹⁾で 2 次元 R. C. 部材の弾塑性解析を行ったが、この解析法に依り、R. C. 部材の弾塑性挙動を把握できることが分った。この解析を基礎にして 3 次元軸対称問題の弾塑性解析も 2 次元の場合と同様に進めることができる。それゆえ、ここでも有限要素法を用いて R. C. 軸対称回転体の非線形解析を試みた。解析は、コンクリートのひびわれ問題、補剛材やコンクリートの材料非線形特性、降伏している要素の除荷問題、コンクリートの圧縮破壊などを考慮している。

解析例として PCR/V-Single Cavity Model を採用

し、その弾塑性解析を行った。

ここでは、解析法と解析結果について論じ、実験結果との比較検討については PCR/V 構造物に関する研究 (1-1 PCR/V 内圧実験) の項で述べる。

2. 構造物のモデル化

R. C. 回転体のモデル化に関する仮定を以下に記す。

- i) 対象を 3 次元軸対称回転体とし、平面応力の問題とする。
- ii) 構造物の幾何学的非線形性、コンクリートのクリープ、収縮等時間に関するもの、鉄のダボ効果、ひびわれ面の骨材の摩擦等については考慮しない。

iii) コンクリートに対しては三角形リング要素, r-z 面内の鉄筋は線要素, 円周方向の鉄筋は点要素, ライナー, 支持板などの鉄板は面要素とする。またコンクリートと鉄との付着は(その1)と同様に完全剛とし, 付着のはがれ, スリップは生じないものとする。

iv) コンクリートのひびわれ破壊は半径方向に1本 円周方向に互いに直交する2本, 合計3本まで可能で, 4本以上は入らないものとする。

v) コンクリートの降伏と圧縮破壊は Druker-Prager の条件式によって判定する。

3. 解析

3.1. コンクリートの解析

3.1.1. 応力とひずみの関係 前報告(その1)では, 弾塑性時の応力とひずみの関係に Mises の降伏条件式を用いたが, コンクリートの場合には, Prager-Druker の条件式の方が実際の塑性性状をよくつかんでいる。それゆえ, 山田⁴⁾の塑性増分理論に Prager-Druker の条件式を適用する。

①ひびわれ破壊していない要素は弾性時に Hook の法則に従うものとし, 塑性時に山田の塑性増分理論によれば, 塑性応力ひずみマトリックス $[D_p]$ は次式で与えられる。

$$[D_p] = [D_e] - \frac{[D_e] \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [D_e]}{g + \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [D_e] \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}} \dots (2.1)$$

- ここに, f : 応力度 $\{\sigma\}$ のスカラー関数
- g : 正值のスカラー関数で材料のひずみ硬化特性
- $[D_e]$: 弾性時の応力-ひずみマトリックス回転体のとき

$$[D_e] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-\nu)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{pmatrix} \dots (2.2)$$

- E : 弾性係数
- ν : ポアソン比

コンクリートの降伏条件に Prager-Druker の式を用いると, スカラー関数 f は次式で与えられる。

$$f = \frac{1}{\beta} (\alpha J_1 + \sqrt{J_2}) = |\sigma_B| \dots (2.3)$$

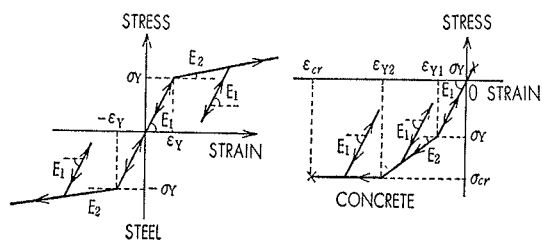


Fig.2.1 Uni-axial Stress-Strain Relation of Materials

ここに

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \sigma_r + \sigma_z + \sigma_\theta \\ J_2 &= (\sigma_r^2 + \sigma_z^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r \sigma_z - \sigma_z \sigma_\theta - \sigma_\theta \sigma_r + 3\tau_{rz}^2) / 3 \\ \alpha, \beta &: \text{材料によって決まる定数} \\ |\sigma_B| &: \text{降伏応力度または最大応力度} \end{aligned} \right\} (2.4)$$

このとき, 式(2.1)の $\{\partial f / \partial \sigma\}$ は

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} = \begin{Bmatrix} f_{,r} \\ f_{,z} \\ f_{,\theta} \\ f_{,rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\beta} \left[\alpha + \frac{\sigma_r'}{2\sqrt{J_2}} \right] \\ \frac{1}{\beta} \left[\alpha + \frac{\sigma_z'}{2\sqrt{J_2}} \right] \\ \frac{1}{\beta} \left[\alpha + \frac{\sigma_\theta'}{2\sqrt{J_2}} \right] \\ \frac{1}{\beta} \frac{\tau_{rz}}{\sqrt{J_2}} \end{Bmatrix} \dots (2.5)$$

$\sigma_r' = \sigma_r - J_1/3, \dots$: 偏差応力度

式(2.2), (2.5)を式(2.1)に代入すると $[D_p]$ は次式のようにになる。

$$[D_p] = \begin{bmatrix} D_1 - S_1^2/S & D_2 - S_2 S_1/S & D_3 - S_3 S_1/S & -S_4 S_1/S \\ D_2 - S_1 S_2/S & D_1 - S_2^2/S & D_4 - S_4 S_2/S & -S_3 S_2/S \\ D_3 - S_1 S_3/S & D_4 - S_2 S_3/S & D_1 - S_3^2/S & -S_4 S_3/S \\ -S_1 S_4/S & -S_2 S_4/S & -S_3 S_4/S & D_3 - S_4^2/S \end{bmatrix} \dots (2.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに } S_1 &= D_1 f_{,r} + D_2 f_{,z} + D_3 f_{,\theta} \\ S_2 &= D_2 f_{,r} + D_1 f_{,z} + D_2 f_{,\theta} \\ S_3 &= D_2 f_{,r} + D_2 f_{,z} + D_1 f_{,\theta} \\ S_4 &= D_3 f_{,rz} \\ S &= g + S_1 f_{,r} + S_2 f_{,z} + S_3 f_{,\theta} + S_4 f_{,rz} \\ g &= \{\sigma\} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \frac{H'}{f} = H' \end{aligned} \right\} \dots (2.7)$$

