

# 3次元連続体の非線形有限要素解析 (第1報)

—解析法—

井元 勝 慶  
武田 寿 一

## Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete by the Finite Element Method (Part 1)

Katsuyoshi Imoto  
Toshikazu Takeda

### Abstract

This report describes a method of finite element analysis for nonlinear behavior of three-dimensional composite structures such as prestressed concrete reactor vessels (PCRV).

In nonlinear analysis of a material, there are three basic aspects which have important effects upon the accuracy of the solution obtained: (1) constitutive modelling of material phenomena, (2) finite element modelling of the composite structure, and (3) numerical solution of the nonlinear problem. In this part, an analysis is carried out by setting up numerous mathematical models and assumptions.

### 概 要

本報告はプレストレスト コンクリート原子炉压力容器 (PCRV) のような3次元複合構造物の材料非線形挙動, 並びに終局耐力に至るまでの挙動を求めるための有限要素応力解析法を確立するために行なうものである。

材料非線形有限要素解析を行なう場合, 得られる解の精度に重要な影響を与える因子は3つある。すなわち, 各構成材料の非線形現象のモデル化, 有限要素のモデル化と数値計算手法である。ここでは, これらの点に対しての数学的モデル化と仮定を設けて, 合理的かつ現実的な解析にするための検討を行なう。

## 1. 序

プレストレスト コンクリート プレッシャー ベッセルズ(PCRV)は発電用原子炉として開発研究が進められている。PCRVは, その性格上, 稼動期間中に予想される地震や内圧などの異常時にかなり高度な安全性が要求される。それゆえ, 設計段階において崩壊機構に達するまでの非線形挙動が十分に把握されなければならない。しかし PCRV のような3次元連続体構造物はその形状と構成材料が複雑であり, このような構造物の非線形解析には他の構造物のように今までの理論的, 実験的経験による解析法は適用できない。

現状では, これら構造物の高度の非線形解析には有限要素法のような数値解析手法に頼らざるを得ない。

ここ数年来, 鉄筋コンクリート構造物の非線形挙動の解析に有限要素法を用いて行なう研究が数多くなされ, ある形状のコンクリート構造物に対してかなり精度のよい結果が得られている。

材料非線形有限要素解析を行なう場合, 得られる解の精度に大きな影響を与える因子は3つある。すなわ

ち, i) 塑性や圧縮破壊, ひびわれ破壊のような材料非線形現象のモデル化, ii) 複合構造物各構成要素の適切な有限要素へのモデル化, iii) 非線形問題の数値計算手法である。これらの問題点に関する解決法は十分に確立されておらずいろいろな説が提案されている。

本報告は, 筆者が行なった一連の研究<sup>1)</sup>を基にし, これらの問題点に対し若干の仮定を設けて, 鋼で補強された3次元コンクリート構造物の材料非線形挙動を求めるための一つの解析方法について述べるものである。

## 2. 解 析

本解析に用いる諸仮定を以下に示す。

- 1) コンクリートを引張側ではぜい性材料, 圧縮側では最大強度に至るまでを弾塑性モデル, 圧縮破壊(圧壊)後をぜい性と延性の中間的な軟化材料とみなす。
- 2) ひびわれ破壊は最大主応力度が引張強度に達した時発生するものとし, 以後, 異方性体とする。ひびわれ破壊は, 同じ箇所それぞれ3面まで発生し, 互いに直交するものとする。

- 3) 各計算レベルで、ひびわれ面に直交方向のひずみ成分よりひびわれ巾を求め、これによってひびわれ面の開閉を調べ、閉じていればその方向に剛性回復するものとする。
- 4) ひびわれ面のせん断剛性 ( $\mu G$ ) をひびわれ巾と強度、その他の関数として考慮する。
- 5) 圧縮側では、3軸応力下の降伏条件式に Prager-Druker の式を用い流れ理論に従う弾塑性モデルを仮定し、ひびわれ破壊している場合には、弾塑性モデルを2次元または1次元に低減する。
- 6) 塑性化している全ての要素に対し、スカラー関数の増分 ( $df$ ) によって、ひずみ除荷の判定を行なう。
- 7) 圧壊はスカラー関数 ( $f$ ) が最大強度に達した時に生じ、以後の挙動を限界ひずみに至るまで軟化材料として、内部ひずみエネルギーを徐々に解除する。
- 8) 各破壊や塑性化によって生ずる不釣合応力度を求めて、これを等価な節点力に変換して繰返し計算によって解除する方法を用いる。
- 9) 鋼はすべて Von Mises の降伏条件式に従い、破壊は生じないものとする。
- 10) 各破壊の判定は要素内の Gauss の積分点における応力とひずみによって行なう。

