

固定式海洋構造物の地震応答に関する基礎的研究 (その 2)

—付 加 質 量 解 析—

安 楽 秀 嶽 竹 本 靖
武 田 寿 一 中 村 嶽

Study on Fixed Offshore Structures Subjected to Earthquake Motion (Part 2)

—Added Mass Analysis—

Hidetake Anraku Yasushi Takemoto
Toshikazu Takeda Takashi Nakamura

Abstract

To evaluate the dynamic behaviours of offshore structures, Finite Element Method is expected to be a powerful tool if its accuracy is acceptable. Chopra et. al. solved the vibration problems of structures surrounded by water and subjected to the earthquake motion, and they presented the Computer Program for this analysis. Authors tried to analyze the vibration model employed for a series of dynamic tests of under water structures using the method mentioned above. In this paper, the outline of the analysis is presented and the analytical and experimental results, dynamic water pressures, added mass coefficients, natural periods and so on, are compared. The analysis is shown to give results which are quite acceptable and a few points are discussed about the result of this analysis.

概 要

海洋構造物が巨大化、複雑化するに従い、従来のように、簡単なモデルから求めた質量係数のみを用い、十分な精度でその動特性（固有周期の延び）を評価する事は難かしくなっている。これに対し Chopra等は、水中構造物の振動を構造物と流体の相互作用問題として捉え、流体の動水圧を支配するラプラス方程式を有限要素法を用いて解く事により付加質量を求める事を試み、解析法を示すとともにそのコンピュータプログラムを提示している。有限要素法による解法はその適用性の広さにより有用性に富むが、実験との対応でこの種の問題に対する適用の妥当性を詳細に検討した文献はあまり見当たらない。当研究所で一連の固定式水中構造物の振動に関する基礎的実験が行なわれ、多くの資料が得られたのを機会に、上記有限要素法による振動モデルの解析を行ない、付加質量、動水圧などの解析値と実験値との比較検討を行なった。本論文は、その検討結果を示すとともに、解析手法の紹介を行ない、併せて解析結果についての考察を試みたものである。

1. 序

水中構造物が振動する際の固有周期は、同じ構造物の陸上における固有周期に比べて長くなる。これは構造物の振動により水に発生する動水圧の作用によるものであるが、通常はこの現象を付加質量の概念を用いて取り扱っている。すなわち、構造物が振動する際に、その周囲のある体積の水がこれに付随し、一体となって振動するものと考え、この仮定の付加質量によって水中構造物の固有周期は増大するものとしている。そして、構造物が排除する水の量にある係数（質量係数）を乗じた体積の水を付加質量として扱い、この質量係数は、比較的簡単なモデルを対象とした実験および解

析により求めてきた¹⁾。しかし、海洋開発の発展に伴ない、海洋構造物の規模や形状も巨大化、複雑化してきており、これ等簡単なモデルから求めた質量係数を用いたモデル化では、必ずしも十分な精度でその動特性を表わすことは出来ない状況にある。

このような困難を解決する一手法として、有限要素法による解析が考えられる。有限要素法により流体の運動を解析しようとする試みは近年盛んになって来ており、Chopra 等は静止流体中における構造物の振動問題を、構造物と流体の相互作用問題として解析し、その解析法および解析プログラムを提示している²⁾。このような解法の妥当性が確認されれば、その汎用性から考えて利用価値は少なくないが、実験結果との対

応関係からその妥当性を検討した文献は余り見当らない。そこで、一連の固定式水中構造物の振動実験を行って数多くの資料が得られたのを機会に、上記の有限要素解法による実験モデルの解析を行ない、得られた動水圧やこれをもとに求めた質量係数の実験値との比較検討を行ない、解析の妥当性を調べた。

本論文は、解析法の概要を紹介するとともに、これ等の検討結果を示し、併せて解析結果に対する考察を加えたものである。

2. 解析理論

2.1. 振動方程式

水深をパラメータに、標題論文(その1)で述べた円筒と支持板バネにより成る振動モデルの付加質量を求める。解析は図-1に示す極座標 (r, z, θ) を用いて行なう。モデル円筒を高さ方向にいくつか分割し、各要素の節となる円筒に、1, 2, …, i, …, n と番号をつける。通常よく行なわれるように、軸対称回転体に作用する荷重やその変形は、円周方向にフーリエ展開して表わすことが出来るが、本モデルの変形パターン(図-2)を考慮すると、節円筒 i 上の円周角 θ の点での、 r, z, θ 方向の相対変位は各々、 $x^r \cos \theta, 0, x^\theta \sin \theta$ と表わすことが出来る。変位ベクトル \underline{x} の転置ベクトル \underline{x}^T を

