

# 土粒子モデルによる地盤の変形・応力解析法

齋藤 二郎  
藤原 紀夫

## Numerical Analysis of Soil Behavior Using Soil Particle Model

Jiro Saito  
Toshio Fujiwara

### Abstract

This method falls in the category of the Finite Element Method in the broad sense. Firstly, ground can be replaced by a soil particle model system. Then, potential energy between soil particles is defined as a function of the coordinate of soil particles and the total potential energy can be calculated. Under given external force and boundary conditions, this total potential energy is locally minimized by non-linear optimization. Consequently, the minimum value and its coordinate of soil particles can be defined. Uniaxial compression and tensile tests of soil are described as examples of analysis. This numerical method is still imperfect. However, it covers the deficiencies of FEM to some extent and it should be possible to utilize it for explaining the mechanical structure of soil.

### 概 要

この解析方法は、広い意味においては有限要素法に属するもので、地盤をある土粒子モデル系に置換え、各土粒子間のポテンシャルエネルギーをそれら各土粒子の座標の関数として定義し、この系に外力と境界条件を与えて、全ポテンシャルエネルギーを極小にする各土粒子の座標を非線形最適化法を用いて決定するものである。解析例として、土の一軸圧縮試験、一軸引張り試験などについて述べる。

この解析方法はまだ完成されたものではないが、いわゆる連続体理論に基礎をおく有限要素法の欠点を補ってくれるであろうし、土の力学的構造を説明するのにも利用することができと思われる。

### 1. まえがき

近年、土質工学分野における有限要素法の利用はめざましく、わが国においても、すでに数多くの数値解析結果が発表されている。著者自身も、この解析方法を実際の土構造物に適用した例をいくつか発表している<sup>1), 2), 3), 4)</sup>。

有限要素法を地盤の挙動解析に用いた場合、その長所は、(1)地盤の応力～ヒズミ関数式が既知であれば、異方・異質地盤であっても、複雑な境界条件下であっても、容易にその解を与えてくれる。(2)応力～ヒズミ関係についても、線形でも非線形でもほぼ同様な手法で取り扱える。(3)静的問題と動的問題もほぼ同様な手法で解くことができる、などである。

一方、この解析方法にも欠点がある。それは、(1)実際に解析をする場合、地盤の正しい応力～ヒズミ関係式を決定することが困難であり、かつこの関係式の決定の仕方によって、当然のことながら、その解はまっ

たく異なったものとなる。(2)いわゆる連続体理論に基礎をおくため、クラックなどの問題に適用することが難しく、無理に取り扱うと、仮定の仕方によって、結果はどのようなものにもなる。(3)構造的（幾何学的）非線形と材料的非線形を同時に取り扱うことが困難である、などである。

以下に述べる土粒子モデルによる地盤の変形・応力解析法は、地盤の応力～ヒズミ関係式を直接的には用いない新しい解析法である。すなわち、地盤をある土粒子モデル系におきかえ、各土粒子間のポテンシャルエネルギーを、それら各土粒子の座標の関数として定義する。このモデル系に外力と境界条件を与えて、全ポテンシャルエネルギーを極小にする各土粒子の座標を非線形最適化法を用いて決定するものである。

この解析方法については、すでに山本がその基本的考え方を発表している<sup>5)</sup>。著者は、この山本の考え方をさらに一歩進めて、土粒子モデルの構造、境界拘束条件の与え方、荷重項の取り扱い方などについて改良

を加え、実用化できるようにした。

この解析方法は、まだ完成されたものではないが、上述した有限要素法の欠点を補ってくれるであろうし、また、土の力学的構造を説明するにも利用することができるであろうと思われる。

## 2. 基礎理論

### 2.1. 土粒子モデル系

土が示す複雑な力学的性質の原因は、土粒子間結合力の性質および結合の仕方にあると定性的には考えられている。山本<sup>5)</sup>は静的粒子モデル系として、次の5個の条件によって規定されるものを考えた。