有限要素のモデルとして、構成要素を6面体要素、四辺形膜要素、線要素に置換し、それぞれの剛性方程式を仮想仕事の原理より導く。荷重増分法には接線剛性法と初期応答法の混合型を仮定して行なう。また、系の線形方程式の解法には大次元非線形有限要素解析のために開発された Wave Front 法を用いている。

2.1. 応力とひずみの関係

2.1.1. 弾塑性モデル 等質硬化を仮定した Reuss の流れ理論より導かれる3次元塑性応力-ひずみマトリックス  $[D^P]$  は次式のようになる。

$$[D^P] = [D^e] - \frac{[D^e] \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [D^e]}{H' + \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [D^e] \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}} \dots (1)$$

ここに、 $f$  は応力度  $\{\sigma\}$  のスカラー関数で、降伏条件式である。 $H'$  は材料のひずみ硬化係数、 $[D^e]$  は Hooke の法則による弾性応力-ひずみマトリックスで次式で定義される。

$$[D^e] = [D^e_{ij}] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1-2\nu & 0 & 0 \\ \text{対称} & & & & 1-2\nu & 0 \\ & & & & & 1-2\nu \end{pmatrix} \dots (2)$$

$E$  : 弾性係数,  $\nu$  : ポアソン比

スカラー関数  $f$  は、塑性変形に伴って体積変化が認められる土、岩、コンクリートに対して Prager-Druker の降伏条件式を、塑性変形を非圧縮性とみなしうる金属材料に対して Von Mises の降伏条件式を用いることにする。Prager-Druker の条件式は次式で与えられる。

$$f = \alpha J_1 + \beta \sqrt{J_2} \dots (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに、} J_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z : 1 \text{ 次不変量} \\ J_2 &= (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x) / 3 + \tau_{xy}^2 \\ &+ \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 : 2 \text{ 次不変量, } \alpha, \beta : \text{材料によって} \\ &\text{次まる定数} \end{aligned} \right\} (4)$$

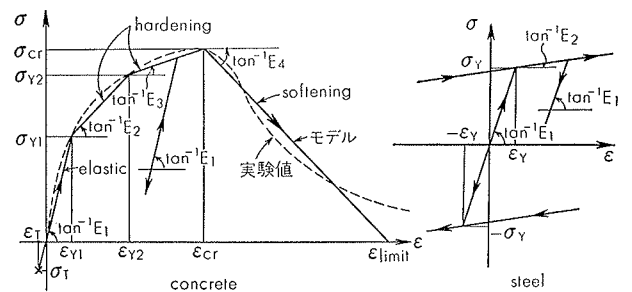
このとき、 $f$  の応力度  $\{\sigma\}$  に関する微係数は次式になる。

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_z} \\ \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} \\ \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \\ \frac{\partial f}{\partial \tau_{zx}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \frac{\beta \sigma_x'}{2\sqrt{J_2}} \\ \alpha + \frac{\beta \sigma_y'}{2\sqrt{J_2}} \\ \alpha + \frac{\beta \sigma_z'}{2\sqrt{J_2}} \\ \frac{\beta \tau_{xy}}{\sqrt{J_2}} \\ \frac{\beta \tau_{yz}}{\sqrt{J_2}} \\ \frac{\beta \tau_{zx}}{\sqrt{J_2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ f_{xy} \\ f_{yz} \\ f_{zx} \end{pmatrix} \dots (5)$$

ここに、 $\sigma_x' = \sigma_x - J_1/3 \dots$  : 偏差応力度  
式(2)、(5)を式(1)に代入すると  $[D^P]$  は次式になる。

$$[D^P] = \begin{pmatrix} D_{11}^e - \frac{S_1 S_1}{S} & D_{12}^e - \frac{S_1 S_2}{S} & D_{13}^e - \frac{S_1 S_3}{S} & -\frac{S_1 S_4}{S} & -\frac{S_1 S_5}{S} & -\frac{S_1 S_6}{S} \\ & D_{22}^e - \frac{S_2 S_2}{S} & D_{23}^e - \frac{S_2 S_3}{S} & -\frac{S_2 S_4}{S} & -\frac{S_2 S_5}{S} & -\frac{S_2 S_6}{S} \\ & & D_{33}^e - \frac{S_3 S_3}{S} & -\frac{S_3 S_4}{S} & -\frac{S_3 S_5}{S} & -\frac{S_3 S_6}{S} \\ & & & -\frac{S_4 S_4}{S} & -\frac{S_4 S_5}{S} & -\frac{S_4 S_6}{S} \\ \text{対称} & & & & -\frac{S_5 S_5}{S} & -\frac{S_5 S_6}{S} \\ & & & & & -\frac{S_6 S_6}{S} \end{pmatrix} (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに、} S_1 &= D_{11}^e f_x + D_{12}^e f_y + D_{13}^e f_z \\ S_2 &= D_{21}^e f_x + D_{22}^e f_y + D_{23}^e f_z \\ S_3 &= D_{31}^e f_x + D_{32}^e f_y + D_{33}^e f_z \\ S_4 &= D_{41}^e f_{xy} \\ S_5 &= D_{51}^e f_{yz} \\ S_6 &= D_{61}^e f_{zx} \\ S &= H' + f_x S_1 + f_y S_2 + f_z S_3 + f_{xy} S_4 + f_{yz} S_5 + f_{zx} S_6 \end{aligned} \right\} (7)$$



