

プレストレストコンクリート原子炉圧力容器 (PCRV)構造物に関する研究

—II-4 コンクリート多孔板の有効弾性定数—

PCRV 研究グループ

Study on Prestressed Concrete Reactor Vessel (PCRV) Structures

—II-4 Effective Elastic Constants
for Perforated Concrete Plates—

PCRV Research Group

Abstract

A procedure for analyzing the stresses in perforated plates based on treating the perforated material as an equivalent solid material with modified elastic constants has been established. This paper presents these constants, referred to as effective elastic constants, for perforated concrete plates with triangular penetration patterns such as top head slabs of prestressed concrete reactor vessels. A formulation of the relationship between the effective elastic constants and the elastic constants of the material is derived from the two-dimensional elastic theory, and extensive numerical results covering a wide range of ligament efficiencies in the perforated plates with reinforcement are given for the plates. Finally, the applicabilities of these values to the plates in bending are examined in a number of examples.

概要

PCRV トップヘッドスラブは三角形パターンで多数の燃料交換用ペネットレーションが規則的に設けられ、そして各ペネットレーションは鋼板で内張りされた厚肉コンクリート円板である。このような多孔板をそれと等価な剛性を持った無孔板に置換し、多孔板を無孔板として近似的に解析することが可能である。この論文は、多孔板の弾性定数と無孔板の弾性定数(有効弾性定数)との間にある関係を 2 次元弾性論を用いて誘導し、そして平面応力・平面歪状態に対して得られた 2 つの関係式から求めた有効ヤング係数と有効ボアソン比について述べると共にそれ等の結果の適用性について論じたものである。

更に、多孔板の形状効果、ペネットレーションライナーの剛性効果及び鋼材とコンクリート材の弾性定数比等をパラメーターとし、広範囲に亘る多孔板の有効弾性定数を図表化している。

1. 序

FEM のような近似解析法を用いれば、多孔板のような複雑な構造物を解析することも可能である。しかし、PCRV トップヘッドスラブのように数多くのペネットレーションを持ち、且つ厚肉スラブの構造物になると、その応力状態は 3 次元的であり、それを忠実にモデル化して解析するには 3 次元 FEM 解析が必要となるし、又、その解析に要する労力及び演算コスト等についても容易でないものを持っている。それに対し、多孔板に設けられた孔の配置の規則性を利用し、その板と等価な剛性を持った無孔板の弾性定数(有効弾性定数)を求め、多孔板を無孔板として近似的に解析する手法では上記のような難しさを消去することができる。

多孔板に対するこのような近似解析法についてはこれまでにも実験的且つ理論的に種々研究されている。

そして、ASME の ‘Boiler and Pressure Vessel Code’ [1] では孔の配置が三角形パターンの多孔板の有効弾性定数を規定し、それを用いた応力解析法を既に規準化している。これ等の定数は多孔板の形状とその材料の弾性定数から求められている。一方、PCRV トップヘッドスラブのようなコンクリート多孔板の場合、孔にペネットレーションライナーのようなライニング材乃至補強材が設けられることが多く、又その剛性が有効弾性定数に関係すると考えられる。

Bailey と Fidler [2] 及び Harrop [3] は円孔に補強材を持った多孔板の有効ヤング係数を補強材の剛性効果をパラメータに加えて理論的且つ実験的に求めている。しかし、彼等は有効ボアソン比については考えていないので、求めた結果の適用性については検討の余地が残されていると思う。又、補強材を含まない多孔板の有効弾性定数(ヤング係数とボアソン比)については O'Donnell と Langer [4], [5] が前記 ASME Code の

基礎となるようなものを提案している。更に、Slot と Yalch [6] は平面応力状態の三角形パターンの多孔板の等価剛性を理論的に誘導し、それが光弾性実験の結果とも良く一致することを示している。そして、O'Donnell と Slot [7], [8] はこれまでに提案されてきた多孔板の有効弹性定数について更に理論的な検討を行っている。

この論文は、上記 O'Donnell, Slot 等の多孔板に対する有効弹性定数と同じ概念を用い、コンクリート多孔板の有効弹性定数を求め、その適用性について検討したものである。

2. 理論的な考察

孔を含んだ2次元問題の応力分布はその弹性定数(E, ν)に依存しないということは弹性理論から良く知られている。換言すれば、多孔板の応力分布はその形状だけに関係するというこの特徴を利用し、多孔板の剛性と等価な剛性を持った無孔板の弹性定数と材料の弹性定数との間に存在する関係を求める。