- (1) 系は有限個の土粒子からなる。
- (2) 土粒子  $i$  は質量  $M_i$  を有する。
- (3) 土粒子  $i$  は属性  $C_i$  などを有する。
- (4) 土粒子  $i$  および  $j$  の間には、粒子間距離  $l_{ij}$  および  $C_i, C_j$  などによって決まる粒子間ポテンシャルエネルギー  $u$  を蓄えることができる。

$$u = u(l_{ij}, C_i, C_j) \quad (i \neq j) \quad (1)$$

したがって、それら土粒子相互間には、次式で示される粒子間力  $f$  が作用する。

$$f = f(l_{ij}, C_i, C_j) = -\partial u / \partial l_{ij} \quad (2)$$

- (5) 系の力学的状態は系の全ポテンシャルエネルギーが極小となる所で安定する。

系に含まれる全土粒子  $N$  個の位置ベクトルを  $X$  で表わすと、系の有する全ポテンシャルエネルギー  $U$  は  $X$  の関数となる。

$$U = U(X) \quad (3)$$

なぜなら、 $X$  が与えられると、各土粒子の持つ重力によるポテンシャルエネルギーが求められ、同時に全ての土粒子間距離  $l_{ij}$  が決まり、粒子間ポテンシャルエネルギーが確定するからである。

$U$  は一般に  $X$  の非線形関数であって、これに外力や境界条件を与えれば、この問題は拘束条件のある非線形最適化問題に他ならない。

### 2.2. 土粒子の配列

今、土粒子は二次元空間に分布している場合について考える。三次元空間に分布している場合も、同じ考え方を拡張することができる。

土粒子を自由粒子 ( $LL$  個)、 $x$  方向のみ自由粒子 ( $LX$  個)、 $y$  方向のみ自由粒子 ( $LY$  個)、移動境界点 ( $MM$  個)、固定境界点 ( $NN$  個) とに分ける。したがって、全土粒子数  $LMN$  は ( $LL+LX+LY+MM+NN$ ) となる。境界点は粒子の自由方向に対しては、粒子と全く同様に作用し、他の境界点に対しては全く力を作用させないものとする。すなわち、粒子は問題

にしている物体、ここでは地盤を代表するものであり、境界点は、その物体に変形を生ぜしめる他の物体を代表するものとする。

ベクトル  $X$  は、これ以後、全土粒子(境界点を除く)の座標を次のように配列したものとする。

$$X = (x_1, y_1, \dots, x_i, y_i, \dots, x_{LL}, y_{LL}, x_{LL+1}, \dots, x_{LL+LX}, y_{LL+LX+1}, \dots, y_{LL+LX+LY}) \quad (4)$$

### 2.3. 力学的条件

幾何学的境界条件は、もちろん境界点の座標によって与える。すなわち、境界点ベクトルを  $B$  とすると次式のようになる。

$$B = (y_{LL+1}, \dots, y_{LL+LX}, x_{LL+LX+1}, \dots, x_{LL+LX+LY}, x_{LL+LX+LY+1}, y_{LL+LX+LY+1}, \dots, x_{LL+LX+LY+MM}, y_{LL+LX+LY+MM}, \dots, x_{LMN}, y_{LMN}) \quad (5)$$

もちろん、(4)と(5)のベクトルをつなぎ合せば、境界点を含む全土粒子の座標ベクトルとなる。

重力によるポテンシャルエネルギー  $u_w$  は、重力の作用を一般化して、土粒子  $i$  に重力 ( $g_{xi} \times M_i, g_{yi} \times M_i$ ) が作用するものとする。もちろん、( $g_{xi}, g_{yi}$ ) は重力の加速度ベクトルである。また、載荷力によるポテンシャルエネルギー  $u_F$  は重力と同様に考えることができる。

土粒子間ポテンシャルエネルギー関数は、①  $l_{ij}$  に関して連続微分可能であること、②  $l_{ij} \rightarrow 0$  になるとき  $u \rightarrow \infty$  であること、③ 土粒子の初期配列においては、 $u = 0$  である任意の関数でよい。

以上をまとめると、全ポテンシャルエネルギー  $U(X)$  は次式で示される。

$$U = \sum_{j=1}^{LL+LX+LY} \sum_{k=j+1}^{LMN} u(l_{jk}, C_j, C_k) - \sum_{k=1}^{LL+LX+LY} M_k (g_{xk} \times x_k + g_{yk} \times y_k) - \sum_{l=1}^{NOL} (F_{lx} \times x_l + F_{ly} \times y_l) \quad (6)$$

