

有限要素法による地盤の粘弾性解析

齋藤二郎 藤原紀夫
内藤和章 吉岡尚也

Viscoelasticity Analyses of Ground Behaviors by Finite Element Method

Jiro Saito Toshio Fujiwara
Kazuaki Naito Hisaya Yoshioka

Abstract

Regarding analyses of ground behaviors by the finite element method, results showing the ground to behave like an elastic solid and an elastoplastic solid were described in a previous paper. This present paper describes results showing the ground to behave like a viscoelastic solid. The outline of the viscoelasticity analysis and the procedure of computer programming are described. As analyzed examples, behaviors of the ground in a condition of loading on the edge of an open cut and of the ground surrounding a shield tunnel are shown. Surface settlements with time and behaviors of cut sections are compared with field measurements in the former. Surface settlements with time, displacements in the ground with time and contour lines of horizontal, normal and shearing stresses are shown in the latter.

概要

有限要素法による地盤の挙動解析に関し、前回までに地盤を弾性体、弾塑性体と仮定した場合について述べた。今回は地盤が粘弾性挙動をする場合について述べる。地盤の粘弾性解析方法の概要と電算プログラムの組み立て手順を述べ、解析例としてオープンカットの肩に載荷した場合の地盤の挙動とシールド外周地盤の挙動について示す。解析結果は、前者については、地表面沈下の経時変化と切断面の挙動を実測値と比較する。一方、後者については地表面沈下の経時変化、地盤内変位の経時変化、水平・鉛直方向の応力およびせん断応力の等高線図などについて示す。

1. まえがき

筆者らは、ここ数年来有限要素法解析を土質力学の分野に応用することを試みてきた。^{1),2),3),4)}今回は、地盤の粘弾性解析について示す。地盤の粘弾性挙動は一般化マックスウェルモデルにしたがうものとし、これから導びかれる緩和関数を地盤定数に対応させて解くものである。

以下に、粘弾性解析方法の概要と電算プログラムの組み立て手順について述べ、解析例として、オープンカットの肩に載荷した場合の地盤挙動とシールド外周地盤の挙動について示す。

2. 解析方法

地盤を線型粘弾性体と考えれば、このときの応力-ひずみ関係式は Boltzmann の記憶積分で表示するの

がもっとも一般的であり、次式で表わされる。⁵⁾

$$\sigma(t) = E(t) \cdot \varepsilon(0) + \int_0^t E(t-\tau) d\varepsilon(\tau) / d\tau \cdot d\tau \dots \dots (1)$$

ここに σ は応力、 ε はひずみ、 $E(t)$ は緩和関数を意味している。また τ は時間を表わしている。

直交座標系における応力およびひずみテンソルを σ_{ij} , ε_{ij} とし、これらテンソルの対称性と材料の等方等質性を仮定すれば、(1)式は

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(t) = & \delta_{ij} \{ K(t) \varepsilon_{rr}(0) \\ & + \int_0^t k(t-\tau) d\varepsilon_{rr}(\tau) / d\tau \cdot d\tau \} + 2G(t) \varepsilon'_{ij}(0) \\ & + 2 \int_0^t G(t-\tau) d\varepsilon'_{ij}(\tau) / d\tau \cdot d\tau \dots \dots (2) \end{aligned}$$

のような形に書き直すことができる。式中の $K(t)$, $G(t)$ および δ_{ij} はそれぞれ緩和関数の体積成分、せん断成分およびクロネッカーのデルタを示し、 ε'_{ij} は偏差ひずみを意味している。

つぎに地盤の粘弾性挙動は一般化マックスウェルモデル (図-1 参照) にしたがうものと仮定すれば、緩和関数 $E(t)$, $K(t)$, $G(t)$ はそれぞれ

$$E(t) = E_0 + \sum_{\alpha=1}^n E_{\alpha} \exp(-t/T_{R\alpha}) \quad (3)$$

$$K(t) = K_0 + \sum_{\alpha=1}^n K_{\alpha} \exp(-t/T_{K\alpha}) \quad (4)$$

$$G(t) = G_0 + \sum_{\alpha=1}^n G_{\alpha} \exp(-t/T_{G\alpha}) \quad (5)$$

で表わされる。ここに E_0 , K_0 , G_0 , E_{α} , K_{α} , G_{α} , $T_{R\alpha}$, $T_{K\alpha}$, $T_{G\alpha}$ ($\alpha=1, 2, \dots, n$) は各モデル要素の