図1に示すような三角形パターンの多孔板の場合を考える。その多孔円板の外周縁辺に沿って一様な半径方向荷重を作らせた時、その板の各円孔周辺の応力場は、板の外縁部を除き、相似することが光弾性実験などで確認されている。そして、その有効弹性定数は等方性的であるということがこれまでの研究で認められている。

T. Slot はこの特徴を利用し、図2に示すような単位要素を用い、そのグロスの変位量から多孔板の剛性を評価する方法を示し、そして、その単位要素の境界条件に対する解析上の仮定も光弾性実験でその妥当性が確認されている[6]。しかし、彼と O'Donnell は有効弹性定数を評価する際には、図3に示すような単位要素に一方向の一様な荷重を作らせた時のグロスの2方向変位を用い、それぞれの変位が有効弹性定数を持った無孔板の単位要素の相当変位と等価になるようにして有効ヤング係数と有効ボアソン比を求めている[8]。この論文では、多孔板に含まれる単位要素を用い、そのグロスの変位から有効弹性定数を求めるような第1近似手法を採用する場合、その解析に用いる単位要素の境界条件を多孔板に含まれる単位要素の実際の境界条件（各円孔相互の干渉効果が含まれる）に合せた方がより近似精度が良くなると考え、T. Slot の始めの考え方を発展させた方法を用いて多孔板の有効弹性定数を求めている。

一方、多孔板の外縁部に於ける応力の乱れに対し、ASME Code では有効半径 R^* というものを導入し、

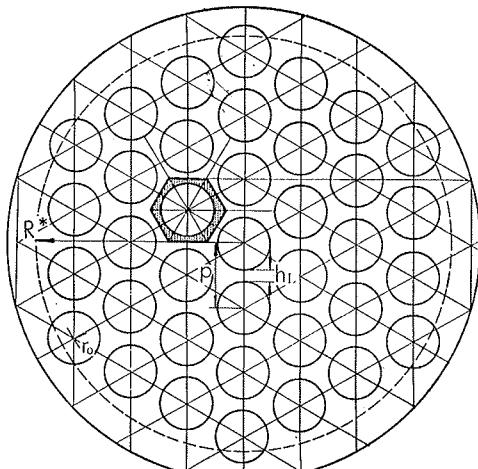


図-1 三角形パターンの多孔板の概念図

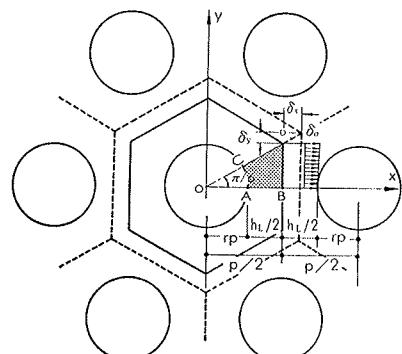


図-2 三角形パターンの多孔板の単位要素(1)

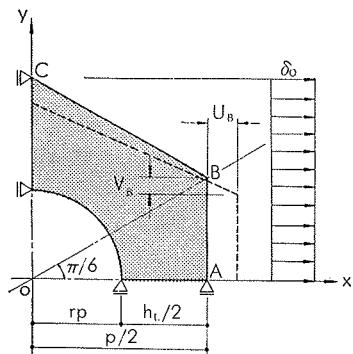


図-3 三角形パターンの多孔板の単位要素(2)

この有効半径と有効弹性定数を用いて多孔板を無孔板として解析できるようにしている。尚、この有効半径 R^* は次式で表示されている。

$$R^* = r_0 + (p - h_L)/4 \quad (1)$$

ここで、 r_0 は多孔板の中心から最外縁部に位置する円孔の中心までの距離で、 p は孔ピッチ、 h_L は最小断面位置に於ける公称幅を示す。このような有効半径 R^* を理論的に求めることは容易ではなく、(1)式も経験的に設定されたものと考えられる。筆者も有効半径については ASME Code に準拠することにし、多孔板の材料の弹性定数と有効弹性定数との間に存在する

関係について以下に述べることにする。

2.1. 平面応力状態の多孔板

平面応力状態を考えると、弾性理論からその応力一歪、歪一変位の関係は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \partial u / \partial x = (\sigma_x - \nu \sigma_y) / E \\ \varepsilon_y &= \partial v / \partial y = (\sigma_y - \nu \sigma_x) / E \\ \gamma_{xy} &= \partial v / \partial x + \partial u / \partial y = \tau_{xy} / G \\ ; \quad G &\equiv E / 2(1 + \nu) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