H' : 材料のひずみ硬化係数
式(2.6)が塑性要素の応力とひずみの関係である。

②ひびわれ破壊している要素の応力とひずみの関係を求める。ひびわれ破壊している要素は直交異方性体として扱う。ひびわれは半径方向のひびわれ (Radial crack) と円周方向のひびわれ (Circumferential crack)

の2種類合計3本存在する。

異方性の主軸方向に局所座標系をとり、座標変換マトリックス $[T_\varepsilon]$ を用いると、基準座標系に対する応力とひずみの関係は次のようになる。

$$\{\sigma\} = [T_\varepsilon]^T [D_0] [T_\varepsilon] \{\varepsilon\} \quad (2.8)$$

$[D_0]$: 局所座標系における応力-ひずみ関係で、ひびわれが1本するとき2軸状態、2本するとき1軸状態、3本するとき零となる。

3.1.2. 要素の剛性 三角形リンク要素の剛性方程式は単位ラジアンにつき次式で与えられる。

$$\begin{aligned} [F] &= \int \int [N]^T [D] [N] r dr dz \{\delta\} \\ &= [K] \{\delta\} \quad (2.9) \end{aligned}$$

$$\{F\} = \{r_i f_{ri}, r_i f_{zi}, r_j f_{rj}, r_j f_{zj}, r_k f_{rk}, r_k f_{zk}\}^T$$

$$\{\delta\} = \{\delta_{ri}, \delta_{zi}, \delta_{rj}, \delta_{zj}, \delta_{rk}, \delta_{zk}\}^T$$

式(2.9)の積分は数値積分しても、厳密解によっても行うことができる。

3.1.3. 塑性要素の除荷問題 塑性要素の除荷の判定は、ひびわれがないかまたは1本ある要素については Reuss の式 $(d\varepsilon_{ij}^p / \sigma_{ij}^p = d\lambda)$ の比例定数 $d\lambda$ によって判定し、ひびわれが2本発生している要素については、両ひびわれに平行な方向のひずみ増分 $(d\varepsilon)$ によって判定すればよい。

3.1.4. ひびわれ破壊する要素の等価節点力と残留応力度の計算 要素の等価節点力と応力度の関係は次式になる。

$$\begin{aligned} \{f\} &= \bar{r} A [N]^T \{\sigma\} \quad (2.10) \\ \bar{r} &= (r_i + r_j + r_k) / 3 \end{aligned}$$

上式より、ひびわれ直前の応力度 $\{\sigma\}$ を使って3節点に解放すべき等価節点力と解放直後の残留応力度 $\{\sigma_r\}$ が計算できる。その結果を示すと、

①円周方向のひびわれが生じる時

$$\{f\} = \bar{r} A [N]^T [T_\sigma]^{-1} [T_\sigma \phi] \{\sigma\} \quad (2.11)$$

$$\{\sigma_r\} = ([I] - [T_\sigma]^{-1} [T_\sigma \phi]) \{\sigma\} \quad (2.12)$$

A : 要素の断面積

$[T_\sigma]$: 座標変換マトリックス

$[T_\sigma \phi]$: $[T_\sigma]$ の2, 3行と3列を零にしたもの

②半径方向にひびわれが生じる時

$$\{f\} = \bar{r} A [N]^T \{0, 0, \sigma_\theta, 0\}^T \quad (2.13)$$

$$\{\sigma_r\} = \{\sigma_r, \sigma_z, 0, \sigma_{rz}\}^T \quad (2.14)$$

3.2. 補剛材の解析

3.2.1. r-z 面内の線要素 (Bar element)

①剛性方程式は次式になる

$$\{f\} = [K] \{\delta\} \quad (2.15)$$

$$\{\delta\} = \{u_i, v_i, u_j, v_j\}^T$$

$$\{f\} =$$

$$\{r_i f_{ri}, r_i f_{zi}, r_j f_{rj}, r_j f_{zj}\}^T$$

$$[K] = \frac{EA}{l} [T] \quad (2.16)$$

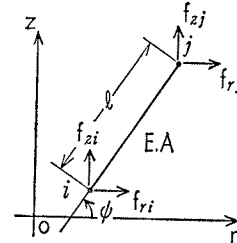


Fig.-2.2 Bar Element

A : 単位ラジアン当りの断面積

$$l = \sqrt{(r_i - r_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$$

$[T]$: 基準座標系に対する変換マトリックス

②除荷判定 塑性要素についてのみ行えばよい。

線材の全ひずみ (ε) とひずみ増分 $(d\varepsilon)$ はそれぞれ

$$\varepsilon = \{(U_i - U_j)\lambda + (v_i - v_j)\mu\} / l \quad (2.17)$$

$$d\varepsilon = \{(du_i - du_j)\lambda + (dv_i - dv_j)\mu\} / l \quad (2.18)$$

となる。従って

$$\begin{aligned} \varepsilon \cdot d\varepsilon \geq 0 & \text{ ならば引き続き塑性} \\ \varepsilon \cdot d\varepsilon < 0 & \text{ 除荷が発生} \end{aligned} \quad (2.16)$$

として判定を行う。

3.2.2. 円周方向の線要素 (Hoop element)

①線材の軸力 P_θ と外力 f_{ri} の釣合は

$$P_\theta = f_{ri} \cdot r_i \quad (2.20)$$

線材 r 方向変位 u_i と節点力 f_{ri} の関係は

$$u_i = \varepsilon \cdot r_i = \frac{f_{ri} \cdot r_i^2}{EA} \quad (2.21)$$

従って変位と節点力の関係式 $r_i f_{ri} = K u_i$ (2.22)