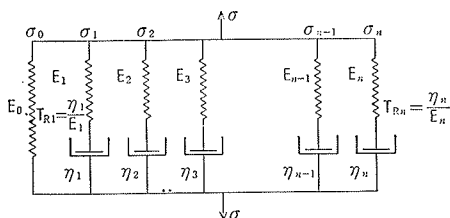


図-1 一般化マックスウェルモデル

定数パラメータを表わす。また $T_{R\alpha}$, $T_{K\alpha}$, $T_{G\alpha}$ は時間の次元をもつもので緩和時間と呼ばれる。これら定数の決定方法については次節で述べる。

(2)式の第2, 4項の履歴積分の求め方には直接積分法と増分理論を用いる方法があるが、ここでは増分理論を用いる。初期時刻を $(t-\Delta t)$ とし、ひずみ速度を微小時間内 $(t-\Delta t \sim t)$ で一定と仮定すれば、その増分応力は次式で表わされる。

$$\Delta\sigma_{rr\alpha}(t) = 3K_{v\alpha} \Delta\varepsilon_{rr}(t) - A_{K\alpha}(\sigma)_{rr\alpha}(t-\Delta t) \quad (6)$$

$$\Delta\sigma'_{ij\alpha}(t) = 2G_{v\alpha} \Delta\varepsilon'_{ij}(t) - A_{G\alpha} \sigma'_{ij\alpha}(t-\Delta t) \quad (7)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} K_{v\alpha} &= 1/\Delta t \cdot K_{\alpha} \cdot T_{K\alpha} \cdot A_{K\alpha} \\ A_{K\alpha} &= 1 - \exp(-\Delta t/T_{K\alpha}) \\ G_{v\alpha} &= 1/\Delta t \cdot G_{\alpha} \cdot T_{G\alpha} \cdot A_{G\alpha} \\ A_{G\alpha} &= 1 - \exp(-\Delta t/T_{G\alpha}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

を意味している。上式の増分応力をマトリックス表示すると

$$\{\Delta\sigma(t)\} = \{\Delta\sigma_0(t)\} + \sum_{\alpha=1}^n \{\Delta\sigma_{\alpha}(t)\} \quad \dots\dots\dots(9)$$

のような形で表わされる。

つぎに有限要素分割における要素内のひずみ増分 $\{\Delta\varepsilon(t)\}$ と節点変位増分 $\{\Delta\delta(t)\}$ とが、 $\{\Delta\varepsilon(t)\} = [B] \cdot \{\Delta\delta(t)\}$ (ただし $[B]$; 未定係数マトリックス) の関係で結ばれているとし、仮想仕事の原理に適用すれば、増分形で表わされた剛性方程式は

$$\{\Delta F\} = [K] \{\Delta\delta\} - \{\Delta F_v\} - \{\Delta F_p\} \quad \dots\dots\dots(10)$$

であたえられる。ここに $[K]$; 剛性マトリックス、

$\{\Delta F_v\} = \int_V [B]^T \{\Delta\sigma_v\} dV$; 粘弾性変形によるみかけの節点力, $\{\Delta F_p\}$; 物体力による等価節点力を意味している。