図一 材料の1軸応力-ひずみ関係

式(6)が3次元塑性応力-ひずみマトリックスである。

また式(3)において、 $\alpha=0$ とすれば式(6)は Von Mises の降伏条件式を用いた場合の関係になる。

2.1.2. 破壊曲面 材料の1軸応力-ひずみ関係を図-1のようにモデル化する。コンクリートに対しては4本の直線、鋼に対してはbilinear型とする。これらの1軸応力-ひずみの関係が多軸応力下のスカラー関数  $f$  - 相当ひずみ ( $\int d\epsilon$ ) の関係に等しいと仮定する。

また、コンクリートの引張側のぜい性破壊面を主応力が引張強度  $\sigma_T$  に達したら発生するとすれば、3軸破壊曲面は図-2のようになる。右側の図は2次元問題 (例えば  $\sigma_3=0$ ) のときの破壊曲面を示す。

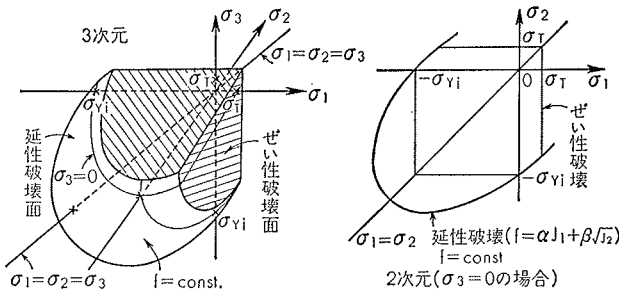


図-2 破壊曲面

塑性要素のひずみ除荷の判定はスカラー関数  $f$  の増分  $df$  によって行なう。式(3)より

$$df = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [D^e] \{d\epsilon\} / \left( 1 + \frac{1}{H'} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [D^e] \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \right) \dots\dots\dots(8)$$

となる。ここに、 $\{d\sigma\}$ : 応力増分,  $\{d\epsilon\}$ : ひずみ増分  $df \geq 0$  のとき引続き塑性,  $df < 0$  のときひずみ除荷が発生するとし、要素の応力-ひずみマトリックスを単に式(2)に戻せばよい。なお、式(8)の判定はコンクリート、鋼材のいずれにも適用する。

2.1.3. ひびわれ コンクリートのひびわれ面が開いているときは異方性体として応力-ひずみ関係を求める。今、1軸にひびわれしている要素のひびわれ面内に局所直交座標系 ( $\bar{x}_i$ ) をとると (図-3), 弾性時の局所座標系における応力-ひずみマトリックス  $[\bar{D}_{ic}^e]$  を次式で仮定する。

$$[\bar{D}_{ic}^e] = [\bar{D}_{ij}^e] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & (1-\nu)/2 & 0 & 0 \\ 対称 & & & & \mu(1-\nu)/2 & 0 \\ & & & & & \mu(1-\nu)/2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

ここに  $\mu$  はひびわれ面内のせん断剛性変化率であり、ひびわれ巾  $\delta l_{\bar{x}_i}$  と骨材の強度、粒径その他のパラメータ ( $K_k$ ) との関数として次式で仮定する。

$$\mu = \mu(\delta l_{\bar{x}_i}, K_k) \quad (0 \leq \mu < 1) \quad \dots\dots\dots(10)$$

$\mu$  の定性的、定量的な特性は未知である。一般には  $\mu=0$  としているが実験値に合わない場合がある。ここでは、 $\mu$  を線形または2次曲線で近似し、コンクリートの限界ひびわれ巾 ( $\delta l_{cr}$ ) 以上になれば  $\mu=0$  と仮定する (図-4)。

