

# 構成要素の履歴減衰性に基づく構造物の動特性評価

鈴木 哲夫  
武田 寿一

## Dynamic Properties of Complex Structure Caused by Hysteretic Damping of Individual Structural Elements

Tetsuo Suzuki  
Toshikazu Takeda

### Abstract

This paper is concerned with the internal damping of a structure and estimates characteristics of a vibration system by complex stiffness analysis which considers the energy absorption property (hysteretic damping) of each structural element. As the first step, the effect of element hysteretic damping on dynamic response is studied by a one-degree-of-freedom system, and as the second step, it is shown that modal damping of a multi-degree-of-freedom system, differing from a viscous damping system, is the total sum of the energy absorption capacities in modal deformation at the individual elements. This method is more reasonable than the viscous damping system because the element damping effect for structural damping is clear and it can thus be applied to complex structures.

### 概 要

本報告は構造物の内部減衰性に関して述べたものであり、各構成要素の固有履歴特性に基づくエネルギー吸収性（履歴減衰）に着目した複素バネ解析により振動系の動特性を評価したものである。

要素の履歴減衰が振動系に組み込まれた時の動的応答に及ぼす効果を1自由度系で検討するとともに、多自由度系のモード減衰が粘性系と異なり、振動数に依存せず各部の振動勢力変化に基づいたエネルギー吸収性の総和となる事を示した。

上述の評価法は構造物全体の動特性に及ぼす構成要素の減衰性を充分把握できるものであり、複雑な構造物にも適用出来る点で粘性減衰系よりも合理的な手法である。

## 1. 序

構造物の動的応答を評価する際は減衰をいかに考えるかが重要となるが未だ減衰については不明確な点が多い。減衰効果の要因として種々挙げられており現在これらに検討を加えているが本報告はそのうちで構造物自体のエネルギー吸収に基づく減衰性に着目しこれが動的応答に及ぼす効果について述べたものである。このような内部減衰力は一般には剛性に比例した粘性減衰として評価されているが、その効果は構造物全体振動系の振動数に関係してくるものであり、各構成要素自体の減衰性の意味が曖昧である。一方構造物材料

は完全な弾性体というのは稀で一般的には土を含めて低応力レベルでも若干の非線形性を有している。各種部材のくり返し加力実験結果によればその履歴曲線は外力振動数によらずエネルギー吸収性（履歴減衰）が一定であり<sup>1)</sup>、振動数によって履歴が変化する粘性減衰表示ではこれを忠実に評価出来ない。従って構成部材又はバネそれぞれに振動数に依存しないエネルギー吸収性すなわち固有減衰量を与える必要があるし、又全体構造物の減衰性もそれらの集合として捉える事が、エネルギーの吸収性に基づく内部減衰力の評価としてはより合理的な手法といえよう。本報告では上述の一定履歴を有する部材が複素バネ表示によって得られる

事を示し、構造物全体も複素バネの集合として解析を行ったものである。先づ1自由度系において粘性減衰と履歴減衰(複素バネ)両系による応答のちがいを定常解に基づいて検討し、次に多自由度系の減衰性評価及び動的応答評価について述べたものである。

## 2. 1 自由度系の応答

### 2.1. 部材の減衰性

構造部材の減衰特性を1サイクル当りの吸収エネルギーと最大ポテンシャルエネルギーの比、すなわちエネルギー吸収率に基づいて定義する事にする。一般に部材実験の弾性的な範囲で得られる履歴ループの形状は図1に示したごとく変形レベル及び振動数に依存しないと仮定出来、1サイクル当りのエネルギー吸収率より次式の履歴減衰定数が定義出来る。

$$h_0 = (1/4\pi) \cdot (\Delta W/W) \quad (1)$$

本報告では上式に示した定数  $h_0$  を部材の減衰性として用いる事とする。

一方粘性減衰  $C$  及びバネ  $k$  よりなる要素の減衰効果について考えてみる。今  $x = A \cos \omega t$  の変位を受ける時の1サイクル当りのエネルギー吸収は  $\Delta W = \oint c \dot{x} dx = \pi c \omega A^2$