一方、図2の単位要素の境界上に作用する力の合力は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^y \sigma_x dx &= q = \sigma_0 p / 2\sqrt{3}; \quad x = p/2 \\ \int_0^x \sigma_y dy &= \sqrt{3}q = \sigma_0 p / 2; \quad y = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

又、多孔板の対称条件から、境界BD上のx方向の変位は一定であり、そのグロスのx、y方向変位 δ_x , δ_y は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} E\delta_x &= \int_0^x (\sigma_x - \nu \sigma_y) dx \\ &= \sigma_0 p / 2\sqrt{3} \cdot [f(\eta) - \sqrt{3}\nu] \\ E\delta_y &= \int_0^y (\sigma_y - \nu \sigma_x) dy \\ &= \sigma_0 p / 2\sqrt{3} \cdot [g(\eta) - \nu] \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここで、 $f(\eta)$, $g(\eta)$ は形状だけに関係する関数である。この単位要素の場合には、 $g(\eta) = f(\eta) / \sqrt{3}$ という関係を持っている。

次に、図2に相当する無孔板の単位要素についての形状関数を $f(\eta_0)$ とすれば、そのグロスのx方向変位 δ_{x0} は

$$E\delta_{x0} = \sigma_0 p / 2\sqrt{3} \cdot [f(\eta_0) - \sqrt{3}\nu] \quad (5)$$

となる。式(4)の第1式と式(5)から、 δ_{x0} と δ_x の比率をKとすると、

$$K = \delta_{x0} / \delta_x = [f(\eta_0) - \sqrt{3}\nu] / [f(\eta) - \sqrt{3}\nu] \quad (6)$$

となる。

三角形パターンの多孔板全体の変形を考えた場合、板が半径方向の一様な縁荷重を受ける時、その単位要素の有孔正六角形板は変形後も正六角形となる。それ故、図4に示すように、単位要素の境界上に於ける相対変位量を δ_0 とした時、多孔板の中心からの距離rの点の半径方向変位uは近似的に次式で表わせる。

$$u \approx \delta_0 \cdot 2r/p \quad (7)$$

ここで、 δ_0 は(6)式の δ_x と等価なものであり、更に無孔円板の半径方向変位についての式から、 $\delta_{x0} \approx (1-\nu) \sigma_0 p / 2E$ と与えられるので、(7)式は次のように変形される。

$$u \approx (1-\nu) \sigma_0 r / EK \quad (8)$$

次に、上記多孔板と等価な剛性を持った無孔板のヤング係数とポアソン比を E^* , ν^* とすれば、その半径方向変位は、

$$u^* = (1-\nu^*) \sigma_0 r / E^* \quad (9)$$

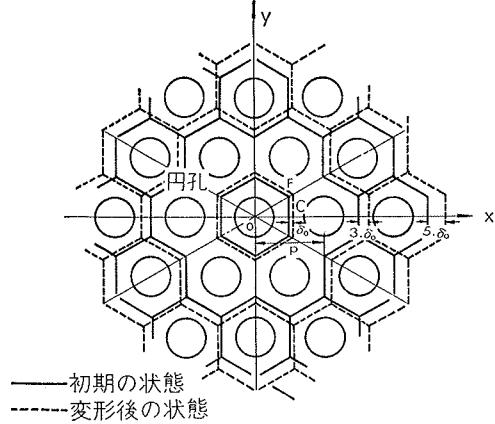


図-4 三角形パターンの多孔板の変形

と表わされる。このuについての2つの式を等しく置けば、弾性定数間の1つの関係式が得られる。

$$(1-\nu) / EK = (1-\nu^*) / E^* \quad (10)$$

尚、この関係式はT. Slotが誘導したものと同じものである。そして、平面応力状態の多孔板に対しては、Kの値が既知であれば、多孔板を無孔板として評価することができ、 E^* , ν^* を求める必要はない。

2.2. 平面歪状態の多孔板

前節と同様に、平面歪状態に於ける多孔板の単位要素(図2)、無孔板の単位要素のそれぞれのグロスのx方向変位を $\bar{\delta}_x$, $\bar{\delta}_{x0}$ とし、形状関数も $f(\bar{\eta})$, $f(\bar{\eta}_0)$ とすれば、応力一歪、歪一変位関係式から次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} E\bar{\delta}_x &= \int_0^x [(1-\nu^2)\sigma_x - \nu(1+\nu)\sigma_y] dx \\ &= \sigma_0 p / 2\sqrt{3} \cdot [(1-\nu^2)f(\bar{\eta}) - \nu(1+\nu)\sqrt{3}] \\ E\bar{\delta}_{x0} &= \sigma_0 p / 2\sqrt{3} \cdot [(1-\nu^2)f(\bar{\eta}_0) - \nu(1+\nu)\sqrt{3}] \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