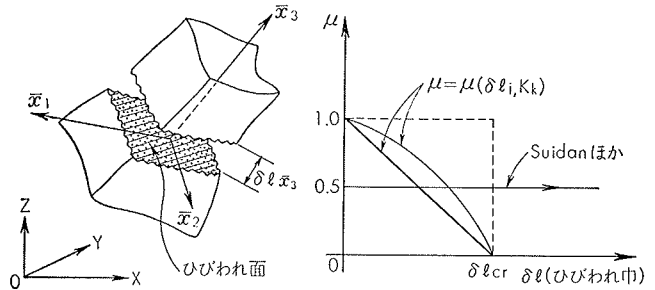


図-3 1軸ひびわれ

図-4 せん断剛性変化率

また、 $\bar{x}_1-\bar{x}_2$ 面内で降伏しているときは、常に  $\mu=0$  として式(6)を2次元平面応力の場合に適用し、塑性ひびわれ応力-ひずみマトリックス  $[\bar{D}_{ic}^p]$  を次式で定義する。

$$[\bar{D}_{ic}^p] = \begin{pmatrix} \bar{D}_{11}^e - \frac{S_1 S_1}{S} \bar{D}_{12}^e - \frac{S_1 S_2}{S} 0 - \frac{S_1 S_3}{S} 0 & 0 & 0 \\ & \bar{D}_{22}^e - \frac{S_2 S_2}{S} 0 - \frac{S_2 S_3}{S} 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 対称 & & & -\frac{S_3 S_3}{S} & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

ここで、ひびわれ面の開閉を判定する。1軸ひびわれしている要素のひびわれ巾  $\delta l_{\bar{x}_3}$  を、 $\bar{x}_3$  軸方向のひずみ  $\epsilon_{\bar{x}_3}^e$  と節点の全変位  $\{u_i\}$  による  $\bar{x}_3$  方向のひずみ  $\epsilon_{\bar{x}_3}$  を用いて次式で定義する。

$$\delta l_{\bar{x}_3} = \int_{l_{\bar{x}_3}} (\epsilon_{\bar{x}_3} - \epsilon_{\bar{x}_3}^e) dl \quad \dots\dots\dots(12)$$

ここに、 $l_{\bar{x}_3}$ :  $\bar{x}_3$  軸方向の有効長さ

$$\epsilon_{\bar{x}_3}^e = \epsilon_{\bar{x}_3}^e + \epsilon_{\bar{x}_3}^p = -\nu(\sigma_{\bar{x}_1} + \sigma_{\bar{x}_2})/E + \sum_{n=1}^{N-1} d\epsilon_{\bar{x}_3}^p \quad \dots\dots\dots(13)$$

$$\epsilon_{\bar{x}_3} = [T_\epsilon^c] \{\epsilon\} = [T_\epsilon^c] [B] \{u_i\} \quad \dots\dots\dots(14)$$

$\epsilon_{\bar{x}_3}^p = \sum_{n=1}^{N-1} d\epsilon_{\bar{x}_3}^p$ :  $\bar{x}_3$  軸方向の全塑性ひずみ成分

$[T_\epsilon^c]$ : ひびわれ発生時のひずみ変換マトリックス

従って、ひびわれ面の開閉の判定は式(12)の  $\delta l_{\bar{x}_i}$  によって行なう。 $\delta l_{\bar{x}_i} \geq 0$  ならば異方性のままで、負ならば  $\bar{x}_1$  軸方向に剛性回復するものとする。

2軸ひびわれしている要素 (図-5) の局所座標系

に対する弾性または塑性応力-ひずみマトリックス ( $[\bar{D}_{2C}]$ ,  $[\bar{D}_{2C}^P]$ ) とひびわれ巾 ( $\delta_{\bar{x}_2}$ ,  $\delta_{\bar{x}_3}$ ) を同様に導くことができる。

3軸ひびわれしている要素の剛性はすべて零とし、ひびわれ巾によってひびわれ面の開閉を判定する。

次に、局所座標系 ( $\bar{x}$ ) における異方性応力-ひずみマトリックスを基準座標系 (X, Y, Z) へ変換する。

両座標系の変換式は次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots(14)$$

ここに、 $l_i, m_i, n_i, i=1, 2, 3$ :  $\bar{x}_i$  軸の方向余弦  
局所座標系における応力とひずみの関係は

$$\{\bar{d}\sigma\} = \{\bar{D}\} \{\bar{d}\varepsilon\} \quad \dots\dots\dots(16)$$

である。また、 $\{\bar{d}\sigma\}$  と基準座標系における応力  $\{d\sigma\}$  の関係は、

$$\{\bar{d}\sigma\} = [T_\sigma] \{d\sigma\} \quad \dots\dots\dots(17)$$

ここに  $[T_\sigma]$ : 応力変換マトリックス  
同様に  $\{\bar{d}\varepsilon\}$  と  $\{d\varepsilon\}$  の関係は次式になる。

$$\{\bar{d}\varepsilon\} = [T_\varepsilon] \{d\varepsilon\} \quad \dots\dots\dots(18)$$