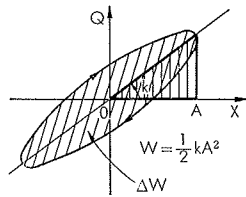


図-1 部材の履歴曲線

ポテンシャルエネルギーは、 $W = (1/2) k A^2$  より、この要素の減衰定数は次式のように振動数に比例した形となる。

$$h_{0v} = (1/4\pi) \cdot (\Delta W/W) = (1/2) (c\omega/k) \quad (2)$$

$$c = 2h_{0v} \cdot k/\omega$$

次に複素バネ  $k + ik'$  を考え、それが  $x = Ae^{i\omega t}$  の変位を受ける時の減衰効果を見る。変形と減衰力の実部より1サイクル当りのエネルギー吸収は  $\Delta W = \oint (-k' A \sin \omega t) d(A \cos \omega t) = \pi k' A^2$  又  $W = 1/2 k A^2$  より複素バネ要素の減衰定数として次式を得る。

$$h_{0c} = (1/4\pi) (\Delta W/W) = (1/2) (k'/k) \quad (3)$$

この場合  $h_{0c}$  は要素定数のみで定まり振動数  $\omega$  とは関係なく、複素バネ定数は次式となる。

$$k' = 2h_{0c} k \quad \therefore k + ik' = k(1 + 2h_{0c}i) \quad (4)$$

以上より部材の履歴減衰  $h_0$  を表現する方法として粘性減衰バネ及び複素バネが考えられるが、式(3)の振動数

に依存しない複素バネ要素の方が妥当と思われる。

一方部材の履歴減衰定数とそれが振動系に組みこまれた時の系の減衰定数との関係を粘性減衰バネで考えてみる。(2)式で示された粘性減衰  $C$  を有する系は

$$m\ddot{x} + (2h_{0v} \cdot k/\omega)\dot{x} + kx = F$$

$$\ddot{x} + (2h_{0v}n^2/\omega)\dot{x} + n^2x = F/m \quad (n^2 = k/m) \quad (5)$$

したがって一般に用いられている粘性減衰定数  $h$  とは次の関係にある。

$$h = h_{0v} (n/\omega) \quad h = c/2\sqrt{mk} \quad (6)$$

式(6)は振動系の減衰定数を構成部材の一定履歴減衰を基に評価したもので共振点では  $h$  と  $h_{0v}$  とは一致する。

### 2.2. 1 自由度系の応答

部材のエネルギー吸収率より定めた減衰定数  $h_0, h_{0v}, h_{0c}$  は表現のちがいはあれ任意の振動数で等しいとする事は出来るが、一般に用いられている振動系の粘性減衰定数  $h$  は  $\omega/n=1$  すなわち共振点でのみしか部材減衰性を表現していない事になり、振動系における減衰性も部材減衰に基づくとするならば定常振動においては  $h = n/\omega h_0$  の補正を要する。従来地震応答が擬似共振過程であるとしてこの補正による応答差は無視されているが、ここでは定常不規則外乱による応答のちがいを定量的に検討する。入力  $f(t) = \alpha e^{i\omega t}$  に対する粘性減衰定数  $h$  を有する振動系の定常応答は伝達関数の形で次式となる。