又、 $\bar{\delta}_{x0}$ と $\bar{\delta}_x$ の比率を \bar{K} とする。

$$\bar{K} = \bar{\delta}_{x0} / \bar{\delta}_x = [(1-\nu)f(\bar{\eta}_0) - \sqrt{3}\nu] / [(1-\nu)f(\bar{\eta}) - \sqrt{3}\nu] \quad (12)$$

この \bar{K} 値を用いて多孔板の半径方向変位を表示すると

$$\bar{u} \approx (1+\nu)(1-2\nu)\sigma_0 r / E\bar{K} \quad (13)$$

となる。又、有効弾性定数を持つ無孔板の変位は、

$$\bar{u}^* = (1+\nu^*)(1-2\nu^*)\sigma_0 r / E^* \quad (14)$$

となる。そして、 $\bar{u} = \bar{u}^*$ とすれば、

$$(1+\nu)(1-2\nu) / E\bar{K} = (1+\nu^*)(1-2\nu^*) E^* \quad (15)$$

を得る。この式(15)が弾性定数間のもう一つの関係式である。

尚、 $f(\bar{\eta}_0)$, $f(\bar{\eta})$ も形状だけに関係する関数で、材料の弾性定数とか拘束条件(面に直交する方向の応力 σ_z の有無)には無関係なものであるから、

$$f(\bar{\eta}_0) = f(\eta_0), \quad f(\bar{\eta}) = f(\eta) \quad (16)$$

と考えることができる。この関係の妥当性は次のように

なことからも認められる。即ち、ポアソン比 $\nu=0$ のとき、単位要素のグロスの変位は平面応力状態の場合でも又平面歪状態の場合でも等価である。これから、(10)式に示す関係が認められるし、又、中心に円孔を持った円板の平面問題の解からも証明することができる。このようなことから、平面応力状態又は平面歪状態どちらか1つの場合の単位要素のグロスの変位が求めれば、K及び \bar{K} の値を得ることができる。

以上のようにして求めたKと \bar{K} の値を用いれば、(10)と(15)の2つの式から多孔板の有効ヤング係数 E^* と有効ポアソン比 ν^* が得られる。

$$\begin{aligned} E^*/E &= (1-\nu^*) K / (1-\nu) \\ &= (1+\nu^*)(1-2\nu^*) \bar{K} / (1+\nu)(1-2\nu) \quad (17) \\ \nu^* &= \{A + [A^2 - 8(1-\nu)\bar{K} \cdot A]^{1/2}\} / 4(1-\nu)\bar{K} \quad (18) \\ ; A &\equiv (1+\nu)(1-2\nu)K - (1-\nu)\bar{K} \end{aligned}$$

これ等の定数は平面応力、歪状態の多孔板を同時に満足するものであり、従って、 ε_z =一定の一般化された平面歪状態の多孔板に対しても適用できるものである。

ペネトレーションライナーのような異種の材料を含むコンクリート多孔板の場合、そのグロスの変位を(4)、(11)式のような形で表示することは厳密にはできないが、その剛性効果を形状の関数 $f(\eta)$ だけに関係するものと看做し、(4)式と(11)式を用いて近似的に評価する。その時のEと ν にはコンクリートのヤング係数とポアソン比を適用している。

3. 単位要素の解析

図5に示すような単位要素の解析手法について述べる。ここで、点ABEDで閉じられた領域はペネトレーションライナーのような鋼材に相当する部分で、点BCFEで閉じられた領域はコンクリート部分である。そして、それぞれの材料のヤング係数とポアソン比を E_s 、 ν_s 及び E_c 、 ν_c とする。

このような単位要素の境界条件を満足する応力関数 ϕ は次のように設定される。

$$\begin{aligned} \phi_1 &= a_0 \ln r + b_0 r^2 + \sum_n \{a_n r^{6n+2} \\ &+ b_n r^{6n} + c_n r^{-6n} + d_n r^{-6n+2}\} \cos 6n\theta \\ \phi_2 &= A_0 \ln r + B_0 r^2 + \sum_n \{A_n r^{6n+2} \\ &+ B_n r^{6n} + C_n r^{-6n} + D_n r^{-6n+2}\} \cos 6n\theta \\ ; n &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、 ϕ_1 は鋼材部、 ϕ_2 はコンクリート部を支配する応力関数である。又、それぞれの応力関数は適合条件式 $v^4\phi=0$ を満足し、Michellが求めた一般解から容易に応力と変位の式が求められる。そして、級数

