

# 有限要素法による三次元浸透流・熱流などの解析

齋藤 二郎  
藤原 紀夫

## Three-Dimensional Finite Element Analysis of Seepage Flow, Heat Flow and Others

Jiro Saito  
Toshio Fujiwara

### Abstract

The solution of field problems, that is, seepage flow, heat flow, and so on, is governed by a quasi-harmonious differential equation. In a previous paper<sup>2)</sup>, solution of these problems by the finite element method, analyses of two-dimensional problems (including axially symmetric three-dimensional problems) for steady- and nonsteady-state cases were described. In this paper, analyses of three-dimensional problems are presented. The outline of finite element analysis, determination of stream line and the procedure of computer programming are described. As analyzed examples, three-dimensional seepage flow problems of rectangular cut-off at the seashore or at a large pond are shown.

### 概要

浸透流・熱流・渦無しの流れなどの問題は、場の問題 (Field problems) と呼ばれ、準調和微分方程式を解くことによって、その解が得られる。前報<sup>2)</sup>では、これらの問題を有限要素法で解く方法について、二次元問題 (軸対称三次元問題を含む) で、定常・非定常解析について述べた。本報告は、これの拡張で、三次元問題の解析方法について述べる。有限要素法による三次元場の問題解析における基礎理論の概要と流線の決定方法などについて述べ、また、電算プログラムの組立手順についても述べる。解析例として、海岸などでの長方形締切りにおける三次元浸透流問題について示す。

### 1. まえがき

著者らは、これまで、有限要素法解析を土木工事の実際の構造物に適用することを試みてきた<sup>2), 3), 4), 5)</sup>。

浸透流・熱流などの問題に関しては、前報<sup>2)</sup>において、二次元 (軸対称三次元を含む) 問題で、定常・非定常解析について示した。本報告はこれの拡張で、三次元問題の解析方法について述べる。

浸透流・熱流・渦無しの流れなどの問題は“場の問題”と呼ばれ、準調和微分方程式を支配方程式とする物理問題である。有限要素法によって、これらの問題を解く場合には、ある汎関数を、ある領域内で最小にする問題として公式化する。これらの基礎理論の概要と電算プログラムの組立て手順について述べ、解析例として、海岸・広い池などでの長方形締切り工事における三次元浸透流問題について示す。

### 2. 基礎理論

#### 2.1. 基礎方程式

場の問題を表わす三次元準調和微分方程式は次式で

示される。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + Q(x, y, z) = 0 \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 $\phi$  : 未知関数で水頭・温度など、 $k_x, k_y, k_z$ ; それぞれ  $x, y, z$  のある定まった既知関数で透水係数・熱伝導率など、 $Q$ ; 排 (給) 水量などを示す。

Euler の理論<sup>1)</sup>によれば、最小化を必要とする汎関数 ( $\chi$ ) は次式で示される。

$$\chi = \iiint \left[ \frac{1}{2} \left\{ k_x \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + k_y \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + k_z \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} - Q\phi \right] dx dy dz \dots \dots \dots (2)$$

次に、4面体要素に分割された領域を考える。ある要素を構成する節点番号を  $i, j, m, n$  とする。 $i, j, m, n$  の選び方は、任意の節点から見て、他の3節点が反時計廻りになるようにする。この要素内における未知関数  $\phi$  を、次式で定義する。

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \dots \dots \dots (3)$$

4つの定数  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  は  $(x, y, z)$  に節点座標を代入して得られる4つの連立方程式を解くことによって、簡単に求めることができる。この  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  を(3)式に代入すると、

$$\phi = [N_i \ N_j \ N_m \ N_n] \{\phi\}^e \dots \dots \dots (4)$$

ここに、サフィックス  $e$ ; 要素を意味する。

$N_i$ ;  $(a_i + b_i x + c_i y + d_i z) / 6V$ , など

$a_i$ ;  $x_j (y_m z_n - y_n z_m) + x_m (y_n z_j - y_j z_n) + x_n (y_j z_m - y_m z_j)$

$-b_i$ ;  $y_j (z_m - z_n) + y_m (z_n - z_j) + y_n (z_j - z_m)$

$c_i$ ;  $x_j (z_m - z_n) + x_m (z_n - z_j) + x_n (z_j - z_m)$

$-d_i$ ;  $x_j (y_m - y_n) + x_m (y_n - y_j) + x_n (y_j - y_m)$

$V$ ; 4面体要素の体積

(2)式を微分し、これに(4)式を代入すると、

$$\left\{ \frac{\partial \chi}{\partial \phi} \right\}^e = [h]^e \{\phi\}^e + \{F\}^e \dots \dots \dots (5)$$