に式(2.21)を代入して剛性(K)を求めると次式になる。

$$K = \frac{EA}{r_i} \quad (2.23)$$

但し、E : 弾性時に E_0 、塑性時には E_{ST} になる。

②除荷判定は塑性要素についてのみ行う。全ひずみ

(ε) とひずみ増分 (dε) はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= u_i/r_i \\ d\varepsilon &= du_i/dr_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.24)$$

となり、これも式 (2.19) と同様に行なえばよい。

3.2.3. 面要素 (Plate element) 線分 ij を z 軸まわりに回転してできる要素であり、応力度は ij 方向と円周方向に存在し、せん断応力は存在しない。

剛性方程式は

$$\{F\} = [K] \{\delta\} \dots (2.25)$$

ここに

$$\{F\} = \{r_i f_{r_i}, r_i f_{z_i}, r_j f_{r_j}, r_j f_{z_j}\}^T$$

$$\{\delta\} = \{u_i, v_i, u_j, v_j\}^T$$

$$[K] = \iint [N]^T [D] [N] r dr dz$$

$$\approx r_0 t [N]^T [D] [N] \dots\dots\dots (2.26)$$

$r_0 = (r_i + r_j)/2$, t : 板厚である。

降伏判定は Mises の式を用い、除荷判定は 3.1.3 と同様に Reuss の式によって行う。

3.3. 不安定問題について

3.1, 3.2 節の解法により R. C. 回転体の解析は可能であるが、構造物の破壊が進むにつれて数値計算上の不安定現象が起り、計算途中で解析不能になる。これはある節点に接続する要素が全て破壊してその節点が不安定な状態になるためであろうと思われる。

そしてこれら一部節点の不安定により全体の剛性マトリックスが不安定なものとなる。それゆえ、構造物が崩壊に達するまでの解析を行うために、ここでは不安定現象を吸収するという意味で、系全体に無限に弾性な剛性を持つネットを加えて解析する。このネット剛性は系の初期弾性剛性の 1/500 倍の大きさにしている。この方法により、系全体としては崩壊したとみなせるまでは安定な状態を保つことができる。

4. 解析モデル

本解析法による計算例として PCRV-Single Cavity の解析を行う。Table-2.1 に構造体を構成する各種材料の有限要素モデル化を示す。Table-2.2 に解析に用いた材料の力学的性質を示し、Fig.-2.5 に PCRV の解析モデルを図示する。試験体の対称性を考慮して 1/4 の領域について解析すればよい。

NONLINEAR ANALYSIS OF PCRV BY THE FINITE ELEMENT METHOD
FINITE ELEMENT IDEALIZATION

1. Axi-symmetrical Structure
2. Concrete : Triangular linkage element
Steel bar (R-Z plane) : Bar element
Steel hoop (Circumferential plane) : Hoop element
Steel liner : Plate element
Bond : Perfect bond
3. Cracked element : Orthogonal anisotropy
4. Failure criteria of concrete :
Prager and Druker's equation
5. Analytical procedure : Tangent Modulus Method
Incremental Load Method

Table-2.1 Finite Element Idealization

CONCRETE	-0.455 ton/cm ²	COMPRESSIVE STRENGTH (σ_{cr})
	-0.300 "	YIELD STRENGTH (σ_y)
	0.035 "	TENSILE STRENGTH (σ_T)
	315. ton/cm ²	YOUNG'S MODULUS (E_1)
	150. "	PLASTIC MODULUS (E_2)
	-0.003 "	ULTIMATE STRAIN (ε_{cr})
	0.167 "	POISSON'S RATIO (ν)
STEEL		
HOOP ELEMENT	2070. "	σ_r
	20. "	E_1
BAR ELEMENT		E_2
	12.7 ton/cm ²	ELEMENT NO.1~66
	2000. "	σ_r
	20. "	E_1
		E_2
		ELEMENT NO.67~154
	2.4 ton/cm ²	σ_r
	2000. "	E_1
	20. "	E_2
PLATE ELEMENT	2.8 ton/cm ²	σ_r
(LINER)	2100. "	E_1
	21. "	E_2
	0.3	ν

Table-2.2 Material Properties

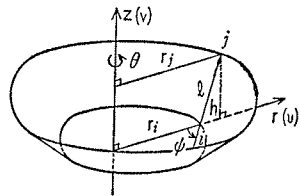


Fig.-2.4 Plate Element

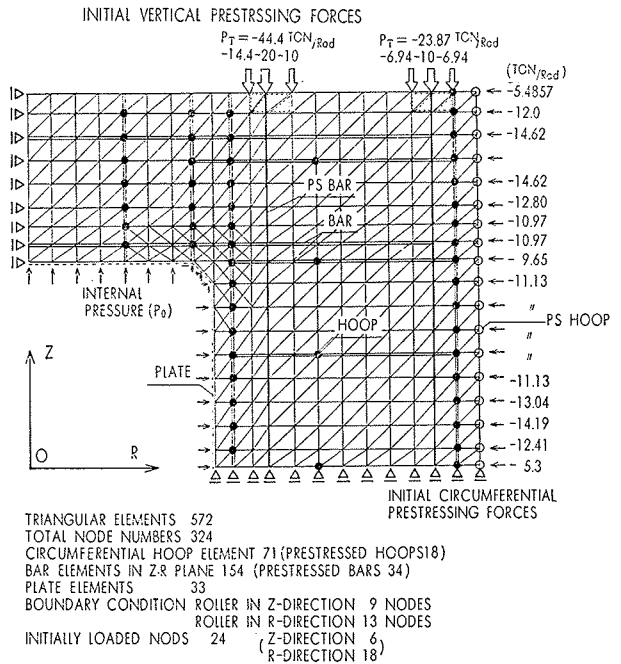


Fig.-2.5 Analytical Idealization of PCRV-Single Cavity

5. 解析結果

Fig.-2.6 に特定内圧時における変形状を图示し、Fig.-2.7 にコンクリートのひびわれ破壊進行状態を示す。Fig.-2.8 に断面の応力度(σ_r , σ_z , σ_θ , τ_{rz}) 分布性を各内圧時について調べたものである。