平面ひずみ状態の場合には増分応力ベクトル, $[D_0]$, $[D_{v\alpha}]$ のマトリックスを具体的な形で示すとつぎのようになる。

$$\{\Delta\sigma_0(t)\} = \{\Delta\sigma_x(t) \Delta\sigma_y(t) \Delta\tau_{xy}(t)\}^T \dots\dots\dots(11)$$

$$\{\Delta\sigma_{\alpha}(t)\} = \{\Delta\sigma_{\alpha x}(t) \Delta\sigma_{\alpha y}(t) \Delta\tau_{\alpha xy}(t)\}^T \dots\dots\dots(12)$$

$$[D_0] = \begin{pmatrix} K_0 + 4/3 \cdot G_0 & K_0 - 2/3 \cdot G_0 & 0 \\ & K_0 + 4/3 \cdot G_0 & 0 \\ \text{sym.} & & G_0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(13)$$

$$[D_{v\alpha}] = \begin{pmatrix} K_{v\alpha} + 4/3 \cdot G_{v\alpha} & K_{v\alpha} - 2/3 \cdot G_{v\alpha} & 0 \\ & K_{v\alpha} + 4/3 \cdot G_{v\alpha} & 0 \\ \text{sym.} & & G_{v\alpha} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(14)$$

$$\{\Delta\sigma_{v\alpha}(t)\} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} A_{K\alpha} + 2A_{G\alpha} & A_{K\alpha} - A_{G\alpha} & 0 \\ & A_{K\alpha} + 2A_{G\alpha} & 0 \\ \text{sym.} & & 3A_{G\alpha} \end{pmatrix}$$

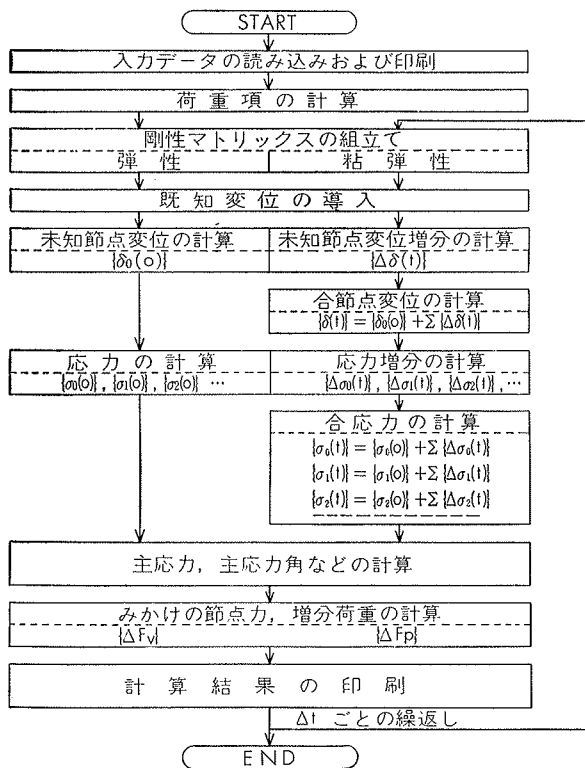


図-2 フローチャート (粘弾性解析)

$$\times \{\sigma_{\alpha}(t-\Delta t)\} \quad \dots\dots\dots(15)$$

(13)式を E, ν 系列で表示すると、

$$[D_0] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{pmatrix} \quad (16)$$

となる。ここに ν はポアソン比を意味する。

図-2 に電算プログラムのフローチャートを示す。

このプログラムの中で用いる多元連立方程式の解析は、バンドマトリックス法を用いている。⁶⁾

3. 粘弾性定数の決定方法

3.1. 平板載荷試験

載荷重Pを一定に保って載荷試験を行なうと、載荷板の時間に対する沈下曲線 $w(t)$ が得られる。一方、緩和関数 $E(t)$ と $w(t)$ との間につきの関係式が成り立つものとする。

$$E(t) = P(1-\nu^2)/2aw(t) \quad \dots\dots\dots(17)$$

ここに ν ; ポアソン比, a ; 載荷板の半径

$E(t)$ は前述の(3)式で示されるので、ポアソン比を仮定することができれば、(3)式と(17)式を用いて、曲線のあてはめにより未定係数を求めることができる。 $E(t)$ が求まれば、 $K(t)$, $G(t)$ は $K(t) = 1/3(1-2\nu) \cdot E(t)$, $G(t) = 1/2(1+\nu) \cdot E(t)$ の関係式より導びかれる。