ここに、 $h_{r,q}$ ;  $(k_x b_p b_q + k_y c_p c_q + k_z d_r d_q) / 36V$

$$\{F\}^e; -\frac{QV}{4} [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$$

(5)式は  $[h]^e$  を要素の剛性マトリックス、 $\{F\}^e$  を内部に分布する荷重と考えると、重ね合せによる構造方程式の組立てと、まったく同じになる。(5)式を全体の系についてまとめると、次のごとくなる。

$$[H]\{\phi\} + \{F\} = 0 \dots \dots \dots (6)$$

### 2.2. 6面体要素

上節で述べた4面体要素は、考え方が簡単であるが、実際の解析にこれを使用する場合、要素を構成する節点番号・節点座標などの入力データの作成や読み込みが繁雑となり、また、結果の整理も困難である。立体的な(三次元の)解析領域を分割するには、6面体要素(8節点)が最も便利で理解しやすいであろう。したがって、以下の解析では、4面体要素を重ね合せた8節点6面体要素を用いる。

6面体要素を4面体要素に分割する方法には、(図一1)に示すA、Bタイプの2通りの方法があり、これだけに限ることが簡単にわかる。

前述した剛性(浸透性)マトリックス  $[h]^e$ 、荷重ベクトル  $\{F\}^e$  および後述の勾配マトリックス  $[G]^e$  は、A、Bタイプの分割から求められるものの平均値を用いることにした。

ここでは、紙面の都合で述べることはできないが、Aタイプのみでの分割、Bタイプのみでの分割とこれらの平均値を用いる分割による3者を比較する計算を行なってみた。その結果、当然のことであるが、平均値を用いる方法は、他の2者に較べて、はるかに誤差が少ないことが判った。また、4面体分割だけを用いた場

合には、対称構造物においても、わずかではあるが非対称の答えを得た。

### 2.3. 流速・流量の求め方

(4)式を微分すると、次のような勾配マトリックスが求まる。

$$[G]^e = [G]^e \{\phi\}^e \dots \dots \dots (7)$$

ここに、

$$[G]^e = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_m & b_n \\ c_i & c_j & c_m & c_n \\ d_i & d_j & d_m & d_n \end{bmatrix}$$

8節点6面体要素の場合には、 $[G]^e$  を重ね合せて、次のような  $[G]^e$  を得ることができる。

$$[G]^e = \begin{bmatrix} b_i' & b_j' & b_m' & b_n' & b_o' & b_p' & b_q' & b_r' \\ c_i' & c_j' & c_m' & c_n' & c_o' & c_p' & c_q' & c_r' \\ d_i' & d_j' & d_m' & d_n' & d_o' & d_p' & d_q' & d_r' \end{bmatrix} \dots \dots \dots (8)$$

勾配マトリックスがわかれば、次式を用いて流速を計算することができる。

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \{Grad \phi\} \dots \dots \dots (9)$$

流量を求めるには、流量を計算する断面を定め、この断面の面積(A)に(9)式で求めた流速を乗ずればよい。

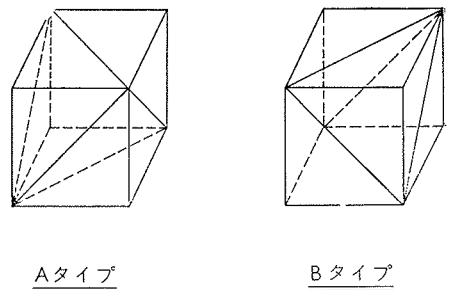
### 2.4. 流線の決定

流れの関数を  $\varphi$  とすると、流速  $(v_x, v_y, v_z)$  は次式で示される。

$$\begin{Bmatrix} v_x = \partial\varphi/\partial x \\ v_y = -\partial\varphi/\partial y \\ v_z = \partial\varphi/\partial z \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (10)$$

(9)式と(10)式から、次式を得る。

$$\begin{Bmatrix} \partial\phi/\partial x = -1/k_x \cdot \partial\varphi/\partial y \\ \partial\phi/\partial y = 1/k_y \cdot \partial\varphi/\partial x \\ \partial\phi/\partial z = -1/k_z \cdot \partial\varphi/\partial z \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (11)$$