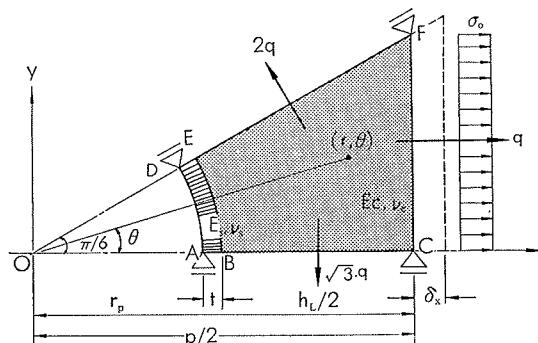


図-5 補強材を持った三角形パターンの多孔板の単位要素

項を $n=5$ までとすれば、これ等の式に含まれる任意定数 $a_0, b_0, a_n, b_n, c_n, d_n$ 及び $A_0, B_0, A_n, B_n, C_n, D_n$ は全部で44個となる。この任意定数をPoint Matching Methodを用いて有限個の境界条件から求める。

尚、この単位要素の境界条件は次のようになる。

- (1) AB; $\tau_{r\theta}=0, v=0$
- (2) DE; $\tau_{r\theta}=0, v=0$
- (3) AD; $\sigma_r=0, \tau_{r\theta}=0$
- (4) BE; $\sigma_r(\phi_1)=\sigma_r(\phi_2), \tau_{r\theta}(\phi_1)=\tau_{r\theta}(\phi_2)$
 $u(\phi_1)=u(\phi_2), v(\phi_1)=v(\phi_2)$
- (5) BC; $\tau_{r\theta}=0, v=0$
- (6) EF; $\tau_{r\theta}=0, v=0$
- (7) CF; $\tau_{xy}=0, u_x=\text{Const.}, q=\sigma_0 p/2\sqrt{3}$

応力関数 ϕ_1, ϕ_2 の性格から、境界条件(1), (2), (5), (6)は自動的に満足される。従って、残された条件式から44ヶの任意定数を決定する必要がある。具体的には、図6に示すように、BE, CF上にそれぞれ6ヶの境界点を設ければ、条件(3)から11ヶ、条件(7)から11ヶ計22式が得られ、残された22ヶの式が条件(4)から求められる。

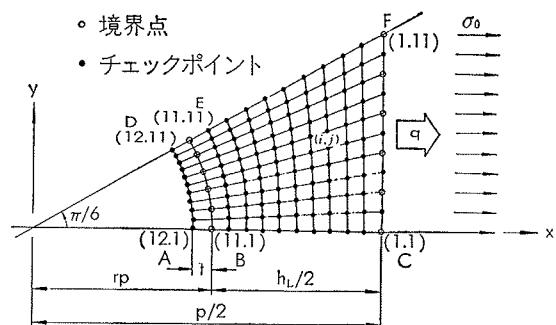


図-6 単位要素の境界点

実際の計算では、単位要素の形状と材料の弾性定数を次のようにパラメーター表示し、数多くの場合について解析した。

$$\xi = t/r_p$$

$$\eta = h_L/p$$

$$\phi_E = E_S/E_C; E_S = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$\phi_v = v_S/v_C = 1.8; v_S = 0.3, v_C = 1/6$$

ここで、 t はペネトレーションライナーの板厚、 r_p は円孔半径、 h_L は最小断面位置の幅、 p は円孔ピッチである。

4. 多孔板の有効弹性定数

三角形パターンのコンクリート多孔板の有効弹性定数を図 7～10 に示す。又、表 1 でこの解析で得られた結果と T. Slot, W. J. O'Donnell の求めた結果を比較している。

K の値について言えば、ここで得られたものは Slot が求めたものとほぼ同じ値となっている。しかし、有効弹性定数 E^* , v^* の値については、ここで提案している値と Slot と O'Donnell が求めたものとの間に差が認められる。特に有効ポアソン比 v^* については定量的だけでなく、定性的にも差がある。この差は、多孔板の有効弹性定数を求めるのに用いた単位要素の境界条件の差に依るものであると考えられる。

5. 有効弹性定数の適用性

図 11～16 は、有限要素法を用いて面外荷重を受ける多孔板を解いた結果と、有効弹性定数を用いた近似解析法に依る結果を比較したものである。それ等の図では多孔板の変形分布を無次元化して表示している。