$$\underline{x}^T = \{\dots, x^r, 0, x^\theta, \dots\}$$

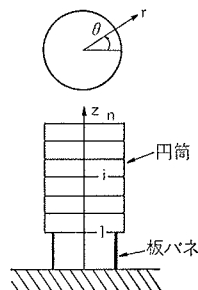


図-1 解析モデル

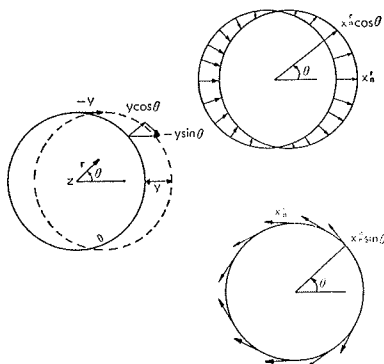


図-2 節円筒 n の相対変位

と置けば、水平地動 \ddot{y} に対する系の振動方程式は、次式で与えられる。

$$M\underline{\ddot{x}} + C\underline{\dot{x}} + K\underline{x} = -E\underline{y} - P(t) \quad (1)$$

但し M, E は対角質量行列、 C は減衰行列、 K は剛性行列であり、 M_i を節円筒 i の集中質量とすれば、 M と E の対角要素はおのおの $\langle \dots, M_i, M_i, M_i \dots \rangle$, $\langle \dots, M_i, 0, M_i \dots \rangle$ と表わされる。 $P(t)$ は流体圧に等価な節円筒周上の荷重ベクトルである。

振動系のモードベクトルを $\underline{\phi}$ 、一般化された変位を $x(t)$ とすれば、系の相対変位 \underline{x} は $\underline{x} = \underline{\phi}X(t)$ と表わされる。後述するように、円筒の絶対加速度 $\ddot{y} + \underline{\phi}X(t)$ に対して、上記荷重ベクトルは、

$$P(t) = P_0 \ddot{y} + P_1 \ddot{X}(t) \quad (2)$$

と求められる。これを考慮すれば(1)式は次のように書き直すことが出来る。

$$(M^* + M_i) \ddot{X} + C^* \dot{X} + K^* X = -[A + A_1] \ddot{y} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで } M^* &= \underline{\phi}^T M \underline{\phi}, \quad C^* = \underline{\phi}^T C \underline{\phi} \\ K^* &= \underline{\phi}^T K \underline{\phi}, \quad A = \underline{\phi}^T E \\ A_1 &= \underline{\phi}^T P_0, \quad M_a = \underline{\phi}^T P_1 \end{aligned} \quad (4)$$

となり、 M_a が付加質量に、 A_1 が付加荷重に相当する。いま同振動系の空気中における固有円振動数と水中におけるそれを各々 ω_A, ω_W とすれば、

$$\omega_A = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}} \quad \omega_W = \sqrt{\frac{K^*}{M^* + M_a}}$$

となり、これより次の関係式を得る

$$\omega_W = \sqrt{\frac{M^*}{M^* + M_a}} \omega_A \quad (5)$$

また、質量係数 C_M は次式より得られる。

$$C_M = \left(\frac{M_a}{M^* m} \right) \frac{1}{V \rho} \quad (6)$$

ただし、 m は円筒の質量、 V は円筒の水没体積、 ρ は水の密度を表わす。

2.2. 動水圧の解析

円筒に作用する動水圧成分 P_0, P_1 が求めれば、これを用いて、(3)~(5)式より付加質量、水中における固有振動数、質量係数などが求められる。

ここで P_0, P_1 を以下のように求める。いま水の圧縮性と内部減衰を無視すれば、その微小非回転運動における動水圧 P の変動は次のラプラス方程式に支配される²⁾。

$$\nabla^2 P = 0 \quad (7)$$

ここで、次の境界条件のもとで上式を解くことを試

みる。

(1) 境界 $z=0$ において、鉛直方向の運動が生じない。

$$\frac{\partial}{\partial z} P(r, 0, \theta, t) = 0 \quad (8)$$

(2) 自由表面 $z=H$ に表面波が生じない。

$$P(r, H, \theta, t) = 0 \quad (9)$$

(3) モデル円筒部分との境界 ($r=r_0$) における水の半径方向の運動は、モデル半径方向の運動に等しい。

$$\frac{\partial}{\partial r} P(r_0, z, \theta, t) = -\rho(\ddot{y} + \ddot{x}^r) \cos \theta \quad (10)$$

