

MAC法による室内空気分布の数値解析 (その1)

宮川 保之

Numerical Solution of Room Air Distribution Based on MAC Method (Part 1)

Yasuyuki Miyakawa

Abstract

Model experimentation is a method popularly used for gauging room air distribution, but model experiments require considerable expense and labor. Recently, it has been noted that the MAC Method (Marker and Cell Method) which solves the Navier-Stokes equation directly by computer is effective for analyzing room air distribution numerically. The MAC Method has many advantages differing from the method which uses stream function and vorticity. In this paper, a finite-difference scheme based on the MAC Method is described and as a first step studies in cases of low Reynolds numbers are made.

概 要

最近の大容量をもつ居室の増加に伴ない室内空気分布を正確にはあくする必要が不可欠になりつつある。このための手段として模型実験があるが多大な費用と労力を必要としこれに代わるものが期待される。ところで最近、流体の運動方程式を室内に適用しこれを直接的に解く MAC法 (Marker and Cell Method) と呼ばれる手法が将来の室内空気分布設計の有望な手法として注目されている。この手法は従来からある流れ関数、渦度を用いる手法とは異なり多くの利点を含んでいる。本報告ではこのMAC法の改良プログラムの概要を述べるとともに計算上の改良点、第一段階としての低レイノルズ数のケーススタディを行なった。

1. はじめに

室内空気分布を数値解析によって予測するため非圧縮性二次元流れに対する運動方程式 (いわゆるナビエ・ストークスの方程式) に流れ関数、渦度を用いることによって圧力項を消去しこれを差分近似する手法はこれまで各方面で研究、改良されているが実際の建物は吹出・吸込口が複雑に配置されているため今後は三次元解析への移行が必須となる。しかしながら従来の渦度を用いる手法では計算機の記憶容量、境界条件設定の複雑さ等より三次元への拡大は困難と思われ、これにかわる計算方法が必要である。ところで1965年 Harlow と Welch²⁾ が提案した MAC 法 (Marker and Cell method) はこの要求に答え得る可能性を秘めていると考えられはじめて¹⁾。MAC 法とはナビエ・ストークスの方程式を渦度を用いず直接差分して圧力と速度をもとめる手法でありさらに Marker

なる慣性をもたない粒子を流れにそって移動させ、“流れの可視化”をより明白にするものである。このMAC法は主としてこれまで土木工学分野で自由表面をもつ流体の解析に用いられているがこれを閉じられた室内空間に適用した場合、従来の渦度を用いる手法に比べて次のような利点がある。

- ① 従属変数が速度と圧力のみであるため三次元に拡張した場合、計算機の記憶容量が小さくなる。
- ② 境界条件の設定が簡単かつ明快である。
- ③ Marker なる粒子をとばすことにより流れの可視化が明白であるとともに CRT を用いてディスプレイ用のアニメーションフィルムが作れる。

本報告は将来、室内空気分布設計の有用な手法となるであろう MAC 法の差分スキーム、境界条件をのべるとともにプログラムを開発し、まず第一段階として低レイノルズ数の場合についての計算を行なった。

2. MAC法による計算式

2.1. 初期MAC法 (古典的MAC法)

二次元非圧縮性、粘性流体の運動方程式はナビエ・ストークスの方程式として次のように書ける。

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + \frac{\partial u'^2}{\partial x'} + \frac{\partial u'v'}{\partial y'} + \frac{\partial p'}{\rho \cdot \partial x'} = \nu \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right) + X' \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t'} + \frac{\partial v'^2}{\partial y'} + \frac{\partial u'v'}{\partial x'} + \frac{\partial p'}{\rho \cdot \partial y'} = \nu \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right) + Y' \quad \dots\dots\dots(2)$$