ここに、 $[T_\varepsilon]$ : ひずみ変換マトリックス  
 $[T_\varepsilon]^T = [T_\sigma]^{-1} =$

$$\begin{Bmatrix} l_1^2 & l_2^2 & l_3^2 & 2l_1l_2 & 2l_2l_3 & 2l_3l_1 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 & 2m_1m_2 & 2m_2m_3 & 2m_3m_1 \\ n_1^2 & n_2^2 & n_3^2 & 2n_1n_2 & 2n_2n_3 & 2n_3n_1 \\ l_1m_1 & l_2m_2 & l_3m_3 & l_1m_2+l_2m_1 & l_2m_3+l_3m_2 & l_3m_1+l_1m_3 \\ m_1n_1 & m_2n_2 & m_3n_3 & m_1n_2+m_2n_1 & m_2n_3+m_3n_2 & m_3n_1+m_1n_3 \\ n_1l_1 & n_2l_2 & n_3l_3 & n_1l_2+n_2l_1 & n_2l_3+n_3l_2 & n_3l_1+n_1l_3 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots(19)$$

式 (17), (18), (19) を式 (16) に代入すると、基準座標系に関する応力-ひずみ関係は次式で与えられる。

$$\{d\sigma\} = [D_n] \{d\varepsilon\} \quad \dots\dots\dots(20)$$

ここに、 $[D_n] = [T_\varepsilon]^T [D] [T_\sigma]$   $\dots\dots\dots(21)$

2.2. 不釣合応力について

本解析では系に一定の荷重増分を与えるために、ひびわれ、降伏や圧縮破壊するとき要素内に過度の応力が蓄積される。ここではこれらの不釣合応力を求めて等価節点力に変換し、繰返し計算することによる他の部分へ解除させる方法について述べる。

2.2.1. 塑性化による不釣合応力度 今、n 回目の

荷重増分 ( $\Delta F_n$ ) が系に載荷されたとき、ある要素のスカラ関数  $f$  と相当ひずみの関係が (R+1) 番目の降伏領域に達した場合 (図-6) の不釣合応力度  $\{d\sigma_{ex}^l\}$  を求める。f の不釣合量 ( $df_{ex}^l$ ) は次式のように導かれる。

$$df_{ex}^l = df - \{f(\sigma_{n-1}^l) - A\} - \alpha \{f(\sigma_{yk}) - f(\sigma_{n-1})\} \dots\dots\dots(22)$$

ここに、 $l$  は収束計算の回数で

$$\left. \begin{aligned} l=1 \text{ のとき} & \quad \alpha=1.0, A=f(\sigma_{yk}) \\ l>1 \text{ のとき} & \quad \alpha=0., A=f(\sigma_{n-1}^l) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(23)$$

$$df = f(\sigma_{n-1}^l + d\sigma_{n-1}^l) - f(\sigma_{n-1}^l) \quad \dots\dots\dots(24)$$

従って、 $l$  回目の収束計算によって生ずる不釣合応力度は次式で与えられる。

$$\{d\sigma_{ex}^l\} = \frac{df_{ex}^l}{df} \cdot \{d\sigma^l\} \quad \dots\dots\dots(25)$$

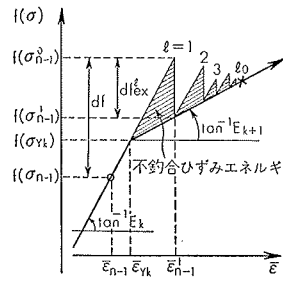


図-6 塑性化による不釣合応力

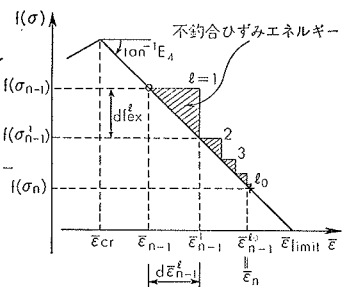


図-7 圧壊要素の不釣合応力

2.2.2. 圧壊要素の不釣合応力度 要素の剛性を零にして得られた節点変位増分  $\{du\}$  よりひずみ増分  $\{d\varepsilon_{n-1}^l\}$  を求めて、相当ひずみ増分 ( $d\varepsilon_{n-1}^l$ ) を

$$d\varepsilon_{n-1}^l = \alpha (\delta_1^l \cdot d\varepsilon_{n-1,ij}^l) + \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{d\varepsilon_{ij}^l d\varepsilon_{ij}^l} \quad \dots\dots\dots(26)$$

$\delta_1^l$ : クロネッカーのデルタ

と仮定すると

$$d\varepsilon_{n-1}^l = |E_4| \cdot d\varepsilon_{n-1}^l \quad \dots\dots\dots(27)$$

が得られる。従って不釣合応力度は

$$\{d\sigma_{ex}^l\} = \frac{df_{ex}^l}{f(\sigma_{n-1}^l)} \cdot \{\sigma_{n-1}^l\} \quad \dots\dots\dots(28)$$