6. むすび

R. C. 軸対称回転体の弾塑性挙動を求めるための有

限要素法による一解析法を導いた。PCRVRを解析した結果、コンクリートの破壊過程、変形性状や断面の応力度分布、補剛材のひずみ分布その他の弾塑性挙動を詳細に解析できた。実験結果との比較考察と、本解析の妥当性の検討については本所報中 PCRVR 構造物に関する研究 (1-1 PCRVR 内圧実験) の項で述べている。

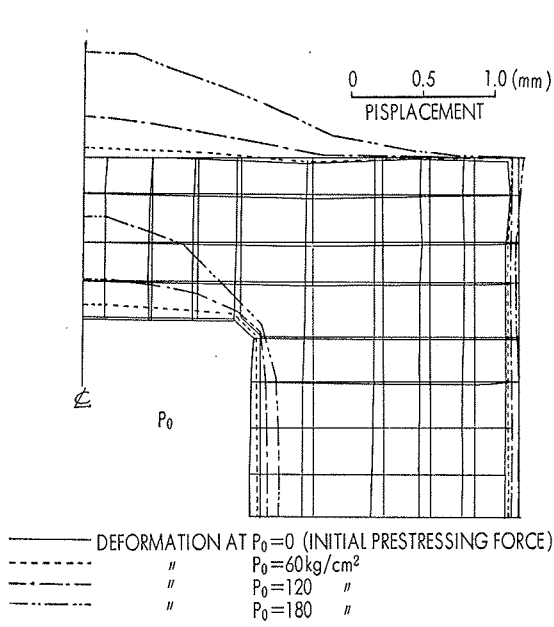


Fig.-2.6 Load-Deflection Curve

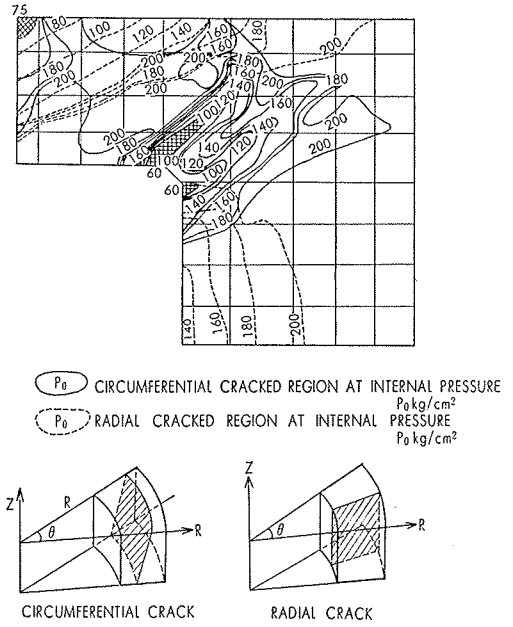


Fig.-2.7 Crack Propagation at Several Load Level

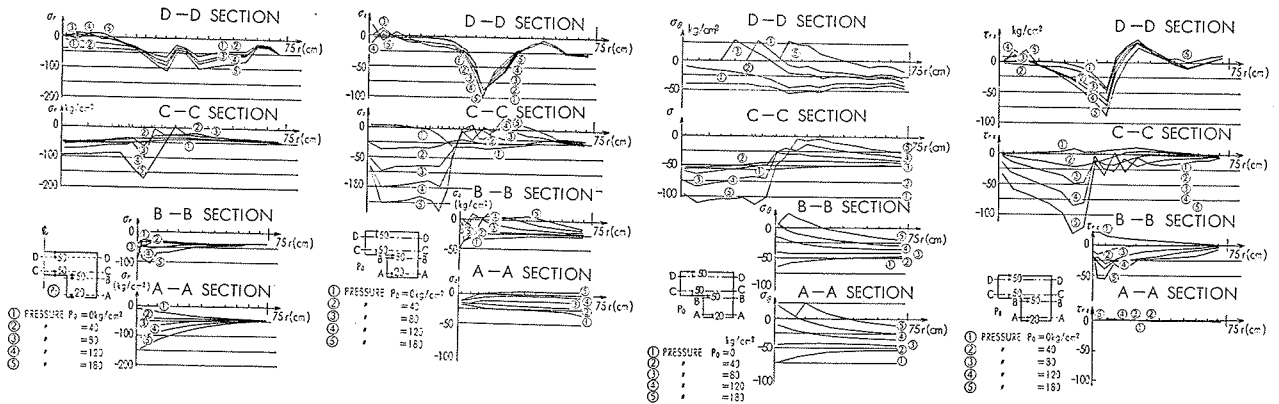


Fig.-2.8 Stress Distributions (σ_r , σ_z , σ_θ , τ_{rz})

(その 3)——柱——はり部材の復元力特性——

1. 序

鉄筋コンクリート連続体構造物の非線形挙動は非常に複雑であり、その挙動を正確に把握するための解析法はまだ確立されていない。

しかし、ここ数年来有限要素法 (FEM) を用いて鉄筋コンクリート (R. C.) 部材の弾塑性挙動を解析的に求めるための研究が盛んに行われている。その結果、コンクリートの破壊性状、付着応力、鉄筋のダボ効果……、等多くの問題点を残されてはいるものの、ある程度の精度でもって R. C. 部材の非線形挙動を解析できるようになってきた。

また、地震の際に構造物は繰返しの外力を受けるが、この繰返し外力に対して十分安全であることが要求される。繰返し外力を受ける連続体の弾塑性挙動は複雑なため、この問題に関する R. C. 研究はほとんどなされていない。

従って、本研究は、前報告 (その 1) の解析を基礎にして、繰返し外力を受ける R. C. 連続体構造物の履歴性状、破壊過程と破壊に伴う剛性低下の割合、エネルギー吸収の大きさ、内部応力の流れ、鉄筋のひずみ履歴……等、復元力特性の弾塑性解析の確立せんがために行うものである。