尚、ここで解析した多孔板は、半径 125cm、板厚 5cm、孔の数 19 の円板で、圧力のような一様な分布荷重を載荷したものである。又、有限要素解析では三角形の平板要素と梁要素を用いて多孔板をモデル化し、解析コードには ASTRA を利用した。一方、無孔板としての解析では、ここで提案している有効弹性定数 E^* , v^* と ASME Code で規定されている値をコンクリート用に修正したもの及び有効半径 R^* を用い、そして平板理論を適用した。ASME Code の規定値の修正には参考文献[8]に示されている式を用いた。

それ等の図に見られるように、多孔板の曲げ問題に対しても、ここで提案する有効弹性定数の適用性が認められる。又、それを用いた解析結果の近似精度についても、今回の解析では ASME で規定する値を用いたものより一般に良好な結果を与え、提案する有効弹性定数が充分信頼できるものであることが認められる。

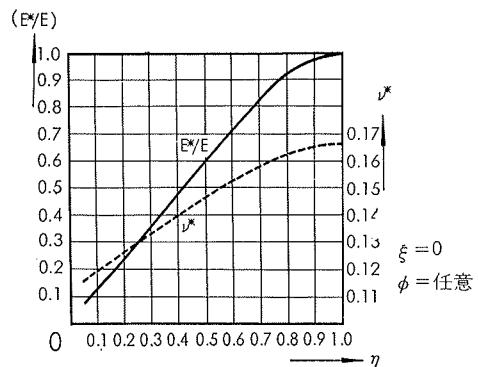


図-7 有効弹性定数(1)補強材なし

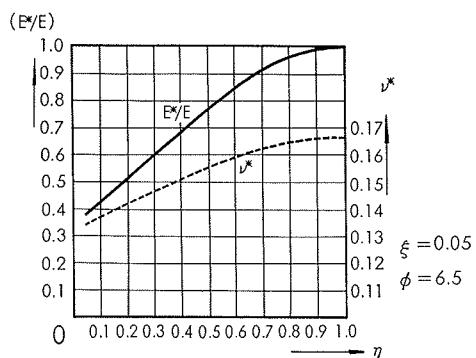


図-8 有効弹性定数(2)補強材有り

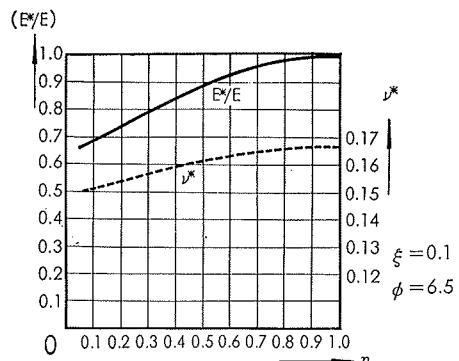


図-9 有効弹性定数(3)補強材有り

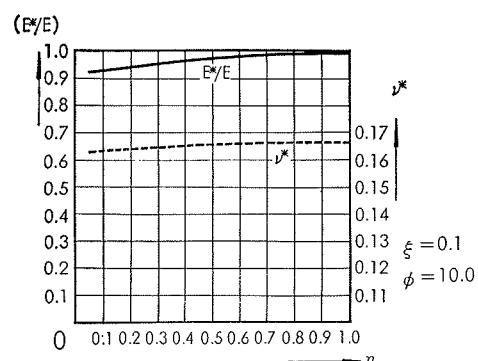


図-10 有効弹性定数(4)補強材有り

η	$\nu = 0$		Slot and O'Donnell *2 が提案する値								提案する有効弹性定数			
	K 提案	K _{Slot} ^{*1}	基本となる有効弹性定数(平面応力状態)				有効弹性定数(一般化された平面歪状態) ^{*3}				E/E	ν^*	G/G	
			E/E	E _z /E	ν_0^*	ν^*	E/E	ν^*	ν^*	G/G				
0.97	0.9987										0.9985	0.1666	0.9986	
.95	.9955										.9949	.1664	.9951	
.9	.9819										.9795	.1657	.9803	
.85	.9600										.9548	.1646	.9565	
.8	.9300										.9212	.1630	.9241	
.75	.8927										.8799	.1610	.8842	