ここに、 $NOL$ ; 載荷点の数、 $F_{lx}, F_{ly}$ ;  $l$  番粒子の  $x$  および  $y$  方向の載荷力

$U(X)$  のグラディエントベクトルを  $G(X)$  とすると次式で示される。

$$G(X) = (\partial U / \partial x_1, \partial U / \partial y_1, \dots, \partial U / \partial x_i, \partial U / \partial y_i, \dots, \partial U / \partial y_{LL+LX+LY}) \quad (7)$$

ここに、

$$\partial U / \partial x_i = \sum_{j=1}^{LMN} f(l_{ij}, C_i, C_j) \frac{x_j - x_i}{l_{ij}} - M_i \times g_{xi} - F_{ix} \quad (i=1, 2, \dots, LL+LX) \quad (8)$$

(8)式は少々の演算の後得られたものである。 $\partial U / \partial y_i$  も(8)式と同様に示すことができる。

以上により、 $U(X)$  および  $G(X)$  が計算できるので、 $U$  の極小値  $U_m$  および、その時の  $X$  の値  $X_m$  を、非線形最適化法を用いて求めることができる。

また、境界点反力 (BF<sub>xi</sub>, BF<sub>yi</sub>) は、X<sub>m</sub> が求めれば次式によって求まる。

$$BF_{xi} = \sum_{j=1}^{LL+LX} f(l_{ij}, C_i, C_j) \frac{x_j - x_i}{l_{ij}} \quad (i=LL+LX+1, \dots, LMN) \quad (9)$$

$$BF_{yi} = \sum_{j=1}^{LL+LY} f(l_{ij}, C_i, C_j) \frac{y_j - y_i}{l_{ij}} \quad (i=LL+LY+1, \dots, LMN) \quad (10)$$

これら境界点反力は、境界点が単位長さで等間隔に並んでいる場合には、境界応力と一致する。

### 3. 数値計算方法

以上に述べた数値計算を行なうための電算プログラムのフローチャートを図-1～図-4に示す。

まず、変数ベクトル X の出発値 X<sub>0</sub>、境界点の座標、土粒子の質量 M<sub>i</sub>、土粒子の属性 C<sub>i</sub>、載荷重、移動境

界点の変位量などを読み込む。次に、最適化サブルーチン DMMD が呼ばれ、極小ベクトル X<sub>m1</sub> が計算される。X<sub>m1</sub> を用いて境界点反力が計算され、1 ケースの計算が終る。次のケースでは、X<sub>m1</sub> が出発値となり、移動境界点の位置と載荷重が更新され同じ計算を繰返す。その際、(6), (8), (9), (10) 式に含まれる粒子間ポテンシャルエネルギー u と粒子間力 f の計算は、全ての土粒子間で計算されることはなく、l<sub>ij</sub> < DL (影響半径) の場合についてのみ計算される。下記の解析例では DL=1.8m を与えた。