図一1 6面体要素を5つの4面体要素に分割する方法

(1)式を(2)式に代入し、(2)式と比較すれば、ただちに理解されるように、 $k_x$ を $1/k_y$ 、 $k_y$ を $1/k_x$ 、 $k_z$ を $1/k_z$ に変換すれば、 $\phi$ の決定と同じプロセスによって、 $\psi$ を決定することができる。その場合、境界条件の取り方は、著者らの研究<sup>6)</sup>の中で示した電気アナログ法による流線の決定の場合と同じである。

2.5. フローチャート

(図-2)に電算プログラムのフローチャートを示す。解析に使用する要素の形状は8節点6面体であるので、(5)の“剛性”マトリックス [h]<sup>e</sup> と勾配マトリックス [G]<sup>e</sup> および(2)の荷重項 {F}<sup>e</sup> は、これを計算するサブルーチンの中で、5回の重ね合せを行なって、求めている。

有限要素法解析では、多元の連立方程式を能率よく処理しなければならない。このプログラムでは、“対角化分割法”を用いて、連立方程式の解法は“掃き出し法”を用いている<sup>1)</sup>。また、連立方程式は100元を限度として解いている。

電算機はIBM社のモデル195を使用した。この使用方法は、“RJE サービス”と呼ばれるもので、端末機2780を介して、モデル195を使用するものである。

3. 解析例

3.1. 解析モデル

解析モデルとして、広い池・海岸などでの長方形縮切りにおける三次元浸透流問題を考える。水平な不透水性基盤があり、その上に、厚さ20mの透水性地盤、さらにその上に、深さ10mの水があるとす。これに止水矢板を打ち込んで長方形に囲み、内部の水を排除した状態を想定する。矢板の根入れを10m、縮切り幅を20m、縮切りの長さを140mとする。また、地盤の透水係数は $k_x=k_y=k_z=1.7 \times 10^{-3} \text{m/sec}$ とする。

(図-3)はこの解析モデルを示しているが、このモデルの対称性を考慮して、全領域の1/4だけを示している。

この種の問題を取り扱う場合には、計算に先だって、まず、解析領域を決定しなければならない。ここでは、二次元解析の経験などから判断して、矢板の外側から透水層厚さの2倍の距離(40m)の所に、不透水面があるとす。

矢板の根入れ部分は、厚さ10cmで、その先端を頂点とする三角形の断面と仮定した。透水地盤の分割は、前述したように、8節点6面体要素を用い、一辺の長さが5mの立方体要素として、総節点数1299、要素数880とした。