3.2. 一軸圧縮, 三軸圧縮試験

一軸圧縮試験において、鉛直応力 σ_1 を一定に保ってクリープ試験を行なうと、鉛直ひずみの時間曲線 $\epsilon_1(t)$ が得られる。一方、緩和関数 $E(t)$ と $\epsilon_1(t)$ との間につき関係式が成り立つとする。

$$E(t) = \sigma_1/\epsilon_1(t) \quad \dots\dots\dots(18)$$

三軸圧縮試験において、鉛直応力 σ_1 と拘束圧 σ_3 を一定に保ってクリープ試験を行なうと、鉛直ひずみの曲線 $\epsilon_1(t)$ と半径方向のひずみ曲線 $\epsilon_3(t)$ が得られる。 $E(t)$ と $\epsilon_1(t)$, $\epsilon_3(t)$ との間につき

$$E(t) = (\sigma_1 - 2\nu\sigma_3)/\epsilon_1(t) \quad \dots\dots\dots(19)$$

$$E(t) = \{ (1-\nu)\sigma_3 - \nu\sigma_1 \} / \epsilon_3(t) \quad \dots\dots\dots(20)$$

の関係が成り立つとする。

一軸圧縮試験の場合には(3)式と(18)式を、三軸圧縮試験の場合には(3)式と(19)式を用いて、先と同様にして粘弾性定数を求めることができる。また、一軸圧縮試験ではポアソン比 ν を求めることができないが、三軸圧縮試験では $\nu(t) = \epsilon_3(t)/\epsilon_1(t)$ から、ポアソン比が時間の関数として求まる。ただし実際の解析にあたっては、ポアソン比 $\nu(t)$ は一定とみなすことが多い。

後述のオープンカットの解析例で用いる粘弾性定数は、清瀬市の関東ルームで平板載荷試験を実施して求めた。その値は5要素マックスウェルモデルの場合、ポアソン比 ν を $\nu=0.4$ と仮定すれば $E_0=45.528 \text{ kg/cm}^2$, $E_1=15.515 \text{ kg/cm}^2$, $E_2=7.168 \text{ kg/cm}^2$, $T_1=1.63$ 分, $T_2=16.57$ 分となる。

4. 解析例

4.1. 地表面一様載荷の地盤挙動

一般化マックスウェルモデルにおいて、 $t=0$ ではバ

ネのみがひずんだ状態の弾性解であり、 $t=\infty$ では E_0 のみの弾性解となるのでつぎのことが言える。すなわ

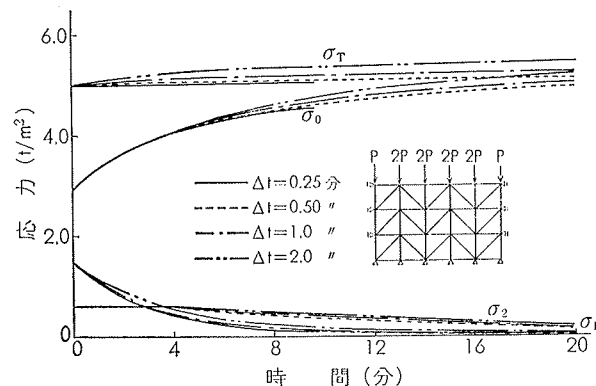


図-3 Δtごとの応力曲線

ち $\delta_0/\delta_\infty = E_0/(E_0 + E_1 + E_2)$ 。また $\sigma_{1,2}$ は緩和関数を指数減衰型で表わしているのだから σ_0 は σ_T に漸近しなければならない。図-3は図中のような解析モデルを仮定し、時間間