ここで \ddot{x}^r は、構造物の変形によって水に引き起こされる ($\theta=0$ の点の) 半径方向の加速度成分である。

(4) 流体領域の外側境界 ($r=r_b$) では半径方向の運動が生じない。

$$\frac{\partial}{\partial r} P(r_b, z, \theta, t) = 0 \quad (11)$$

オイラーの理論によれば、次の汎関数

$$X(P) = \int_D \frac{1}{2} \nabla P \cdot \nabla P \cdot dD + \int_S \rho(\ddot{y} + \ddot{x}^r) \cos \theta P \cdot dS \quad (12)$$

を(9)の条件下で最小化する関数 P は、(7)式および(8)、(10)、(11)式を満す。上式で D は流体領域、 S は流体と構造物の境界面を表わす。

ここで流体部分を図-3に示すような軸対称有限要素の集まりとしてモデル化する。 $\theta=0$ の面における要素 l 内の $r-z$ 面内の圧力分布を、内挿関数 $\eta_j(r, z)$ と節点の圧力 P_j を用いて次のように表わす。

$$P_l(r, z) = [n_1, n_2, \dots] \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_l \end{Bmatrix} \quad (13)$$

境界条件を考慮すれば、 r および z が同一の値を持ち、 θ に沿った要素境界上の圧力分布は $P_l \cos \theta$ と表

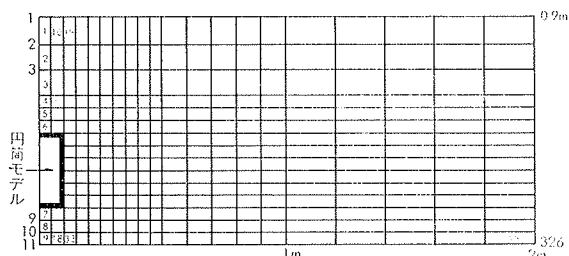


図-3 流体要素分割 (水深90cm)

わせる。そこで、構造物の変形を基準座標 $Y(t)$ を用いて表わせば、(12)式の最小化から次式が導かれる。

$$\underline{F}P + \rho \underline{D}_0 \ddot{y}(t) + \rho \underline{D}_1 \ddot{x}(t) = 0 \quad (14)$$

ここで P は円筒の各接円周に作用する、動水圧に等価な n 個の節点荷重ベクトルである。 $n \times n$ の行列 \underline{F} は、各節点に対応する要素行列 \underline{F}^l の重ね合せとして次のように与えられる。

$$\underline{F} = \sum_l \underline{F}^l \quad (15)$$

要素 l に対応する行列は、軸対称要素全体にわたり積分して、次のように与えられる。

$$\underline{F}^l = \int_D l [\nabla n]^T [\nabla n] \cos^2 \theta dD \quad (16)$$

行列 \underline{D}_j ($j=0, 1$) は、流体と円筒の境界面 S の分割要素 S^m についての行列の和として与えられる。

$$\underline{D}_j = \sum_m \underline{D}_j^m \quad (j=0, 1) \quad (17)$$

ここで分割要素 S^m に関するベクトルは

$$\underline{D}_0^m = \int_{S^m} n^T h^f \underline{I} \cos^2 \theta dS \quad (18)$$

$$\underline{D}_1^m = \int_{S^m} n^T h^f \phi^r \cos^2 \theta dS \quad (19)$$

となる。ここで h^f は構造物と流体との境界に沿った2つの1次元内挿関数より成る列ベクトル、 \underline{I} は1を要素とする 2×1 のベクトル、 ϕ^r は隣接2節点の半径方向の変形モードを要素に持つ 2×1 のベクトルである。(15)~(19)式を考慮して(14)式を解けば、節点圧力ベクトル \underline{P} は(2)式の形で与えられる。但しベクトル \underline{P}_j は次の方程式の解である。

$$\underline{F} \underline{P}_j = -\rho \underline{D}_j \quad (j=0, 1) \quad (20)$$

3. 解析結果

種々の水深に応じて流体部分に図-3に示すような要素分割を行ない、上記解析法を用いて求めた付加質量と、これをもとに求めた固有周期を、実験から得た固有周期とともに表-1に示す。解析値と実験値は良好な一致を見せ、解析の妥当性が示される。

解析および実験値をもとに求めた質量係数と水深の関係を図-5に示す。モデル完没までは質量係数は水深に応じて増大し、完没後はほぼ一定値をとるという実験結果の定性的傾向を解析はよく追跡し、定量的に