一本報告 (その 1) の中で FEM による 2 次元 R. C. 柱—はり部材の弾塑性解析について検討した結果、大胆な仮定にもかかわらずこの解析により R. C. 部材の塑性挙動をある程度解析できることが分った。

さらにこの解析に新しい仮定を設け、同時に修正、拡張することによって、繰返し外力を受ける R. C. 部材の復元力特性の解析が進められると判断し、第 2 段階として、まず 2 次元柱—はり部材の復元力特性を求めるための弾塑性解析を試みた。本報告は、この解析の仮定と解析法について述べ、解析が妥当なものであるかを実験結果と比較検討している。また、一般的な R. C. 連続体構造物に対する本解析の適用性については次の機会に報告する予定である。

2. 有限要素法による解析

今回も前報告 (その 1, その 2) と同様の仮定を下記のように設ける。

対象を 2 次元平面応力場の問題とし、構造物の幾向学的非線形性、コンクリートの Creep, Shrinkage 等、時間に関するもの、ひびわれ面の骨材の摩擦などは考慮しないが、ひびわれ破壊、圧縮破壊時に生ずるひず

みエネルギーの解放問題、鉄筋とコンクリートの材料的非線形性、ひびわれ面が閉じることによる剛性回復等を考慮している。またコンクリートは三角形要素、鉄筋は軸力のみを負担する線要素とし、いずれも要素内一定ひずみ分布を仮定している。さらにコンクリートと鉄筋の付着は完全付着を仮定し、コンクリートと鉄筋間の滑りはないものとする。

鉄筋の応力ひずみ関係を Fig.-3.1 に示すような Bilinear 型とする。コンクリートの一軸応力—ひずみ関係 (図—1) は 5 本の直線で近似されるものとする。この応力—ひずみ関係は 2 軸応力状態のときの相当応力度と相当ひずみの関係に等しいと仮定する。

塑性要素に除荷が発生する時、初期剛性 (E_1) に平行に除荷され、過去にひびわれ破壊していなければ引張応力度 (σ_{cr}) まで弾性、ひびわれ破壊が生じていれば引張応力度は生ぜずひびわれ面が再び開くものとする。

相当ひずみ ($\bar{\epsilon}$) が限界ひずみ (ϵ_{cr}) より大きくなったとき要素は圧壊し、以後負剛性 (E_4) に沿って各荷重ステップごとに段階的にひずみエネルギーを解放する。

前報告では圧壊要素の除荷を考慮していなかったが、今回の報告では圧壊要素も Fig.-3.1 のように初期弾性剛性 (E_1) に平行に除荷されるものとした。

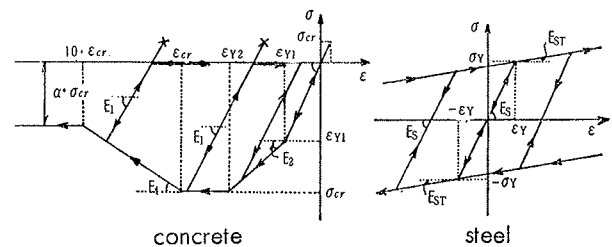


Fig.-3.1 Uniaxial Stress-Strain Relation of Materials

2.1. コンクリートの応力—ひずみマトリックス

本報告 (その 2) の軸対称回転体に対する応力—ひずみ関係の誘導式を 2 次元平面応力問題に適用すればよく、ひびわれ破壊していない要素について結果のみを以下に示す。

弾性時には

$$[De] = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 & 0 \\ D_2 & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3.1)$$

$$D_1 = E / (1 - \nu^2), \quad D_2 = \nu D_1, \quad D_3 = E / 2 / (1 + \nu)$$

となり、塑性時には

$$[D_P] = \begin{pmatrix} D_1 - S_1^2/S & D_2 - S_1S_2/S & -S_1S_3/S \\ D_2 - S_1S_2/S & D_1 - S_2^2/S & -S_2S_3/S \\ -S_1S_3/S & -S_2S_3/S & -S_3^2/S \end{pmatrix} \dots (3.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに } S_1 &= D_1f_{,x} + D_2f_{,y} \\ S_2 &= D_2f_{,x} + D_1f_{,y} \\ S_3 &= D_3f_{,xy} \\ S &= H' + S_1f_{,x} + S_2f_{,y} + S_3f_{,xy} \\ f_{,x} &= (\alpha + \sigma_x' / 2 / \sqrt{J_2}) / \beta \\ f_{,y} &= (\alpha + \sigma_y' / 2 / \sqrt{J_2}) / \beta \\ f_{,xy} &= \tau_{xy} / \sqrt{J_2} / \beta \\ J_2 &= (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2) / 3 \\ \alpha, \beta &: \text{材料によってきまる定数} \\ H' &: \text{材料のひずみ硬化係数} \\ \sigma_x', \sigma_y' &: \text{偏差応力度} \end{aligned} \right\} \dots (3.3)$$

となる。

2.2. 塑性要素の除荷問題

過去にひびわれ破壊していない要素とひびわれ破壊していてもそのひびわれ面が閉じている要素の除荷判定には Ruess の判定条件を用い、ひびわれ面が開いている要素についてはひびわれ方向のひずみ増分 (dε) によって行う。

Table-3.1 は降伏要素と圧壊要素の応力増分前・後の移動可能な状態を表にしたものである。この表では、例えば現在弾性状態の要素は応力増分後に、過去の経験により、表に示される状態へと移動可能という意味である。圧壊状態は相当ひずみ (ε̄) が ε_{cr} に達しており、みかけ上負剛性を持つ状態を云い、崩壊状態は相当ひずみが 10・ε_{cr} に達しており剛性は零の状態をいう。

増分前の降伏状態	状態領域過去の経験	1 弾性				2 第1降伏	3 第2降伏	4 圧壊 (剛性ゼロ)	5 崩壊 (剛性ゼロ)
		1	2	3	4				
増分後の新状態番号		1,2	1,2	1,3	1,4	1,2,3	1,3,4	1,4,5	5