連続の式より

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \quad \dots\dots\dots(3)$$

ただし ν : 動粘性係数, X' , Y' : 外力

ここで基準長さとして吹出口巾 (L) をとり, 基準速度として吹出速度 (U) をとって, $x'=x \cdot L$, $y'=y \cdot L$, $u'=u \cdot U$, $v'=v \cdot U$ とおき時間 t' のかわりに $t'=t \cdot L/U$, またベルヌーイの定理から $P'=P \cdot \rho \cdot U^2$ とおいて各々を無次元化すると(1)~(3)式は,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial u \cdot v}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + X \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial u \cdot v}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + Y \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots(6)$$

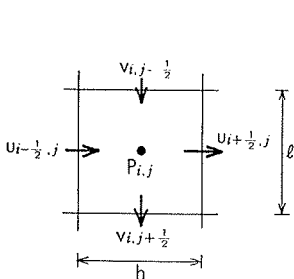


図-1 セルでの圧力P, 速度 u, v の定義

図-1 の如く, 分割されたメッシュをセルと称しセル中心での圧力を P , セル境界面上での速度を u, v と定義し u については $(i+\frac{1}{2}, j)$ 点, v については $(i, j+\frac{1}{2})$ 点を差分中心として次式のように差分近似する。ただし $(n+1)$ は次の時間ステ

ップを表わし n 時点での添字 n は省略する。また h, l はセル巾を, k は時間間隔を基準量で無次元化したものである。

$$\begin{aligned} \frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - u_{i+\frac{1}{2},j}^n}{k} &= \frac{(u_{i,j})^2 - (u_{i+1,j})^2}{h} \\ &+ \frac{(u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}})(v_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}) - (u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}})(v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}})}{l} \\ &+ \frac{1}{Re} \left(\frac{u_{i+\frac{3}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j} - 2u_{i+\frac{1}{2},j}}{h^2} \right. \\ &\left. + \frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1} + u_{i+\frac{1}{2},j-1} - 2u_{i+\frac{1}{2},j}}{l^2} \right) \\ &+ \frac{P_{i,j} - P_{i+1,j}}{h} + X \quad \dots\dots\dots(7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{k} &= \frac{(v_{i,j})^2 - (v_{i,j+1})^2}{l} \\ &+ \frac{(u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}})(v_{-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}) - (u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}})(v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}})}{h} \\ &+ \frac{1}{Re} \left(\frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}} + v_{i-1,j+\frac{1}{2}} - 2v_{i,j+\frac{1}{2}}}{h^2} \right. \\ &\left. + \frac{v_{i,j+\frac{3}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}} - 2v_{i,j+\frac{1}{2}}}{l^2} \right) + \frac{P_{i,j} - P_{i,j+1}}{l} + Y \quad \dots\dots\dots(8) \end{aligned}$$

また(6)式を $(n+1)$ 時点で差分すれば

$$\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - u_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}}{h} + \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}}{l} = 0 \quad \dots\dots\dots(9)$$

(9)式に(7), (8)式を代入すると圧力 P に関する Poisson 方程式が得られる。この式を解いて P をもとめ次に $(n+1)$ 時点の速度 u^{n+1}, v^{n+1} を(7), (8)式からもとめることになる。

ところで外力はないものとするれば $X=Y=0$, セルを正方形とすれば $h=l$ となり解くべき Poisson 方程式は次のように簡単になる。

$$(P_{i+1,j} + P_{i,j+1} + P_{i-1,j} + P_{i,j-1} - 4P_{i,j})/h^2 = R_{i,j} \quad \dots\dots\dots(10)$$

$$\begin{aligned} R_{i,j} &= \{ (u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j} + v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}) / k \\ &- (L_{i+\frac{1}{2},j} - L_{i-\frac{1}{2},j} + M_{i,j+\frac{1}{2}} - M_{i,j-\frac{1}{2}}) \} / h \\ L_{i+\frac{1}{2},j} &= \{ (u_{i+1,j})^2 - (u_{i,j})^2 + (uv)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \\ &- (uv)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \} / h - \{ u_{i+\frac{3}{2},j} - 2u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j} \\ &+ u_{i+\frac{1}{2},j+1} - 2u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j-1} \} / h^2 \cdot Re \end{aligned}$$

$$M_{i,j+\frac{1}{2}} = \{ (uv)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (uv)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + (v_{i,j+1})^2 - (v_{i,j})^2 \} / h - \{ v_{i+1,j+\frac{1}{2}} - 2v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i-1,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j+\frac{3}{2}} - 2v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}} \} / h^2 \cdot R_e$$