$$H_v(i\omega) = -\alpha / (n^2 - \omega^2 + 2hn\omega i) \quad (7)$$

一方部材減衰  $h_0$  を有する粘性減衰バネ又は複素バネ系の伝達関数は次式となる。

$$H_c(i\omega) = -\alpha / (n^2 - \omega^2 + 2h_0n^2i) \quad (8)$$

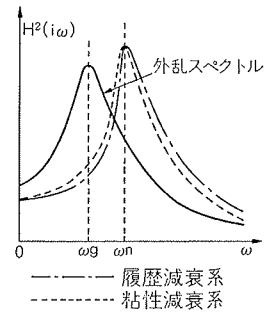


図-2 パワースペクトル

ここでは式(7), (8)の  $h, h_0$

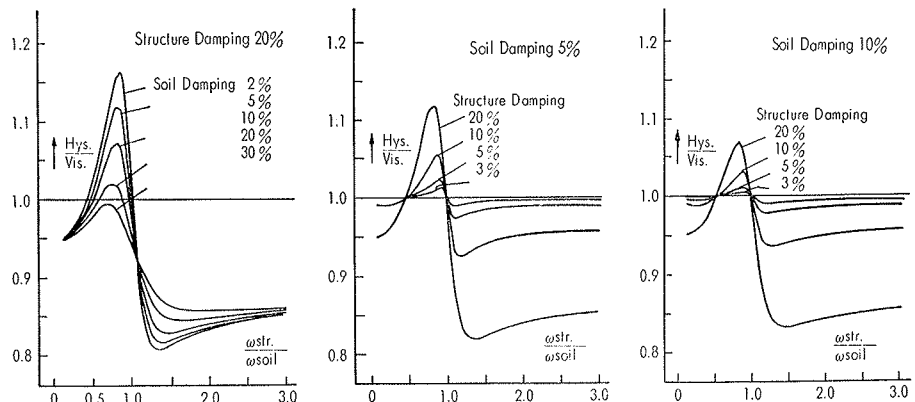


図-3 応答2乗平均

を同一値とした場合における各外力振動数 $\omega$ での応答差を求めたものである。定常振動のパワースペクトルは外乱スペクトルと伝達関数の2乗の積より

$$S_{xx}(\omega) = |H(i\omega)|^2 \cdot S_{ff}(\omega) \quad (9)$$

となり変位応答の2乗平均は次式となる。

$$\overline{X^2}(t) = \int_0^\infty S_{xx}(\omega) dx = \int_0^\infty H^2(i\omega) S_{ff}(\omega) d\omega \quad (10)$$

外乱のパワースペクトルとして表層地盤の動的性(卓越振動数 $\omega_g$ , 粘性減衰定数 $hg$ )を考慮して次式で定義した。

$$H_g^2(\omega) = \frac{1 + 4hg\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2\right\}^2 + 4hg\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2} \quad (11)$$

したがって式(10)は次式となる。

$$\overline{X^2}(t) = \int_0^\infty |H(i\omega)|^2 H_g^2(\omega) S_0 d\omega \quad (12)$$

$S_0$ : white noise の大きさ

式(6), (7)を(11)に代入し数値積分する事より, 定常応答量の比較が出来る。図2に示すように建物及び外乱スペクトルはいろいろな組合せが考えられるのでここでは減衰定数及び固有周期, 卓越周期をパラメトリックに変化させた。計算結果を図3.1~3.4に示す。これらの図で横軸は建物固有振動数と地盤卓越振動数の比を, 縦軸は部材減衰系( $h_0$ )と粘性減衰振動系( $h$ )の変位応答2乗平均の比を示したものである。図3.1は建物の減衰定数を20%とし地盤のそれを変化させた時であり, 図3.2, 3.3は地盤の減衰定数をそれぞれ5%, 10%とし建物のそれを変化させた場合である。これらの図より $h$ を全ての外力振動数に用いる事は, 構成部材のエネルギー吸収は各振動数で変化してくるが, 応答でみるかぎり $h_0$ を用いた系と大差ない。ただ1)外乱スペクトルの形状により両者の応答差は変化し, 地盤の減衰が大きく外乱がwhite noise的であれば差は小さいが逆に地盤減衰が小さい時は差が生じる。2)振動系における構成要素のエネルギー吸収率を一定とした時の応答が大きくなるのは外乱ピークが系の固有振動数より若干高い所に生ずる時で場合によっては約1.2倍位になる, という点は注意を要する。