Table-3.1 Movement of Yielding and Failure

2.3. ひびわれ破壊について

コンクリートが繰返し外力を受けるとき、ひびわれ面は外力によって開閉を繰返す。そのため、ひびわれ面に直角な方向のひずみ解析を厳密に行わなければならない。

ひびわれは主応力度 (σ₁) が引張応力度 (σ_{CT}) 以上になったとき発生するものとし、ひびわれ面が開いているか閉じているかの判定はひびわれに直角な方向のひずみはその方向の過去の塑性ひずみより大きければ開いており、小さければ閉じるものとしている。閉じた時、ひびわれに直角方向の剛性は回復するものと仮定している。

ひびわれ面に平行及び直角な方向の塑性ひずみ {ε_{θLP}, ε_{θP}} は次のようにして求める。

いま荷重増分 (ΔP_n) が負荷されたとき、塑性要素に生ずるひずみ増分 {dε_{xP}, dε_{yP}, dε_{xyP}} は

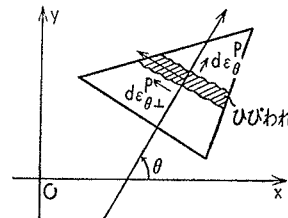
$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_{xP} &= d\varepsilon_x - (d\sigma_x - \nu d\sigma_y) / E \\ d\varepsilon_{yP} &= d\varepsilon_y - (d\sigma_y - \nu d\sigma_x) / E \\ d\varepsilon_{xyP} &= d\varepsilon_{xy} - d\tau_{xy} / 2G \end{aligned} \right\} \dots (3.4)$$

ここに dε_x, dε_y, dε_{xy} : ΔP_n によるひずみ増分
dσ_x, dσ_y, dτ_{xy} : ΔP_n による応力度増分で与えられる。このとき、ひびわれ方向の塑性ひずみ増分 (dε_{θLP}) と直角方向の塑性ひずみ増分 (dε_{θP}) はそれぞれ次のようになる。

$$d\varepsilon_{\theta P} = d\varepsilon_{xP} \cos^2 \theta + d\varepsilon_{yP} \sin^2 \theta + d\varepsilon_{xyP} \cos \theta \sin \theta \dots (3.5)$$

$$d\varepsilon_{\theta LP} = d\varepsilon_{xP} \sin^2 \theta + d\varepsilon_{yP} \cos^2 \theta - d\varepsilon_{xyP} \cos \theta \sin \theta \dots (3.6)$$

θ : ひびわれ面に直角な方向と軸とのなす角
それゆえ、ひびわれ面に
関する全塑性ひずみは



$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\theta P} &= \sum^n d\varepsilon_{\theta P} \\ \varepsilon_{\theta LP} &= \sum^n d\varepsilon_{\theta LP} \end{aligned} \right\} (3.7)$$

Fig.-3.2 Plastic Strain at the Crack Surface
となる。
またひびわれ面に直角方向の全ひずみ ε₁ はその荷重時における節点変位 {δ} と座標係数マトリックス [N] により

$$\varepsilon_1 = [\cos^2 \theta, \sin^2 \theta, \cos \theta \sin \theta] [N] \{\delta\} \dots (3.8)$$

によって求められる。従ってひびわれ面のひずみ ε₁ が式 (3.7) の ε_{θP} との間に

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 \geq \varepsilon_{\theta P} & \text{ならばひびわれ面は閉じている} \\ \varepsilon_1 < \varepsilon_{\theta P} & \text{ならばひびわれ面は開いている。} \end{aligned} \right\}$$

..... (3.9)

式(3.9)の判定をすべてのひびわれ要素について行い、ひびわれ面の開閉を調べる。

荷重増分{ΔP}を負荷した際、コンクリート要素の応力増分前・後に発生するひびわれ破壊の移動可能な状態を分類して Table-3.2 に示す。

なお、ひびわれが2本入っても閉じれば剛性回復するものとしている。

2.4. その他の解析について

解析のうち、三角形要素の剛性マトリックス、ひびわれ要素の異方性応力-ひずみマトリックス、ひびわれ時及び圧壊要素の等価節点力と残留応力度の解析、除荷問題の詳細、構造体の局部的不安定現象、さらに鉄筋要素の解析、計算手順などについては本報告(その1, その2)と同様であるから、詳しくはそれを参照されたい。

3. 解析モデル

解析対象として Fig.-3.3 に示す試験体を選んだ。

試験体はせん断スパン比2.33, 引張鉄筋比2%, せん断補強筋比0.5%の曲げせん断破壊型で、定軸圧縮応力度(56 kg/cm²)を受ける柱-はり部材が繰返し載荷されるものである。

これは前報(その1)の0.5A56 試験体と同じであり、この試験体を Fig.-3.4 のような解析モデルに置換する。

材料試験の結果、諸性質を次のように仮定する。

コンクリート : $E_1=186\text{Ton/cm}^2$, $E_2=67.7\text{Ton/cm}^2$,
 $E_3=-8.0\text{Ton/cm}^2$, $\nu=0.167$
 $\sigma_{CT}=16.4\text{kg/cm}^2$, $\sigma_{Y1}=-134\text{kg/cm}^2$,
 $\sigma_{cr}=-201\text{kg/cm}^2$, $\epsilon_{cr}=-0.00234$

鉄筋 : $E_S=2030\text{Ton/cm}^2$, $E_{ST}=19.6\text{Ton/cm}^2$, $\sigma_Y=3.5\text{Ton/cm}^2$

解析はモデルの部材角(R)が $R=1/200$ で1サイクル, $R=1/100$ で1サイクル, $R=1/70$ で半サイクルについて行う。

各サイクルの荷重除荷は部材中央の変位量によって制御する。

各サイクルで外力が零になったときに境界条件, 外力条件を Fig.-3.4 のように変化させて進める。荷重増分はすべて±2Ton とし, 各荷重レベルで破壊が止るまで収束計算を行う。