ここで定義されていない点の速度は隣接する点の速度の単純平均でもとめるものとする。例えば

$$\left. \begin{aligned} u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} &\equiv \frac{1}{2} (u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j+1}) \\ v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} &\equiv \frac{1}{2} (v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i+1,j+\frac{1}{2}}) \\ u_{i,j} &\equiv \frac{1}{2} (u_{i-\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j}) \\ v_{i,j} &\equiv \frac{1}{2} (v_{i,j-\frac{1}{2}} + v_{i,j+\frac{1}{2}}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

2.2. 改良MAC法

Hirt らによって示された手法^{3),4)}であり連続の式を含ませた(10式)の Poisson 方程式を解くかわりに圧力および速度を反復修正することにより連続の式を満たすようにするものでありより直接的に圧力Pをもとめ得る。圧力および速度の第l回反復値を次式でもとめる。

$$\left. \begin{aligned} P_{i,j}^{l+1} &= P_{i,j}^l + \delta P_{i,j} \\ u_{i+\frac{1}{2},j}^{l+1} &= u_{i+\frac{1}{2},j}^l + (k/h) \delta P_{i,j} \\ u_{i-\frac{1}{2},j}^{l+1} &= u_{i-\frac{1}{2},j}^l - (k/h) \delta P_{i,j} \\ v_{i,j+\frac{1}{2}}^{l+1} &= v_{i,j+\frac{1}{2}}^l + (k/l) \delta P_{i,j} \\ v_{i,j-\frac{1}{2}}^{l+1} &= v_{i,j-\frac{1}{2}}^l - (k/l) \delta P_{i,j} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

ここに $\delta P_{i,j}$ は本来0となるべき連続の式の未満足分Dに比例するようにとる。

$$\delta P_{i,j} = -\beta D_{i,j} \dots\dots\dots(13)$$

$$D = \frac{(u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j})}{h} + \frac{(v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}})}{l} \dots\dots\dots(14)$$

$$\beta = \frac{\beta_0}{2k} \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{l^2} \right) \dots\dots\dots(15)$$

β_0 は relaxation factor で $\beta_0 < 2$ であることが必要である。一般には $\beta_0 = 1.7$ を使用する。

いま時刻n時の u, v の初期値 (時刻 n-1 時の u, v, P の最終値を(7), (8)式に代入して得られたもの) を(13)式に代入して $\delta P_{i,j}$ をもとめこれを(12)式に代入して次の反復値 u, v, P を計算する。この操作を

くりかえしすべてのセルで $D_{i,j}$ が0に近い決められた値以下になった時点での u, v, P をその時刻の最終値とする。これを(7), (8)式に代入して次の時間ステップの u, v をもとめる。このようにして u, v, P を反復修正しながら時間ステップをすすめるわけである。

2.3. 境界条件

壁面上を free-slip とするか no-slip とするかによって境界条件は異なってくるが、ここでは no-slip とする。図-2を参照にして各壁体の境界条件を示せば次のようになる。