.7	.8489	0.7895	0.9184	0.0712	0.2028	0.7658	0.794	0.229	0.225	0.771	.8319	.1586	.8377	
.65	.7999										.7790	.1560	.7862	
.6	.7465										.7220	.1532	.7304	
.55	.6896										.6622	.1501	.6717	
.5	.6303	0.632	0.5291	0.7733	0.1607	0.2489	0.4943	0.536	0.266	0.257	0.501	.6009	.1469	.6113
.45	.5693										.5387	.1436	.5496	
.4	.5076										.4768	.1402	.4879	
.35	.4457										.4156	.1368	.4265	
.3	.3842										.3557	.1334	.3661	
.25	.3234	0.323	0.2052	0.4899	0.3655	0.3997	0.1710				.2974	.1300	.3071	
.2	.2635	0.264	0.1462	0.4196	0.4449	0.4693	0.1161	0.150	0.474	0.460	0.119	.2407	.1266	.2493
.15	.2045	0.204	0.0929	0.3448	0.5457	0.5612	0.0694				.1856	.1232	.1928	
.1	.1459	0.146	0.0482	0.2654	0.6699	0.6779	0.0335	0.0498	0.680	0.669	0.0344	.1316	.1198	.1371
.05	.0863	0.087	0.0158	0.1815	0.8167	0.8193	0.0101	0.0164	0.820	0.814	0.0104	.0774	.1162	.0809

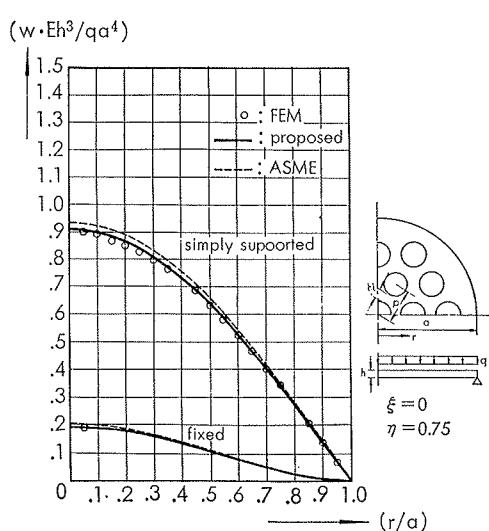
* 1 文献[6]で求められた値 * 2 文献[8]を参照 * 3 $\nu=0.2$ のとき表一1 三角形パターンの多孔板の有効弹性定数の比較 ; $\xi=0$, $\nu=1/6$ の場合

図-11 多孔板の変形(1)

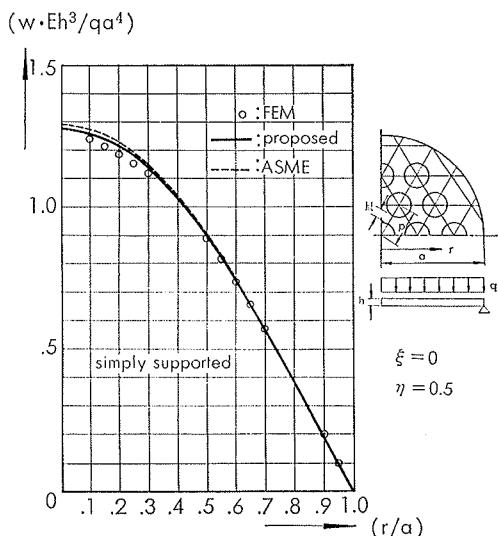


図-12 多孔板の変形(2)

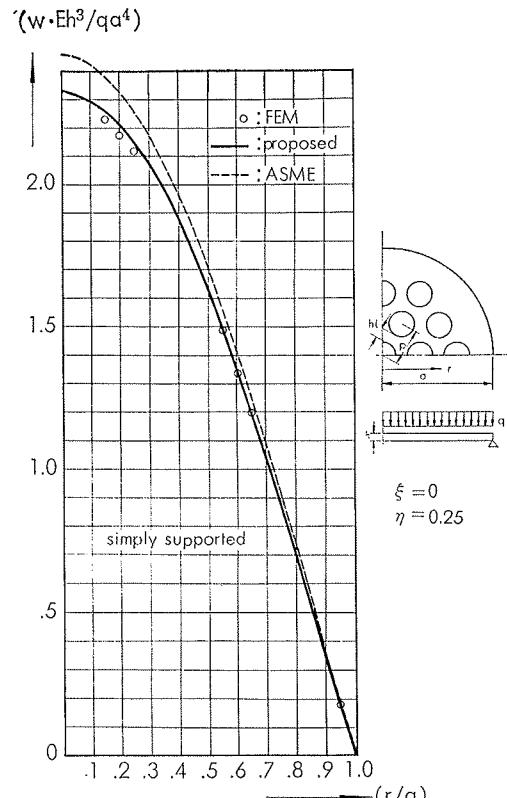


図-13 多孔板の変形(3)