使用した計算機は IBM360/195 で, 計算時間は CPU 40分であった。

4. 解析結果

Fig.-3.5 にはり中央部の荷重-変位曲線を実験値と

増分前のひびわれ状態	状態番号 剛性 過去の経験	⊕	⊖	⊙	⊚	⊛	⊜	⊝
		等方 無	異方 1本	ゼロ 2本	等方 1本	異方 2本	等方 2本	ゼロ
増分後のひびわれ状態		⊕⊖	⊕⊙	⊙⊖	⊖⊚	⊚⊛	⊛⊜	⊜⊝

Table-3.2 Movement of Crack Pattern after Load Increment

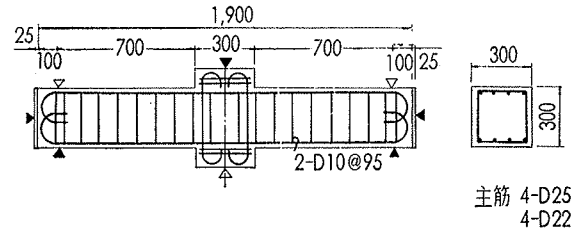


Fig.-3.3 Test Specimen

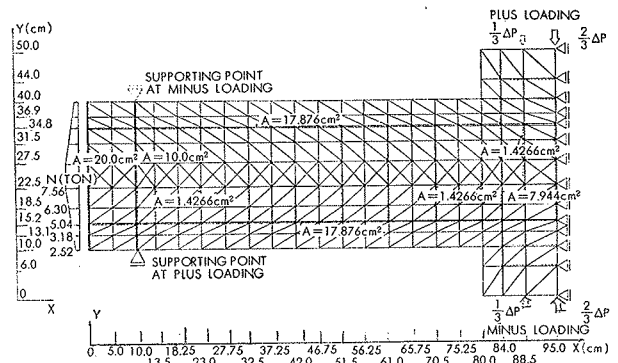


Fig.-3.4 Finite Element Idealization

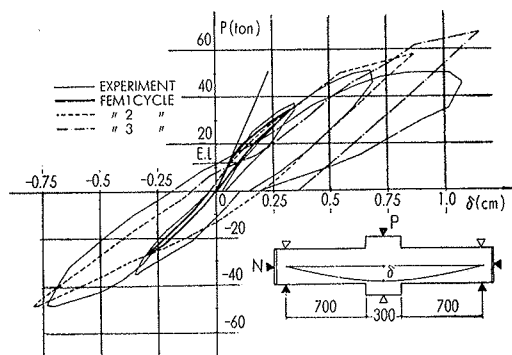


Fig.-3.5 Load-Deflection Curve

比較して示す。図中の細線が実験値である。第1サイクル正荷重時の初期剛性は実験値と解析値はほとんど一致している。弾性限界点の荷重は実験値, 解析値ともに12.0Tonであった。荷重が20Ton以上第1サイクルの最大荷重に達するまでは, 解析値の方が実験値より若干変位量が大きくなっている。第2サイクル正荷

重時のときも両者はよく一致しており、最大荷重に達する直前で引張鉄筋ははじめて降伏したため剛性は急に低下している。負荷重時のとき解析値の方が少し低い耐力になっている。第3サイクルにおいては、昇り勾配は一致しているが、最大荷重はかなり大きくなっており、下り勾配は実験値よりかなり急に戻っている。これは試験体の破壊がかなり進み、解析がこの破壊メカニズムを忠実につかめなかったものと思われる。

全体としては、第1, 2サイクルでは剛性変化の割合や最大荷重はほぼ一致しているが、第3サイクルでは解析値の最大耐力が約3割大きくなっており、下り勾配も解析値の方がかなり大きくなっている。

Fig.-3.6, Fig.-3.7 に主筋の荷重—ひずみ曲線を示す。図中の点はe関数法によって求められた値を併せてプロットした。Fig.-3.6は実験値と解析値ともに同一測定点のひずみを比較し、Fig.-3.7は実験値がFig.-3.6と同じもので、解析値はFig.-3.6の隣接鉄筋位置のひずみ履歴を图示したものである。両図の鉄筋のひずみ形態が隣接要素間でどのようになっているかを比較するために示す。両図より、各サイクルともに実験値と解析値はほぼ同じような性状を示しているが、実験と解析の破壊形態が若干異なることにより、鉄筋のひずみ分布の形状がかなり影響を受けているものと推測される。しかし、主筋のひずみ履歴曲線は実験値の性状をよく握っていると見える。

Fig.-3.8に部材断面A-A上のコンクリート材軸方向のひずみ分布を特定荷重について图示する。

図中、各サイクルともにひずみ分布がかなり乱れている。これはコンクリートのひびわれ、降伏、圧壊等が生じている要素のひずみを正確に解析上求めることが難しいことを示しているとともに、コンクリートのひずみそのものの大きさが実験的にも求められていないためでもある。さらにコンクリートの剝落による断面欠損を解析上うまく評価していないために生じたものと思われる。

5. まとめ

有限要素法による2次元R. C. 部材の弾塑性復元力特性の解析法と解析結果の考察を述べてきたが、全体的にはほぼ満足すべき結果が得られ、本解析の長所短所を認識でき、これからの研究に対する指針が得られた。

例えば、繰返し回数が多くなるにつれて耐力が実験値より大きくなったり、剛性低下の割合があまり変わらない事とか、主筋のひずみ曲線が実験値に合わない部分が生じているが、これらの原因として次の事柄が考