となる。このとき要素の残留応力度  $\{\sigma_{n-1}^l\}_r$  は

$$\{\sigma_{n-1}^l\}_r = \left(1 - \frac{df_{ex}^l}{f(\sigma_{n-1}^l)}\right) \cdot \{\sigma_{n-1}^l\} \quad \dots\dots\dots(29)$$

となる。

2.2.3. ひびわれによる不釣合応力度 主応力  $\sigma_i$  がはじめて引張強度  $\sigma_T$  を越えたとき (図-8) やひびわれ面が再び開く場合の不釣合応力度と残留応力度を次式で仮定する。

$$\{d\sigma_{ex}^l\} = [T_\varepsilon]^T [T_\sigma^c] \{\sigma_{n-1}^l\} \quad \dots\dots\dots(30)$$

$$\{\sigma_{n-1}^l\}_r = ([I] - [T_{\sigma_0}^c]^T [T_{\sigma_0}^c]) \{\sigma_{n-1}^l\} \dots\dots\dots (31)$$

ここに, [I]: 単位マト

リックス

[T<sub>σ</sub><sup>c</sup>]: ひびわれ時のひず

み変換マトリックス式(19)

[T<sub>σ</sub><sup>c</sup>]: ひびわれ時の応力

変換マトリックス式(17)で,

第3行以外を零としたもの

の

2.2.4. 不釣合力の収束

判定 式(26), (28), (30)の

不釣合応力度を要素の等

価節点力 {ΔF<sub>ex</sub><sup>l</sup>} に変換すると

$$\{\Delta F_{ex}^l\} = \iiint_V [B]^T \{d\sigma_{ex}^l\} dV \dots\dots\dots (32)$$

となり, n回目の荷重ステップで破壊した全ての要素 (M個) の {ΔF<sub>ex</sub><sup>l</sup>} の和の絶対値を求める。すなわち

$$\Delta \bar{F}_{ex}^l = \left| \sum_{m=1}^M \{\Delta F_{ex}^l\}_m \right| \dots\dots\dots (33)$$

と置き, 今回の荷重増分の大きさ |ΔF<sub>n</sub>| との比(H)が

$$\frac{\Delta \bar{F}_{ex}^l}{|\Delta F_n|} = H < \varepsilon \dots\dots\dots (34)$$

ここに ε: 許容誤差

となったときに収束は達成されたものとして, 次の (n+1) 目の荷重増分を載荷して計算を進める。

2.3. 要素の剛性方程式

材料非線形問題における仮想仕事の原理は増分の形で次式で与えられる。

$$\iiint_V d\sigma_{ij} \cdot \delta(d\varepsilon_{ij}) dV - \iiint_V d\bar{F}_i \cdot \delta(du_i) dV - \int \int_S d\bar{T}_i \cdot \delta(du_i) ds = 0 \dots\dots\dots (35)$$

付帯条件は

$$\left. \begin{aligned} \delta(d\varepsilon_{ij}) &= \frac{1}{2} [\delta(du_{i,j}) + \delta(du_{j,i})] & : V内 \\ \delta(du_i) &= 0 & : S_u内 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

ここに,

dF<sub>i</sub>: 単位体積当りの物体力増分

dT<sub>i</sub>: 応力境界 S<sub>σ</sub> 上の単位面積当りの外力増分の i 軸方向成分

式(35)に仮想変位 {du<sub>i</sub>\*} を与えることによって, 要素の剛性方程式 [K] と物体力に等価な節点力増分 {dF} は以下のように求められる。

i) 6面体要素

$$[K] = \iiint_V [B]^T [D_n] [B] dV = \iiint_{-1}^1 [B]^T [D_n] [B] \cdot \det |J| d\xi d\eta d\zeta \dots\dots\dots (37)$$

$$\{dF\} = \iiint_V [N]^T \{d\bar{F}\} dV = \iiint_{-1}^1 [N]^T \cdot \det |J| \cdot d\xi d\eta d\zeta \cdot \{d\bar{F}\} \dots\dots\dots (38)$$

ここに, ξ, η, ζ: 局所座標系

[N<sub>i</sub>]: 座標系 (ξ, η, ζ) における変位関数

[B] = [B<sub>1</sub>, ..., B<sub>i</sub>, ..., B<sub>n</sub>]: ひずみ-変位マトリックス (n は節点数) であり

$$[B_i] = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial X} & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial Y} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial Z} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial Y} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial X} & \frac{\partial N_i}{\partial Z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial Z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial Y} & \frac{\partial N_i}{\partial X} \end{pmatrix}^T \dots\dots\dots (39)$$

det|J|: Jacobian Matrix [J] の行列式で

$$[J] = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial N_i}{\partial \xi}, \frac{\partial N_i}{\partial \eta}, \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \right]^T \cdot [X_i, Y_i, Z_i] \quad (40)$$