も両者の値は良好な近似を示す。

図-6に、水深をパラメータに、解析から求めた円筒各部の水圧荷重分布を示す。水圧は、水表面または円筒端部では急激に減少することが見てとれる。従ってこのような境界の影響が小さい程動水圧の作用は大きくなるわけであり、これが図5に示す水深と付加質量の定性的な関係を補足的に説明するとともに、その径に比べ背が低目の本円筒モデルの完没後の質量係数の値(≒0.62)が、既往の円柱モデルを用いた実験結果に比べやや小さくなる理由も説明すると言える。

円筒下端から1/8の位置にセットした水圧計の読みと、同位置における水圧の解析値の水深との関係を図-7に示す。同点水圧の実測値と図-6に示す水圧分布パターンを用いて求めた水圧を、高さ方向に平均化して求めた等価動水圧および、付加質量を用い、高さ方向に均一な圧力分布を仮定して求めた動水圧も併せて同図に示す。水没体積1/2程度までは、解析値と実測水圧の間に差が見られるが、これは実験において水

面に観察された表面波の影響が、水圧計の取り付け位置の水圧に直接影響を与えた為と思われる。この点を別にすれば、概ね解析値は実測値と良く一致し、等価動水圧も妥当な値を示して、図-6の水圧分布パターンをはじめとする解析の妥当性が示される。

水深90cmを想定し、流体距離を変化させて求めた付加質量を図-8に示す。モデル(半径≒10cm)の5倍程度以下の水槽を用いた実験では境界の影響が無視出来ないことが分る。

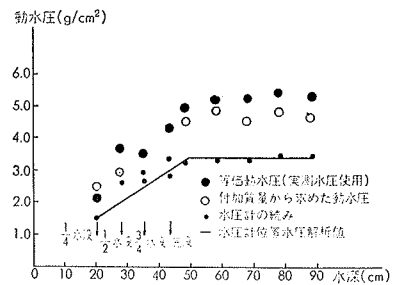


図-7 動水圧と水深の関係

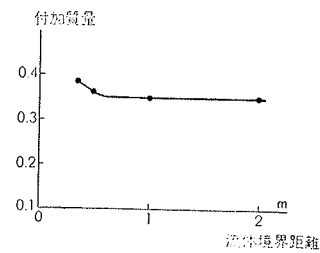


図-8 付加質量と流体境界距離の関係

水位	付加質量	周期(解)	周期(実 ¹)	周期(実 ²)
空气中	0	0.127	0.127	0.127
円筒1/4水没	0.0243	0.129	0.129	0.129
" 2/4 "	0.0946	0.133	0.134	0.133
" 3/4 "	0.1926	0.139	0.139	0.139
" 4/4 "	0.3028	0.145	0.146	0.147
円筒上端5cm	0.3362	0.147	0.148	0.149
水深0.9m	0.3489	0.148	0.149	0.150

実¹: 5gal入力 実²: 8gal入力

表-1 付加質量と固有周期

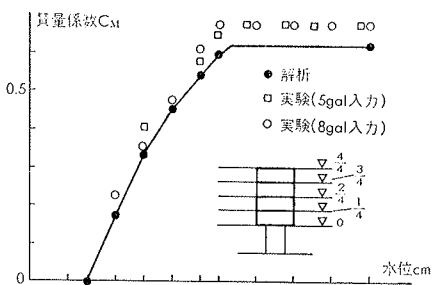


図-5 質量係数と水深の関係

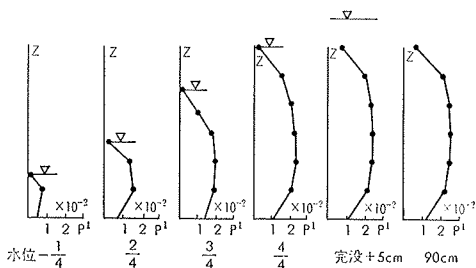


図-6 水圧荷重分布(解析値)

4. 結語

固定式水中構造物の地震時の振動問題を、構造物と流体の相互作用問題として扱い、流体の動水圧を支配するラプラス方程式を有限要素法で解いて動水圧分布を求め、これを用いて付加質量、固有周期などを計算した。円筒上の一点における水圧の実測値と、この点に対応する解析値は、測定点に表面波の影響が表われる場合を除くと良く一致した。また、付加質量、固有周期の解析値は実験値と良く一致し、水中構造物の振動特性(固有周期の延び)を把握する手段として、本解法はその汎用性に併せて精度の面でも非常に有効なことが明らかになった。

参考文献

- 1) 桜井彰雄: 仮想質量と水中における柱の振動, 35年度土木学会講演会梗概集, III-29
- 2) C-Y. Liaw and A. K. Chopra: Earthquake Response of Axisymmetric Tower Structures Surrounded by Water, Report No. EERC, 73-25 (1973)