隔 (Δt) ごとの応力曲線を示したものである。この図から上記のことがらの妥当性が認められる。一方、微小

時間内でのひずみ速度を一定と仮定しているが、これについては $\Delta t < T_1$ を満足する Δt を選ばねばよいこともこの図からわかる。

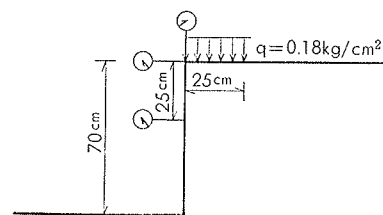


図-4 オープンカットの断面

4.2. オープンカットの肩に載荷した場合

オープンカットの断面は図-4のような形状とする。ダイヤルゲージを図の位置に設定し、沈下量とはらみ出し量を測定する。ここでは実測値と理論値の比較を地表面沈下の経時変化について行なう(図-5参照)。図で①の曲線は平板載荷試験から求めた定数による沈下曲線を表わしている。時間の初期では沈下量はほぼ等

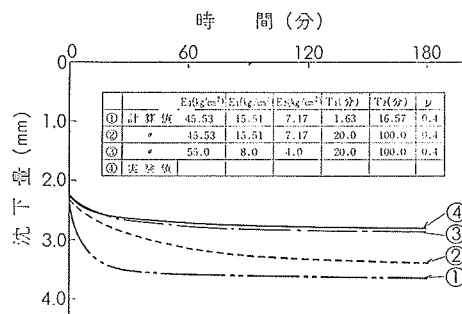


図-5 地表面沈下の経時変化

しいが、 $t=180$ (分)においては沈下量に多少の差がある。また実験値は沈下の減衰が遅いのに対し、理論値は急激に沈下が進み、数十分後に一定値を取り始め

ている。これは平板載荷試験から求めた地盤定数の推定に誤りがあったかも知れない。

ここで、試みに見かけの地盤定数をあてはめてみると、たとえば③のような定数をとれば、実測値とよく

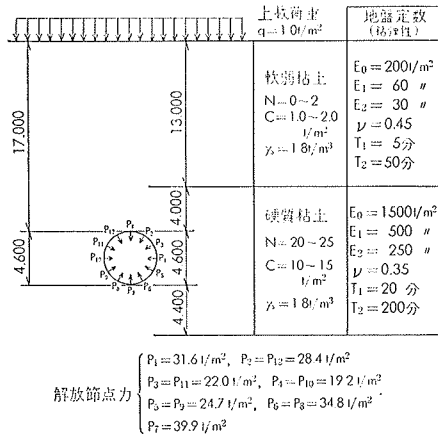


図-6 解析モデル

一致することもわかる。

4.3 シールド外周地盤の挙動解析

現在計画中の水道幹線シールドについて、トンネルを素掘りした場合の外周地盤の挙動を解析してみた。解析モデルを図-6に示す。トンネルの外周地盤の挙動を解析する方法として、解放節点力を用いる方法をとった。すなわち、掘削予定面上の初期応力に相当する節点力を求め、これと符号が反対の力を各節点に外力として作用させるものである。変位はこの計算によってそのまま、応力はこの計算と初期応力を重ね合わせて求めることができる。地盤の粘弾性定数は図-6の右端に示す値を用いた。

図-7にトンネル孔掘削後12.5時間目の地盤内変位を示す。後述のように、この12.5時間後とはほぼ最終沈下量を示す時間である。トンネルセンター上の地表面では3.4cm沈下し、トンネル孔壁の坑頂では12.4cm沈下する。一方、坑底は6.5cm浮き上がり、孔の左右は3.2cm内側にはらみ出している。