X<sub>i</sub>, Y<sub>i</sub>, Z<sub>i</sub>: i 節点の基準座標系の座標

ii) 四辺形膜要素

$$[K] = \iiint_V [B]^T [D_n] [B] dV = \int \int_{-1}^1 T(\xi, \eta) \cdot [B]^T [D_n] [B] \det |J_0| d\xi d\eta \dots\dots\dots (41)$$

$$\{dF\} = \iiint_V [N]^T \{d\bar{F}\} dV = \int \int_{-1}^1 T(\xi, \eta) \cdot [N]^T \det |J_0| \cdot d\xi d\eta \cdot \{d\bar{F}\} \dots\dots\dots (42)$$

ここに, T(ξ, η): 点(ξ, η)における法線方向の厚さ

[J<sub>0</sub>]<sub>(3×3)</sub> = [J<sub>1</sub>, J<sub>2</sub>, J<sub>1</sub> × J<sub>2</sub>]<sup>T</sup> であり

$$\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix}_{(2 \times 3)} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial N_i}{\partial \xi}, \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right]^T \cdot [X_i, Y_i, Z_i] \dots\dots\dots (43)$$

$$[B'] = [[B'_1][\theta]^T, \dots, [B'_i][\theta]^T, \dots] \dots\dots\dots (44)$$

$$[\theta] = [\theta_1, \theta_2, \theta_3] = [J_1/\sqrt{|J_1|}, \theta_3 \times \theta_1, J_3/\sqrt{|J_3|}]$$

$$[b_i]_{i=1-n} = [\theta]^T \cdot [J_0]^{-1} \cdot \left[ \frac{\partial N_i}{\partial \xi}, \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right]^T \text{とおくと}$$

$$[B'_i] = \begin{pmatrix} a_i & 0 & 0 \\ 0 & b_i & 0 \\ b_i & a_i & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (45)$$

iii) 線要素

$$[K] = \iiint_V [B]^T [D_n] [B] dV = \int_{-1}^1 [B(\xi)]^T [B(\xi)] \cdot E \cdot A(\xi) \cdot H(\xi)^{1/2} d\xi \dots\dots\dots (46)$$

$$\{dF\} = \iiint_V [N]^T \{d\bar{F}\} dV = \int_{-1}^1 [N]^T \cdot A(\xi) \cdot H(\xi)^{1/2} d\xi \cdot \{d\bar{F}\} \dots\dots\dots (47)$$

ここに, ξ: 軸方向の局所座標

A(ξ): ξ点における断面積

$$H(\xi) = \left( \frac{\partial X}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial \xi} \right)^2$$

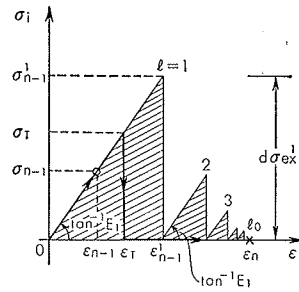


図-8 ひびわれによる不釣合応力度

iv) 各要素の変位関数 図-9に本解析で用いる要素モデルを図示する。これらの要素の局所座標系における変位関数は次式で与えられる。

20節点6面体要素： $\xi_0 = \xi_i \xi$ ,  $\eta_0 = \eta_i \eta$ ,  $\zeta_0 = \zeta_i \zeta$   
 偶角節点に対し ( $\xi_i, \eta_i, \zeta_i = \pm 1$ )  

$$N_i = (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)(\xi_0 + \eta_0 + \zeta_0 - 2) / 8 \dots (48)$$
 稜線中央節点に対し ( $\xi_i = 0, \eta_i, \zeta_i = \pm 1$  のとき)  

$$N_i = (1 - \xi^2)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0) / 4 \dots (49)$$

8節点四辺形膜要素：  
 偶角節点に対し ( $\xi_i, \eta_i = \pm 1$ )  

$$N_i = (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(\xi_0 + \eta_0 - 1) / 4 \dots (50)$$
 稜線中央節点に対し ( $\xi_i = 0, \eta_i = \pm 1$  のとき)  

$$N_i = (1 - \xi^2)(1 + \eta_0) / 2 \dots (51)$$

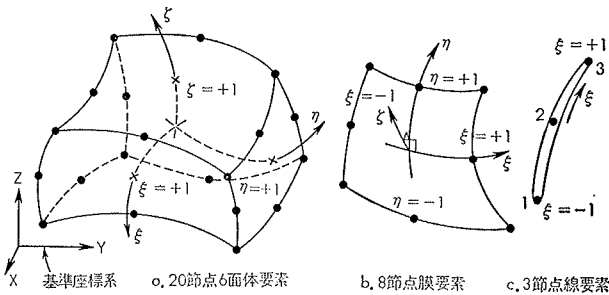


図-9 有限要素モデル

3節点線要素：  
 偶角節点に対し ( $\xi_i = \pm 1$ )  