(i) 右壁体

$$u_0 = 0, u_1' = u_1 \\ v_0' = -v_0, v_1' = -v_1$$

これらを(7), (8)式に代入すると圧力条件は

$$P' = P + 2u_1 / R_e \cdot h$$

(ii) 左壁体

$$u_0 = 0, u_1' = u_1 \\ v_0' = -v_0, v_1' = -v_1$$

$$P' = P - 2u_1 / R_e \cdot h$$

(iii) 上壁体

$$v_0 = 0, v_1' = v_1 \\ u_1' = -u_1, u_0' = -u_0$$

$$P' = P - 2v_1 / R_e \cdot h$$

(iv) 下壁体

$$v_0 = 0, v_1' = v_1 \\ u_1' = -u_1, u_0' = -u_0$$

$$P' = P + 2v_1 / R_e \cdot h$$

(v) 吹出口

吹出無次元速度を1とするならば、

$$v_0 = v_1' = 1 \\ u_1' = u_2' = 0 \\ P_1' = (v_2^2 - 1) + (2 - v_1) / R_e \cdot h + P_1$$

P_2' も全く同様である。

(vi) 吸込口

同様に吸込無次元速度を1とするならば

$$v_1' = v_2' = v_3' = 0 \\ u_0 = u_3 = u_2' = u_5' = 1 \\ P_1' = (u_1^2 - 1) + (u_2 - 2) / R_e \cdot h + P_1 \\ P_2' = (u_4^2 - 1) + (u_5 + u_6 - 2) / R_e \cdot h + P_2$$

もし free-slip とするならば、 $u = 0, \partial v / \partial N = 0$ の条件を用いることになる。

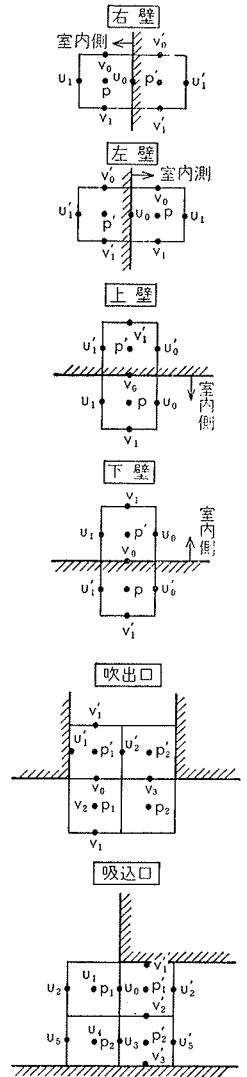


図-2 壁面、吹出・吸込口におけるセルのとり方

2.4. 修正MAC法 (SUMMAC 法)

R. K. C. Chan 氏らによって提案された手法⁵⁾であり従来の MAC 法をさらに精度よくしたものである。従来の MAC 法では図-3のCなる Marker の速度成分の計算は次式のように線形内挿で行なっている。

$$u_C = \frac{A_1 \cdot U_{10} + A_2 \cdot U_{13} + A_3 \cdot U_9 + A_4 \cdot U_{12}}{h \cdot l} \dots (16)$$

ところが(16)式は速度が単調に変化する領域では適当であるが Marker が速度最大（あるいは最小）付近にあるときは誤差が大きくなる。SUMMAC法では図-3のKなる Marker の速度成分 U_k は0点について Taylor 展開することによりもとめる。

$$\begin{aligned} u_k = & u_0 + m \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 + n \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 + \frac{1}{2!} \left[m^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_0 \right. \\ & + 2m \cdot n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)_0 + n^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_0 \left. + \dots \right] \approx u_0 \\ & + \left(\frac{m}{h} \right) \left(\frac{u_1 - u_3}{2} \right) + \left(\frac{n}{l} \right) \left(\frac{u_2 - u_4}{2} \right) \\ & + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{m}{h} \right)^2 (u_1 + u_3 - 2u_0) + \left(\frac{n}{l} \right)^2 (u_2 + u_4 - 2u_0) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{m}{h} \right) \left(\frac{n}{l} \right) (u_5 - u_6 + u_7 - u_8) \right] \end{aligned} \dots (17)$$