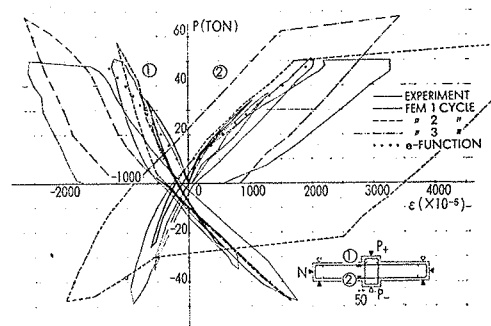


Fig.-3.6 Load-Strain Curve of Reinforcement

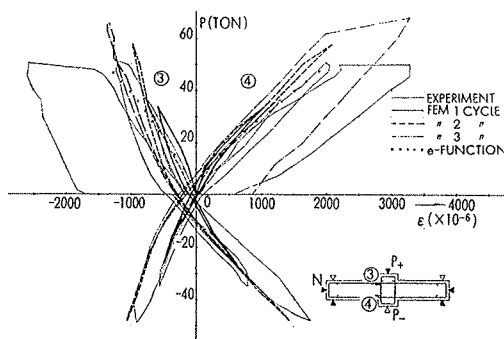


Fig.-3.7 Load-Strain Curve of Reinforcement

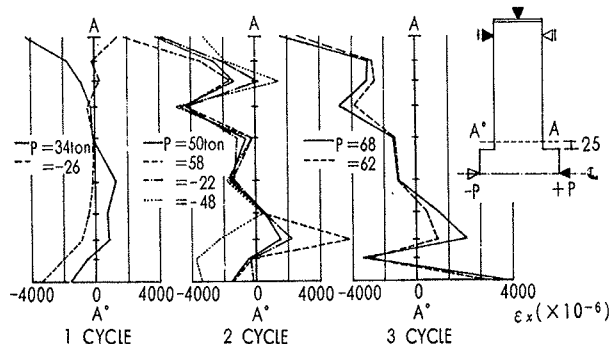


Fig.-3.8 Strain Distribution of A-A Section

えられる。

(1) 塑性要素が除荷されるときに剛性を初期塑性剛性に一致させたこと。実際には除荷時の塑性ひずみが大きい程、戻りの剛性は小さくなって行くものである。

この影響は今回の解析には考慮していない。

(2) コンクリートの圧壊後の応力—ひずみ関係をゆるやかな勾配の直線で近似したが、もっと急勾配ではないかと思う。また圧壊要素の除荷時にも弾性剛性に回復すると仮定したこと。

(3) コンクリートの圧壊後、崩壊に達するまでのひずみ領域が大きすぎたかも知れない。本解析では相当ひずみ(ε)が $10 \cdot \epsilon_{cr}$ 以上のとき崩壊すると仮定したが、解析結果より判断すると $5 \cdot \epsilon_{cr}$ ぐらいのところが必要ではないかと思う。

(4) ひびわれ面が閉じたとき弾性または塑性回復するとしていること。また繰返し外力を受けるとき部材の外縁コンクリートは剝離するが、解析上この断面欠損を考慮していない。

(5) 構造体の破壊がかなり進んだとき、解析上生ずる不安定現象を防ぐために無限に弾性的なネット剛性を全系に加えているが、このネットによるエネルギー吸収の大きさが分らない。従ってこの不安定現象をいかに取扱うかが大きな問題となる。

(6) 本解析に用いた有限要素の分割法が妥当であったかどうかの問題がある。連続的な破壊過程を追跡するためにはもっと細い分割を行う必要があるのではないか。

などの理由により、実際の破壊挙動を忠実に解析できなかつたものと思われる。

しかしながら、繰返し載荷される 2 次元 R. C. 部材の復元力特性の解析結果は実験値の性状に比較的一致しており実用上有用な結果が得られた。

本解析結果を基礎にして、上記問題点について妥当な仮定と解析法を確立するための研究を続けて行くつもりである。

参考文献

- 1) 武田, 井元: 有限要素法による R. C. 部材の弾塑性解析 (その 1. 柱一はり部材) 建築学会関東支部大会梗概集 昭和48年3月 (3. 1973)
- 2) 武田, 井元: FEM による R. C. 部材の弾塑性解析 (その 2. 柱一はり部材の復元力特性) 建築学会大会梗概集 昭和48年10月 (10. 1973)
- 3) 武田, 井元: 有限要素法による PCRV の弾塑性解析 建築学会大会梗概集 昭和48年10月
- 4) 山田嘉昭: 材料非線形問題解析法 東大生研講習会テキスト 昭和45年 (1970)
- 5) 山田嘉昭: 塑性力学 日刊工業新聞社
- 6) 黒正, 滝口: 有限要素法による鉄筋コンクリート

- 7) 武藤, 他: FEM による R. C. 部材の弾塑性解析 建築学会大会梗概集 昭和46年11月, 昭和47年10月 (1971, 1972)
- 8) 磯畑脩: 有限要素法によるコンクリート部材の 2 次元非線形解析 建築学会論文報告集 昭和46年11月 (1971)
- 9) 岩下恒雄: 鉄筋コンクリート造構造物の 2 次元弾塑性解析に対する一方法 建築学会論文報告集 昭和42年11月 (1967)
- 10) 武田, 吉岡: R C 部材のせん断補強に関する実験的研究 建築学会大会梗概集 昭和45年11月
- 11) A. H. Nilson: Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete by the Finite Element Method, Journal of A. C. I., Vol. 65, Sept., 1968, pp. 757-766
- 12) D. Ngo, H. A. Franklin, A. C. Scordelis: Finite Element Study of Reinforced Concrete Beams with Diagonal Tension Cracks, National Science Foundation NSF Grant GK-1809, 1970
- 13) D. Ngo, A. C. Scordelis: Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams, Journal of A. C. I., Vol. 64, No. 3, Mar., 1967, pp. 152-163
- 14) S. Valliappan, P. Nath: Tensile Crack Propagation in Reinforced Concrete Beams-Finite Element Technique, International Conference on Shear, Torsion and Bond in Reinforced and Prestressed Concrete, held in India, Janu. 1969
- 15) S. Valliappan, T. F. Doolam: Nonlinear Stress Analysis of Reinforced Concrete, Journal of Struc. Division Proc. of ASCE, ST4, April, 1972
- 16) O. C. Zienkiewicz: The Finite Element Method, McGraw-Hill Book (1968)
- 17) Timoshenko and Goodier: Theory of Elasticity, McGraw-Hill Book