$$N_i = \xi_0(\xi_0 + 1) / 2 \dots (52)$$
 中央節点に対し  

$$N_i = (1 - \xi^2) \dots (53)$$

2.4. 数値計算手法

2.4.1. 荷重増分法 荷重増分法には大別して接線剛性法と初期応力法がある(図-10)。接線剛性法は反復計算の回数や荷重増分の大きさによって逐次累積される誤差を生ずるといふ短所がある。また、初期応力法は収束性の判定時期が荷重増分と関連して解の精度に影響を与える。従って、収束性をより良くするために接線剛性法と初期応力法の混合型(図-10)を用いる。

2.4.2. 要素の体積積分 要素の剛性方程式の体積積分には Gauss の求積法を用いる。非線形解析に不可欠な材料のひびわれ破壊、降伏判定、圧壊判定などは Gauss の積分点における応力度とひずみによって行なっている。一般に、積分点の数は変位関数の次数に等しくされているが、大次元問題の場合には要素剛性の数値積分と破壊の判定に必要な演算量が莫大なも

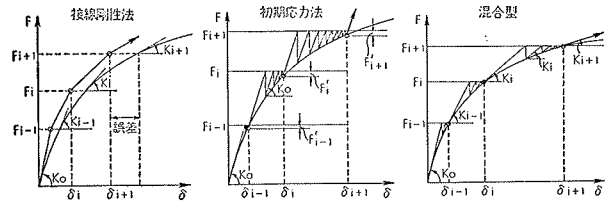


図-10 荷重増分法

のとなるため、変位関数の次数より少ない積分点の数にせざるを得ない。本解析では、Gauss の積分点の数を2または3として行なっている。

3. むすび

3次元連続体の材料 非線形有限要素解析の一つの方法について述べたが、構成材料の非線形現象のモデル化、構成要素の有限要素へのモデル化や数値計算手法などに多くの大胆な仮定を用いている。それゆえ、本解析に用いた各仮定の妥当性と演算時間における現実性の検討を計算例によって行なう必要が認められる。

その方法として、ある一つの仮定をパラメータにし、他の仮定を固定して、その仮定による影響を解明する個別の方法と、全体の均衡を考慮した総合的方法によって検討できるものと思われる。

予定している計算例としては、当技術研究所で行なわれた PCRV の内圧実験、PCRV 支持構造物などの非線形解析を行なうつもりである。

それらの結果については次の機会に報告する。

文献

- 1) Valliappan S. "Nonlinear Stress Analysis of Reinforced Concrete" J. Struct. Div. ASCE 98 (ST 4) 1972
- 2) Zimmermann T "Three-dimensional rupture analysis of a PCRV including creep effects", 2nd Int. Conf. SMIRT. Berlin, 1973
- 3) Suidan M. "Finite element analysis of reinforced concrete", J. Struct. Div., ASCE (ST 4), 1973
- 4) 滝口克己 "有限要素法による鉄筋コンクリートばりの2次元非線形解析", 日建論報, 189 (1971)
- 5) Argyris J. H. "Recent developments in the finite element analysis of PCRVs", Nuc. Eng. and Design 28, 1974
- 6) Zienkiewicz O. C. "The finite element method in engineering science", Mc-Graw Hill book
- 7) Zienkiewicz O. C. "Reduced integration technique in general analysis of plate and shell", Int. J.

- Numer. Methods Eng., Vol. 3, 1971
- 8) 川本朧万, ほか “材料非線形有限要素解析の一手法について”, 土論報, 202号, 1972
  - 9) 山田嘉昭 “材料非線形問題解析法”, 東大生研講習会テキスト, 1970
  - 10) 宮本博 “有限要素法と破壊力学”, コンピューターによる構造工学講座 II-3-B, JSSC, 倍風館
  - 11) 武田寿一, 井元勝慶, “有限要素法によるR. C. 部材の弾塑性解析(その1. 柱—はり部材, その2. 軸対称回転体, その3. 柱—はり部材の復元力特性)”, 当技術研究所所報, No. 7, No. 8, 1973, 1974
  - 12) 武田寿一, ほか, “有限要素法によるPCR Vの弾塑性解析”, 建築学会梗概集, 1973, 1974
  - 13) Salmon C. C. “Finite element analysis of concrete beams”, J. Struct. Div. ASCE, ST 12, 1974
  - 14) Kupter H. B. “Behavior of concrete under biaxial stresses”, J. Eng. Mech. Div., ASCE, EM 4, 1973