そのほか自由表面付近での u, v, P の設定に関して改良点があるがここでは記述を省略する。

3. ケーススタディ

図-4に示すように天井中央吹出・右壁下吸込の二次元室内を20×20のセルに分割する。基準長さは吹出口巾とし基準速度は吹出速度とする。初期条件としては圧力、速度ともすべて0としている。レイノルズ数 (Re) 10における定常状態 (時間ステップ $k=50$) の流線図を図-5に示す。またこのときの各点の合成速度と方向を図-6に示す。(紙面の都合上セル1個おきの速度を示す。) 図中の速度は吹出速度を基準とした無次元速度である。

図-7に時間ステップに対する室中央付近のセルの平均速度の変動を示す。時間ステップ17でほぼ定常状態に達していることがわかる。なお今回の計算では計算の安定条件を考慮して、 $h=l$ の正方形セルとし、吹出・吸込巾をセル2個分とした。(すなわち $h=0.5$) また無次元時間ステップは $k=0.5$ として計算をすすめた。

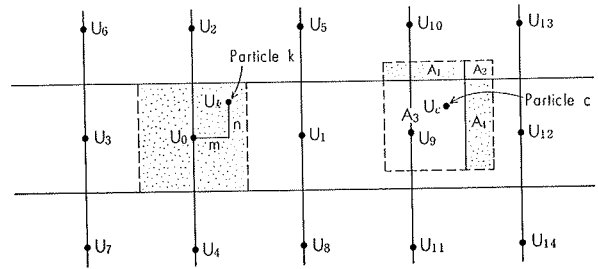


図-3 Marker の内挿手法

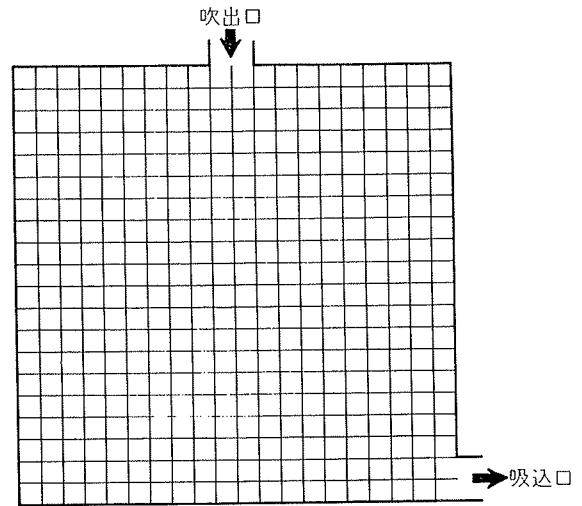


図-4 計算室モデル (20×20分割セル)

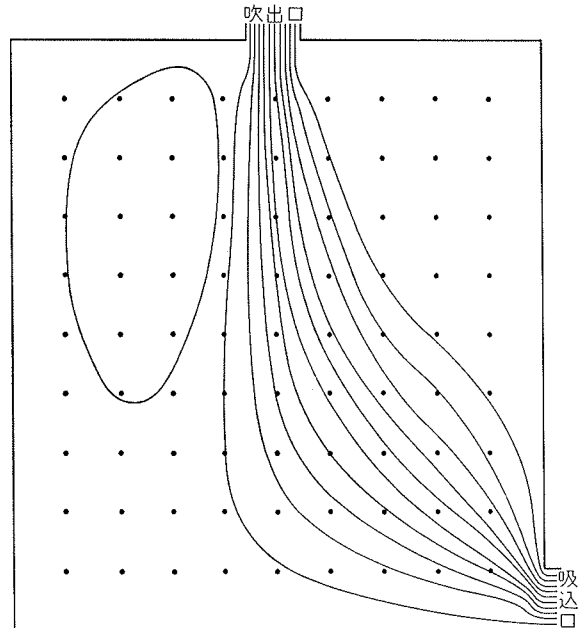


図-5 流線図 ($Re=10, k=50$)