### 3. 多自由度系のモード減衰

1 質点系において複素バネによる表現は部材の減衰性を1サイクル間での一定エネルギー吸収率の立場から定めるのには適しており粘性減衰バネとは異なりその減衰性は振動数により変化しないので定数として求まる事を示した。ここでは構成部材各々を複素バネで表現し, その集合としての多自由度振動系の減衰特性を検討する。多自由系度の振動方程式は次のように表

わせる。

$$[M]\{\ddot{x}\} + ([K] + i[K'])\{x\} = \{F\} \quad (13)$$

例えばせん断振動系の場合の $[K']$ は $2h_{0j} \cdot k_j$  ( $j=1 \sim n$ ,  $k_j=j$  番目バネ要素,  $h_{0j}=k_j$  要素の履歴減衰定数)を重ね合わせる事によって得られる tri-diagonal マトリックスとなる。式(13)の固有値問題を解くに当っては,  $\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \dot{x} \end{Bmatrix} = \{y\}$ ,  $\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ x \end{Bmatrix} = \{y\}$ として $2h$ 元の1階微分方程式に変換する事より次式をうる。

$$\begin{Bmatrix} OM \\ MO \end{Bmatrix} \{y\} + \begin{bmatrix} -M & O \\ O & K+iK' \end{bmatrix} \{y\} = \begin{Bmatrix} O \\ F \end{Bmatrix} \quad (14)$$

$\{y\} = e^{\mu t} \{y\}$ とおく事より特性方程式は

$$\det \begin{bmatrix} -M & \mu M \\ \mu M & K+iK' \end{bmatrix} = 0 \quad (15)$$

式(15)は複素係数をもつ行列式の固有値問題であり, その複素固有値 $\pm\mu$  (それぞれ $n\pi$ )は $s$ 次振動について示すと次のようになる。

$$s\mu = s\omega_R + i\omega_I \quad (\omega_R < 0, \omega_I > 0, s=1 \sim n) \\ = -\frac{s\omega}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\sqrt{1+4s^2h^2}-1} - i\sqrt{\sqrt{1+4s^2h^2}+1} \right) \quad (16)$$

したがってこの時の振動系減衰定数は $sh \approx s\omega_R/\omega_I$ となり,  $s$ 次固有モード $\{s_u\}$ は一般には $\{s_{uR} + i s_{uI}\}$ の複素数ベクトルとなる。

複素バネ解析より求まる多自由度系のモード減衰定数の物理的意味を考える事とし, 今簡単のため $[K']$ が $[K]$ に比例する場合, したがって各バネ要素の減衰( $h_{0j}=h_0$ ,  $j=1 \sim n$ )が一定時,  $\{s_u\}$ は実部のみとなり部材減衰で示したと同様に構造物全体の1サイクル間でのエネルギー吸収率は次式となる。

$$\Delta W_s = \pi \{s_u\}^T [K'] \{s_u\} = \pi \cdot 2h_0 \{s_u\}^T [K] \{s_u\}$$

$$W_s = 1/2 \{s_u\}^T [K] \{s_u\}$$

$$\therefore sh = (1/4\pi) (\Delta W/W) = h_0 \quad (s=1 \sim n) \quad (17)$$

上式より $\Delta W_s$ ,  $W_s$ は明らかに $s$ 次モードにおける各バネ要素のそれぞれエネルギー吸収及び最大ポテンシャルエネルギーの総和でありモード減衰定数 $sh$ はその比率となっているもので, 上記のような同一減衰性要素よりなる構造物のモード減衰は振動数によらず一定値をとる。したがって異なる減衰性を有する要素からなる構造物全体の複素バネ解析による減衰性評価は各モードにおける質点間の位相差も考慮した各部振動勢力の違いに基づく系全体のエネルギー吸収率を忠実に求めていると理解出来る。以上の考察より異なる減衰性をもつ部材より成る系の減衰を近似的に求める方法として, 振動勢力を非減衰時のモードに基づくとしてすなわち位相差を無視して次に示す近似式を得る<sup>3)</sup>。

$$sh = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\Delta W}{W} = \frac{\sum_j h_{0j} K_j s \delta_j^2}{\sum_j K_j s \delta_j^2} \quad (18)$$