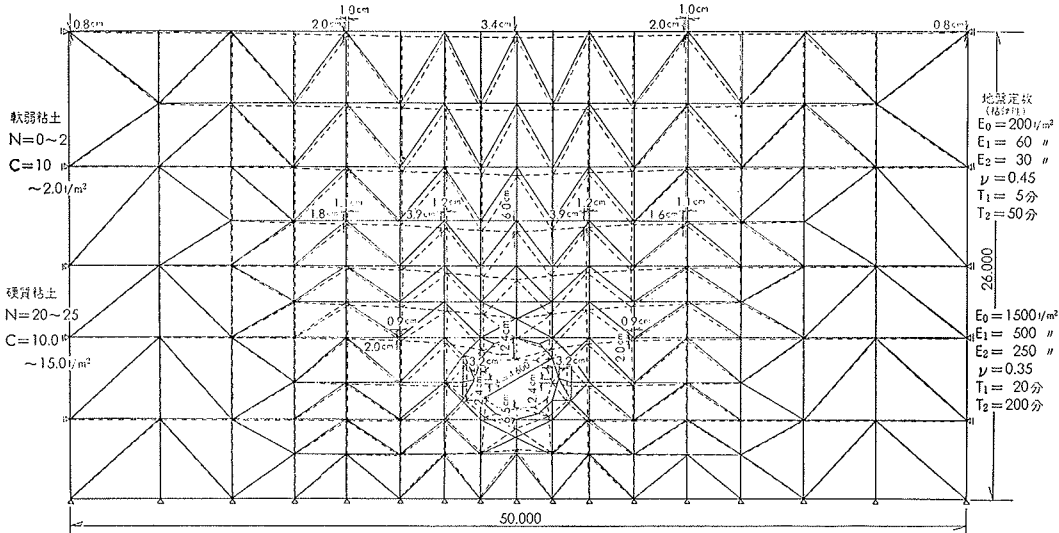


図-7 地盤内の変位図 (12.5時間後)

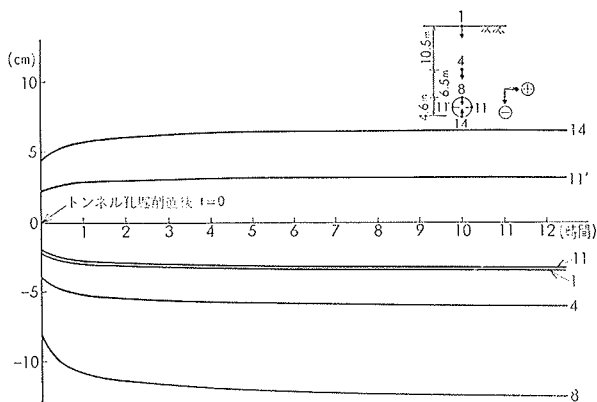


図-8 トンネル孔壁変位の経時変化

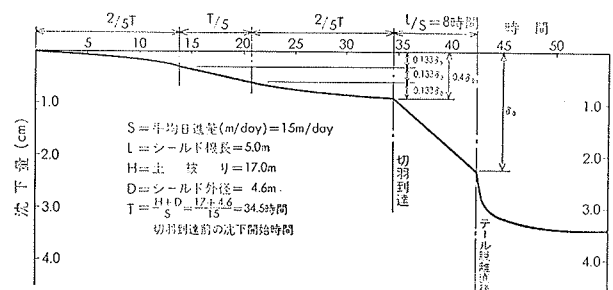
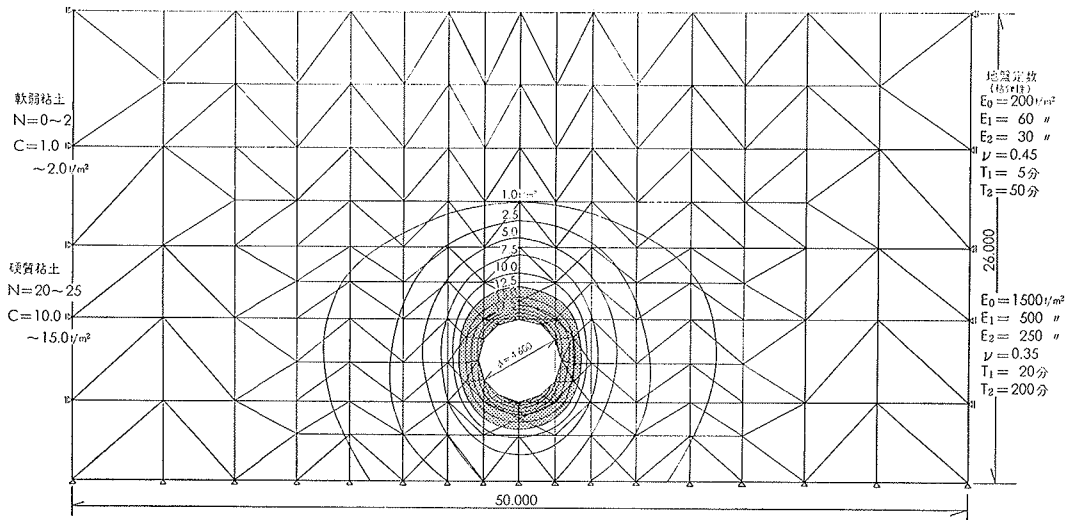