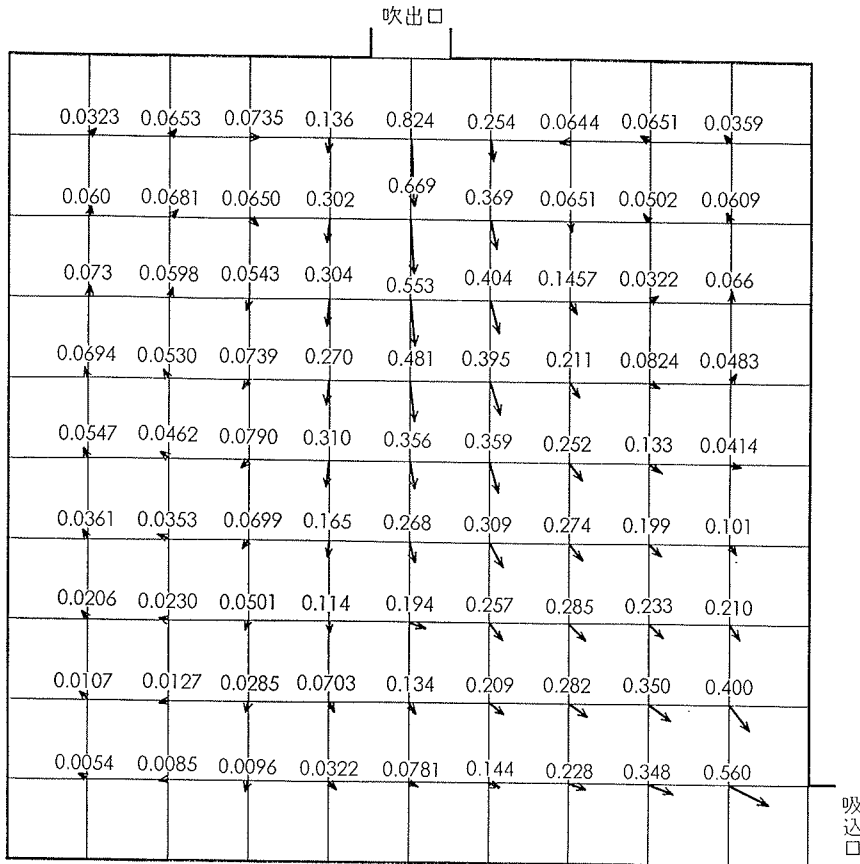


図-6 定常状態における速度分布 ($R_0=10$, $k=50$)

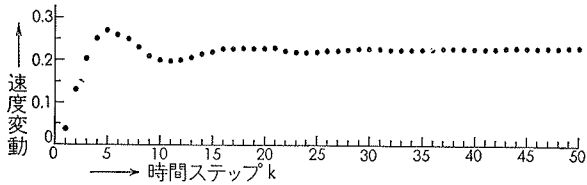


図-7 時間ステップに対する平均速度変動

参考文献

- 1) 野村, 松尾, 貝塚他: 室内空気分布の数値解法に関する研究 (その1~4), 建築学会大会, 1974
- 2) Harlow and Welch: Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface, phys. Fluids Vol. 8, 1965
- 3) Hirt and Cook: Calculating Three-Dimensional Flows around Structures and over Rough Terrain. J. Comput. phys. Vol. 10, 1972
- 4) Nichols and Hirt: Calculating Three-Dimensional Free Surface Flows in the Vicinity of Submerged and Exposed Structures, J. Comput. phys. Vol. 12, 1973
- 5) Chan and Street: A Computer Study of Finite-Amplitude Water Waves, J. Comput. Phys. Vol. 6, 1972
- 6) 日野: コンピュータと流体力学—最近の二・三の問題点, 土木学会誌, 56—11
- 7) 勝田, 土屋: 室内空気分布の数値解法について, 建築学会大会, 1968
- 8) 藤本: 流体力学, 養賢堂