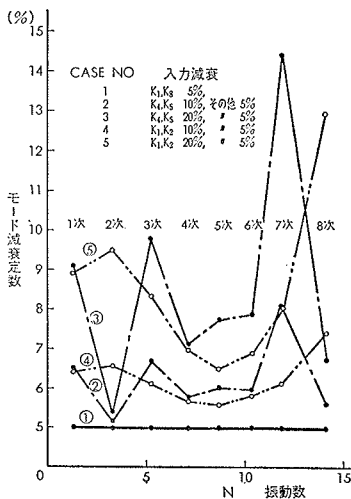
$s\delta_j$ :  $s$ 次モードの $j$ 番目要素の相対変形

次に多自由度系のモード減衰評価として表1に示す8層建物を想定し, 各層バネに異なった部材減衰量を与えた時を検討する。図4には5ケースの固有振動数

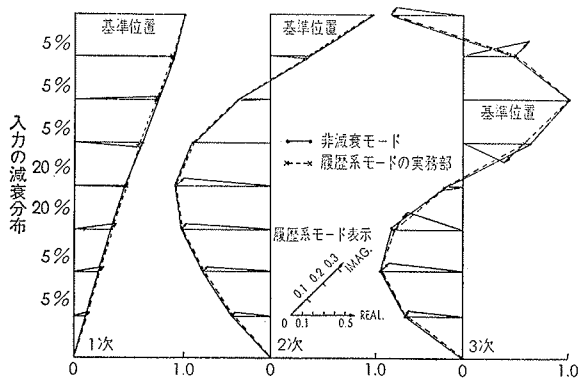
および減衰定数を、図5はケース番号3での固有モードを一例として示した。図4より複素バネ解析より得られる振動系のモード減衰定数は固有振動数に全く無関係であり、前述したように振動勢力の変化に伴う構成要素のエネルギー吸収性にに基づいている。ケース3とケース5を比較すると1次振動の減衰定数は両者ほぼ等しいのに対し、2次では大きく異なる。これは1次モードはほぼ逆三角形で各層バネの層間変

	mi (t·sec <sup>2</sup> /cm)	ki (t/cm)
8	0.883	580
7	0.680	687
6	0.680	932
5	0.680	1057
4	0.744	1315
3	0.744	1663
2	0.780	2075
1	0.930	1803

表一 構造物の諸元



図一四 モード減衰の変化



図一五 振動モード (CASE 3)

形が等しいのに反し、2次モードは中間層の振動勢力が弱く、したがってケース3で中間層に大きな減衰性を有する部材があっても2次モードでの減衰効果に対する寄与は小さい事に帰因し、ケース5は逆に振動勢力の大きい下層部に大きな減衰性を仮定

	複素バネ	近似法
CASE3	%	%
1次	9.12	9.66
2次	5.40	5.48
CASE5	%	%
1次	8.93	9.48
2次	9.50	9.85

表二 モード減衰の比較

しているので2次の減衰定数が大きくなっていると理解出来る。図4, 5より固有振動数とモード形は非減衰時と比べて変化が小さい。表2は近似式(18)との比較を行ったもので両者は良い一致を示している。

#### 4. 例題

構成要素の履歴減衰性が振動系全体の減衰性及び応答性に与える効果についてここでは建物—地盤連成振動系の例題をとおして検討する。計算例の諸元は表3に示したように上部建物は一定とし地盤は簡単にスウェイバネ  $K_H$  で代表させるものとし、地盤の周期を多少乱暴だが次式で定義した。