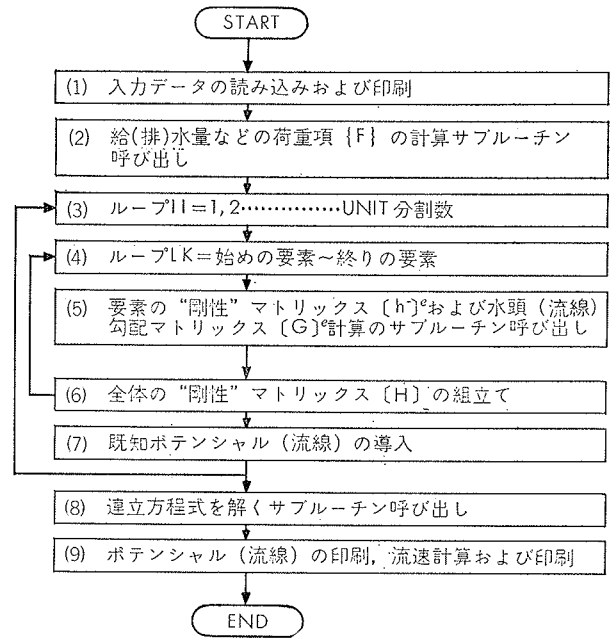


図-2 フローチャート

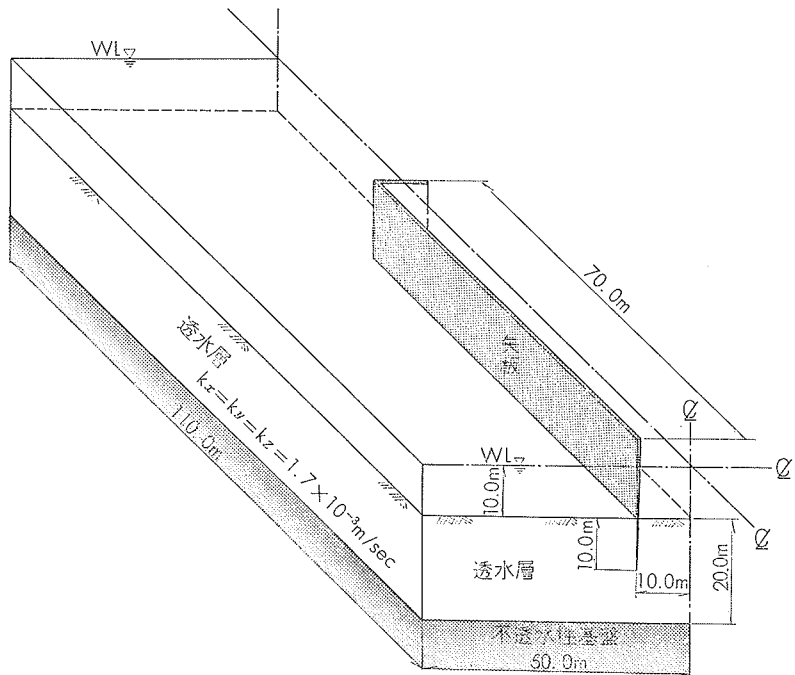


図-3 解析モデル (長方形縮切りの三次元浸透流)

### 3.2 解析結果

この解析で明らかにしようとしたものは、もちろん三次元の地下浸透水流についてであるが、具体的には①矢板のコーナー附近での水の流れ状態②縮切りの端部から長手方向にむかって、流れの状態がどのように変化するか③流量計算の値が他の理論値とどの程度一致するか、などである。

(図-4)に流線とポテンシャル(水頭)の計算値を流線網図に直して、立体視したものを示す。図中において、断面 ABCD での流線網は中央からごくわずかな長手方向にずれた断面のものを示している。断面 ABCD がまったく中央での断面を示すものであれば、水流の力のバランスの関係(対称であること)で、理論上、流線は存在しないことになる。

(図-5)は長手方向の単位長さ当りの流量が長手方向でどのように変化するかを示したものである。縮切り幅(B)と長手方向の長さ(L)の比(B/L)が $\frac{1}{4}$ を越えると、二次元流量にほぼ近くなるのが見られる。二次元流れになった時の流量(q)は $0.1549 \text{ (m}^3/\text{sec/m)}$ となっている。