図-9 トンネル中心上の地表面沈下の経時変化

図-8にトンネル孔壁変位の経時変化を示す。図中において、時間の軸はトンネル孔掘削直後を0としている。トンネル孔壁は全体におしつぶされるように変



図—10 地盤内最大せん断力の等高線図 (12.5時間後)

化しているのがみられる。時間の初期においては変位の増加率が大きいですが、12.5時間後にはほぼ一定値を取っている。坑頂での変位は掘削直後に 8.2cm であったものが、12時間後には 12.4cm にまで増加しているのがわかる。

つぎに、図—9 はトンネル中心上の地表面沈下の経時変化を示したものである。平均日進量 $s=15\text{m/day}$ 、シールド機長 $L=5\text{m}$ 、土被り $H=17\text{m}$ 、シールド外径 $D=4.6\text{m}$ を仮定し、またこれまでの経験から、切羽のゆるみによる沈下量は掘削直後の沈下量 (δ_0) の 4 割であることを考慮して求めた結果である。

図—10 にトンネル孔掘削後 12.5 時間目の地盤内の最大主応力の等高線図を示す。図中において黒くぬりつぶした部分は最大せん断応力が 12.5t/m^2 を越える部分である。したがって、切羽部分の地盤の粘着力が 12.5t/m^2 以下であれば、この部分はせん断破壊を起こすことが予想される。

5. むすび

以上述べてきたことがらをまとめるとつぎのようになる。

- i) 有限要素法は地盤内部の全体について、その挙動をみることのできる非常に有効な解析法である。
- ii) 地盤の粘弾性モデルとして一般化マックスウェルモデルを用いたが、このモデルによって適当な定数を選べば、十分地盤挙動を表わしうる。
- iii) 一般マックスウェルモデルでは 5 要素までで十分であり、それ以上は定数を決定することが、実際的には不可能である。
- iv) 地盤定数の決定方法として平板載荷、一軸・三軸

試験を用いる方法を示したが、これらについては実測値と比較しながら、今後とも研究を進める必要がある。v) 増分法を用いた場合、時間増分 Δt の取り方が問題となるが、 $\Delta t < T_1$ を満足すればよいことがわかった。

今後は上記の問題点を含めて三次元解析、圧密を考慮した粘弾性解析などのプログラムを開発して、地盤解析にこの有限要素法を活用してゆくつもりである。

最後に、このプログラムの開発にあたり、当社機械計算部の徳永氏に多大な御援助をいただいた。またこの研究の一部は中央大学学生中島君、日本大学学生磯谷・佐藤両君に卒業論文として実施していただいた。ここに記して深く感謝します。

参考文献

- 1) 斎藤，内藤，藤原；有限要素法によるトンネル外周地盤の挙動解析例，大林組技術研究所報，No. 7, 1973
- 2) 斎藤，藤原；有限要素法による浸透流・熱流などの解析，大林組技術研究所報，No. 7, 1973
- 3) 斎藤，内藤，藤原；有限要素法によるシールド外周地盤の挙動解析例，土木学会第27回年次学術講演会講演概要集，Ⅲ-148
- 4) 斎藤，内藤，藤原；有限要素法によるシールド外周地盤の挙動解析 (弾塑性)，大林組技術研究所報，No. 8, 1974
- 5) 赤木，大野，色部；有限要素法による P C 格納容器の粘弾性解析，土木学会論文報告集，1973年 6 月
- 6) E. L. Wilson；A computer program for the dynamic stress analysis of underground structures, Uni. of California, January 1968