6. まとめ

三角形パターンのコンクリート多孔板の有効弹性定数を2次元弹性論を用いて評価することが可能であり得られた結果の適用性も多孔板の平面問題だけでなく曲げ問題に対してもあることが認められる。

尚、有効弹性定数評価法は第1近似手法であり、又、その適用性についても充分な検討を行ったとは言えないでの、更に多角的な面からの検討を考えている。

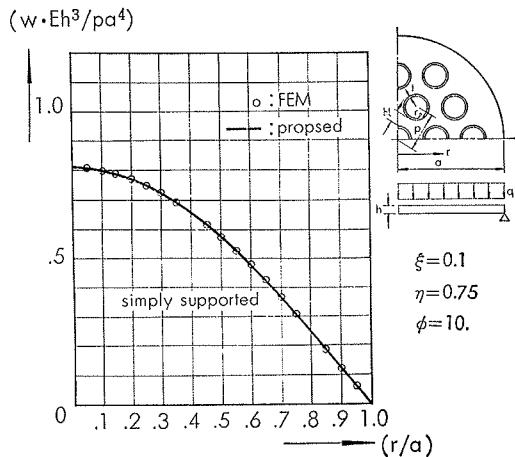


図-14 多孔板の変形(4)

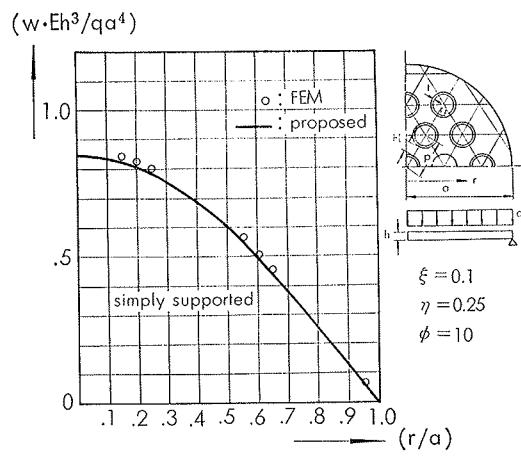


図-16 多孔板の変形(6)

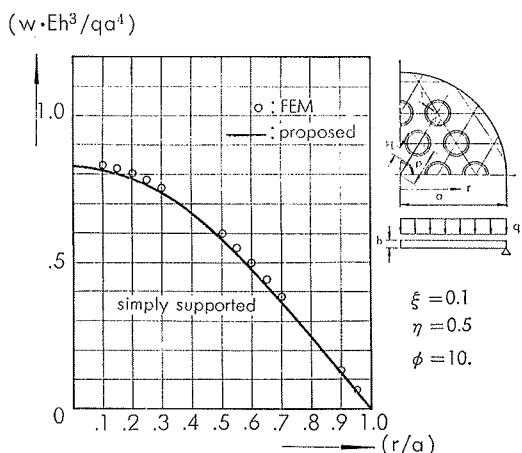


図-15 多孔板の変形(5)

7. 参考文献

- (1) ASME Boiler and Pressure Vessel Code, Section III, "Nuclear Vessel, Article 1-9", 1968 Edition
- (2) R. W. Bailey, R. Fidler, "Stress Analysis of Plates and Shells Containing Patterns of Reinforced Holes", Nucl. Eng. Design 3(1966)
- (3) J. Harrop, "Analysis of the Standpipe Zone of Prestressed Concrete Pressure Vessels," PCI Journal, June 1969
- (4) W. J. O'Donnell, B. F. Langer, "Design of Perforated Plates," Journal of Eng. for Industry, Aug. 1962
- (5) W. J. O'Donnell, "A Study of Perforated Plates with Square Penetration Patterns," Welding Research Council Bulletin '67
- (6) T. Slot, J. P. Yalch, "Stress Analysis of Plane Perforated Structures by Point-wise Matching of Boundary Conditions," Nucl. Eng. Design 4(1966)
- (7) W. J. O'Donnell, "Further Theoretical Treatment of Perforated Plates with Square Penetration Patterns," WRC Bulletin 151, 1970
- (8) T. Slot, W. J. O'Donnell, "Effective Elastic Constants for Thick Perforated Plates with Square and Triangular Penetration Patterns," Journal of Eng. for Industry, Nov. 1971

(文責 山口恒雄)