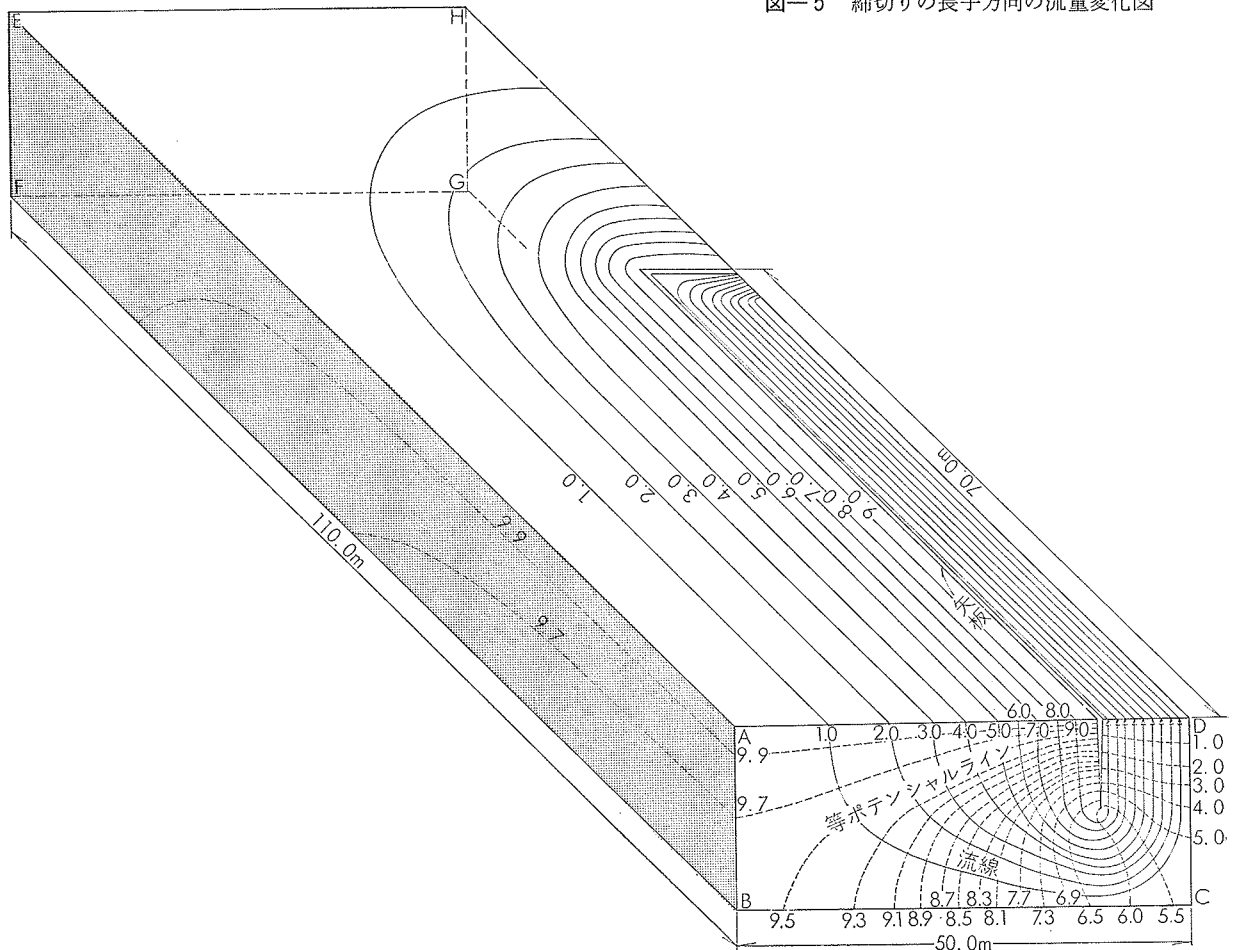


図-4 長方形縮切りの流線網図(立体視図)

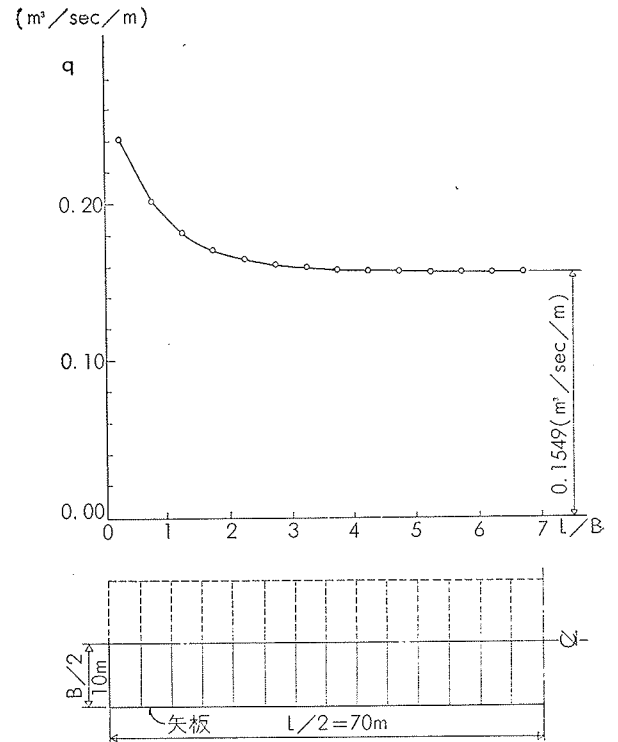


図-5 縮切りの長手方向の流量変化図

一方、流量の解析結果の妥当性を調べるために、マスカット (Muskat)<sup>6)</sup> が示した有限深さの矢板締切りの流量計算方法(二次元流)を用いて、理論流量(q')を計算してみる。

$$q' = 2 \cdot \alpha \cdot k \cdot H \cdot \frac{K'}{2K} \dots (12)$$

ここに、H; 水頭差, k; 地盤の透水係数, K, K'; ダ円関数,  $\alpha$ ; 断面性状による定数 (1.0 より小さい値)