$$T_s = 2\pi \sqrt{M_0 / K_H} \quad (19)$$

$M_0$ : 基礎部質量と地盤有効質量の和

なお上部建物の基礎固

定非減衰周期は

$$1T_B = 0.716 \text{ sec}$$

$$2T_B = 0.280 \text{ sec}$$

である。入力データは次のとおり与えた。

1) バネに与える履歴減衰定数は上部建物バネに2%, スウェイバネに10%とし、全てのケースで一定とする。

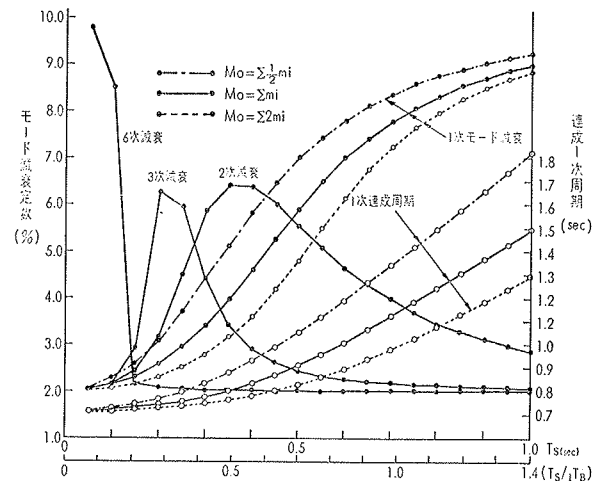
2) 地盤の剛柔による地盤減衰10%の全体系におよぼす影響をみるため  $T_s$  を 0.05sec~1.0sec を間で20種類考え、それには  $K_H$  を変化させたもので  $M_0$  としては3ケースを仮定した。

#### ◎減衰性

図6, 7にモード減衰の変化を示した。図6はモード減衰定数の変化を  $(T_s/1T_B)$  の比について示したもので、図7は連成1次モードでの建物頂部変形に占める地盤変形の割合  $(X_{\text{bottom}}/X_{\text{top}})$  の変化に伴う減衰定

	H (cm)	m (t·sec <sup>2</sup> /cm)	K (t/cm)
5	350	0.1024	53.0
4	350	0.1024	61.5
3	350	0.1024	96.0
2	350	0.1024	115.0
1	400	0.1024	114.0
0		$M_0$	$K_H$

表三 計算例の諸元



図一六 地盤—建物の周期比変化による動特性の変化

数である。図6, 7より1次モード減衰に着目すると、地盤が柔らかい程 ( $T_S/1T_B$ ,  $X_{bottom}/X_{top}$  が大程) 地盤の減衰性10%の影響が大きく、逆に剛で基礎固定条件に近くなると建物の減衰性2%に近づいており、1次モードにおける地盤振動勢力の変化に基づいている事がわかる。高次モード減衰の変化も結局モードにおける各部振動勢力の変化を示すもので減衰定数の大きい所は地盤変形が卓越しているものである。地盤減衰の要因として地下逸散の問題があるが、ここでは基礎部周辺の履歴減衰のみに限定したものである。地盤を  $M_0$  と  $K_H$  の1つの構造体要素として大胆に仮定したが地盤剛柔における地盤減衰性の振動系全体に及ぼす影響は本方法でとらえる事が出来る。

◎動的応答

式(19)の  $T_S$  を地盤卓越周期と考えれば  $i$  質点の応答2乗平均  $\bar{x}_i^2(t)$  は次式から求まる。

$$\bar{x}_i^2(t) = \int_0^\infty \left\{ \sum_{j=1}^n \phi_{ji} \cdot S_j(i\omega) \right\}^2 H_g^2(\omega) S_0 d\omega \quad (20)$$

$\phi_{ji}$ :  $j$  次複素刺激関数

$S_j(i\omega)$ :  $j$  次変位伝達関数

$S_j(i\omega)$  は各モード減衰を履歴減衰としてとらえたものであり複素周波数応答解析は部材の履歴減衰に基づく系の応答を忠実に評価出来る。複素解析によらず近似的な応答評価は次のようにして求まる。

$$\bar{x}_i^2(t) = \int_0^\infty \left\{ \sum_{j=1}^n \phi'_{ji} \cdot S'_j(i\omega) \right\}^2 H_g^2(\omega) S_0 d\omega \quad (21)$$