$\alpha$ を理論的に求めること

は困難であるが、電気アナログ法を用いれば、容易にこれを求めることができる。ここでは、その詳細については省略するが、 $\alpha = 0.773$  の値を得た。

これらを(12)式に代入して、q' を求めると、0.1314 (m<sup>3</sup>/sec/m)となり、上述した解析値(q)とほぼ一致する。有限要素法による計算流量が約15%大きめの値となるのは、要素分割の荒さによるものであろう。

(図-6)に矢板の下を通過して流れ込む水流の流速方向図を示す。矢板の根入れ先端から下方2.5mの所の水平断面でのものを示している。コーナー付近では、中央部分よりもむしろ小さな流速で水が流れ込んでいるのが見られる。

ここでは紙面の都合で述べることができないが、締切りの長さを種々に変えた場合の解析も行なってみた。その結果、コーナー附近の水流は、締切りの長さにはほとんど影響されないことがわかった。

#### 4. むすび

有限要素法による場の問題の解析に関し、その基礎理論の概要を述べ、解析例として、三次元浸透流問題について述べた。熱流・渦無しの流れなどへの適用例については、前報<sup>2)</sup>において述べてあるので、これらを参照してもらいたい。ここに述べた解析例だけでは、有限要素法の威力を十分に示すことができなかったが、有限要素法は、これまで他の方法では解析することが困難であった複雑な境界をもつ問題や異方・異質地盤(材料)の場合に用いて、非常に有力な解析方法である。

演算時間について述べておくと、IBM社の電算機

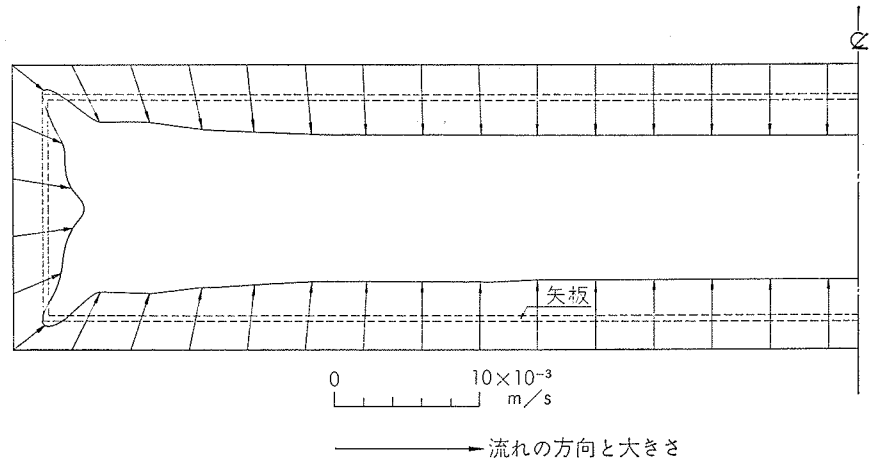


図-6 矢板下を通過して流れ込む水流の流速方向図(矢板先端下2.5m)

(モデル 195)を用いた場合、上述した解析例(節点数1299, 要素数 880)で、流線とポテンシャル分布を求めるのにそれぞれ、CPU-Time(実演算時間)にして92秒であった。

今後は、このプログラムを非定常問題に拡張したり、入力・出力の自動化をはかるなどの改良を加えるつもりである。

最後に、この研究の一部は、日大理工学部、最上・酒井両先生の御指導を受けていた加賀・方山両君の卒業論文として、実施してもらったものである。ここに記して、深く感謝の意を表します。

#### 参考文献

- 1) 吉識雅夫監訳・O・C ツィンキーヴィッツ/Y・K チューン著; マトリックス有限要素法, 培風館
- 2) 斎藤, 藤原; 有限要素法による浸透流・熱流などの解析(定常・非定常), 大林組技術研究所報, No. 7, 1973
- 3) 斎藤, 内藤, 藤原; 有限要素法によるシールド外周地盤の挙動解析(弾塑性), 大林組技術研究所報, No. 8, 1974
- 4) 斎藤, 内藤, 藤原; 有限要素法によるシールド外周地盤の挙動解析例, 土木学会第27回講演会, III-148.
- 5) 斎藤, 藤原; 流線網の求め方の実例とそれらの問題点, 土と基礎, August, 1973
- 6) M. Muskat; The flow of homogeneous fluids through porous media, McGraw-Hill 1946