$\phi'_{ji}$ : 非減衰時の刺激関数

$S'_j(i\omega)$ : 式(18)での減衰定数をもつ伝達関数

式(21)において各  $S'_j(i\omega)$  の応答位相差を無視すれば模式的に図8に示すようになる。多自由度系の応答評価を式(21)に基づけば大変容易となるが  $S'_j$  を履歴減衰とすべきであり、粘性減衰とすると2章で1自由度について検討したように各振動モードで応答差が生じる事になる。1次振動のみに着目すると、地盤が柔らかい程地盤減衰性が系に有効に働くが応答評価する場合その減衰定数の扱いに注意する必要があると思われる。

5. 結び

構造物の動特性の評価を構成要素それぞれの履歴特性すなわち一定エネルギー吸収性に基づいて行いそれを複素バネで表現する事より、構造物全体の減衰性及び一般に行われている粘性減衰バネ系との応答差について検討を加えた。計算例をとおして次の事が言える。  
1) 任意モードの伝達関数は1自由度系で示したように粘性減衰系と履歴減衰系では異なってくる。両者の応答差は一般には小さいと思われるが、固有周期付近に外乱スペクトルのピークがある様な場合は応答差について考慮する必要がある。

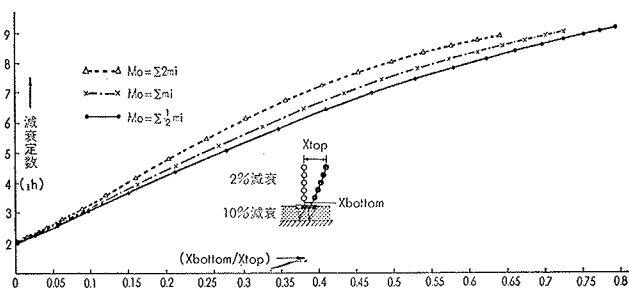


図-7 1次モードにおける地盤変形とモード減衰定数

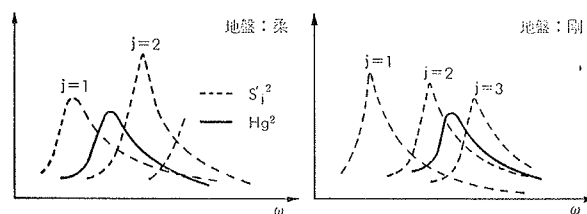


図-8 パワースペクトル

2) 構成要素が異なる履歴減衰性を有する多自由度振動系の動的評価は複素バネ解析法で忠実に実行出来るが近似的にも系の振動モード及びモード減衰と伝達関数を導く事により評価出来る。近似的に評価を求めるとき履歴減衰の意味がそこなわれぬ様伝達関数を求めるべきである。  
3) 多自由度系のモード減衰は粘性減衰とした時と異なり固有振動数に無関係に定まり、一定履歴減衰を有する各要素のモード変形に基づくエネルギー吸収率の総和で示されるもので、各要素減衰性の構造物全体減衰性に及ぼす影響が明解となる。

本報告では構成要素の弾性的範囲という事で限定したが部分的に塑性域に入った場合にも等価的にはその要素の剛性及び履歴減衰性変化を考え、その時点での系全体の動特性評価は可能である<sup>4)</sup>。今後このような等価線型的アプローチにより、多自由度系の非線型応答を各種外乱について検討を加えるつもりである。

参考文献

- 1) 高岡宣善：構造材料の内部摩擦による減衰振動，土木学会誌，573，1972
- 2) 対馬義幸，慈道順一：複素バネを持つ多自由度運動方程式の解法とその応用，第1報 モード分離による解法，建築学会論文報告集，220号，1974. 6
- 3) J. M. Rosset, R. V. Whitman, R. Dobry：Modal Analysis for Structures with Foundation Interaction, ASCE, Vol. 99 No. ST3 1973. 3
- 4) 柴田明德：異なる減衰をもつ部材から成る骨組の減衰定数の略算，建築学会東北支部，50. 3