モデル系は、一般には非線形であるため、移動境界点の大きな変位や大きな載荷重に対して、計算は一度には不可能であり、いくつかの微小変位や微小載荷重

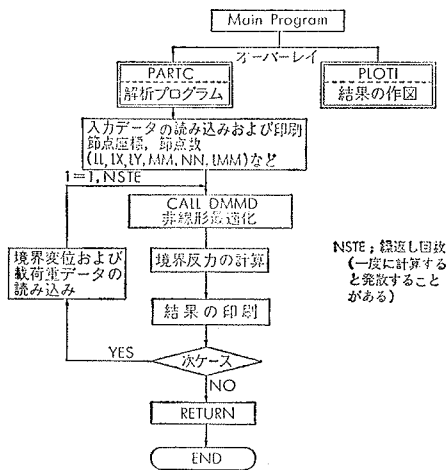


図-1 メインプログラム

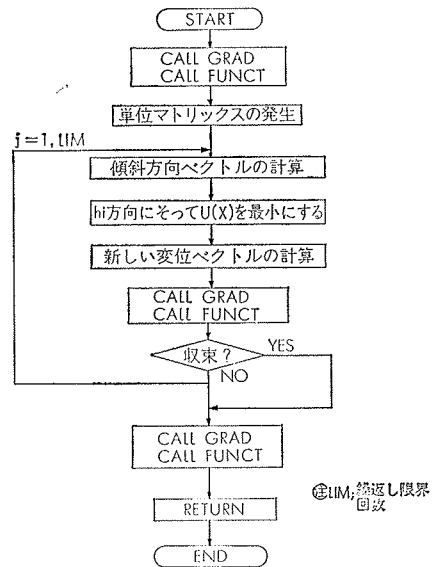


図-2 サブルーチン DMMD

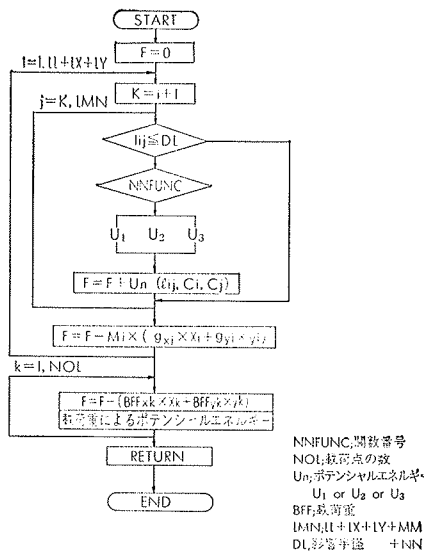


図-3 サブルーチン FUNCT

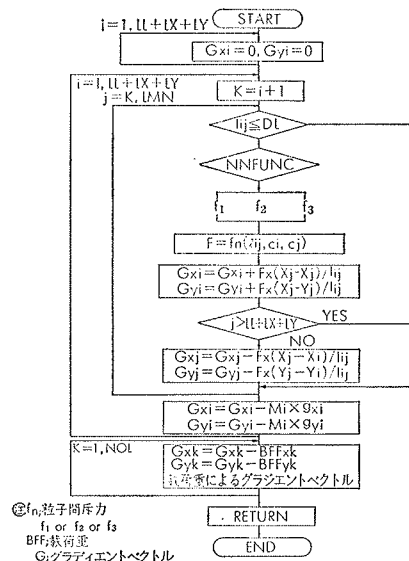


図-4 サブルーチン GRAD

に分けて行なわれる。

この数値計算では、最適化の部分がコンピュータ消費時間の大半をしめる。用いた最適化の手法は、傾斜法に属する Davidon-Fletcher-Powell の方法<sup>6)</sup>で、IBM社の Subroutine (D)FMD を著者が改良したものである。

#### 4. 解析例

この解析例は、土の一軸試験に相当するもので、下面を固定境界点として、上面からある大きさの荷重で圧縮したり、引張ったり、またある強制変位を与えたりしたものである。

図一五に土粒子の配列図を示す。土粒子は一辺が1.0mの格子状の配列とし、高さ12m、幅(径)6mの供試体を仮定している。左右の対称性を考慮して、土粒子の配列は、左半分だけを考えている。各土粒子の自由度は、1~36が自由粒子、37~48がy方向のみ自由粒子、49~52が固定境界点である。一方、上面に強制変位を与える場合には、1, 2, 3は移動境界点に、37はy方向自由粒子にする必要がある。

ポテンシャルエネルギー関数uと粒子間力関数fは、次式を選んだ。

$$u = A_m \{ \cos 2\pi (\alpha l_{ij}^c + 0.5) + 1 \} / l_{ij}^c \quad (11)$$

$$f = C \times A_m \{ 2\pi \alpha l_{ij}^c \sin 2\pi (\alpha l_{ij}^c + 0.5) + \cos 2\pi (\alpha l_{ij}^c + 0.5) + 1 \} / l_{ij}^{c+1} \quad (12)$$

ここに、 $A_m$ 、 $\alpha$ 、 $C (=C_i=C_j)$  は関数パラメータ。すなわち土粒

子の属性である。

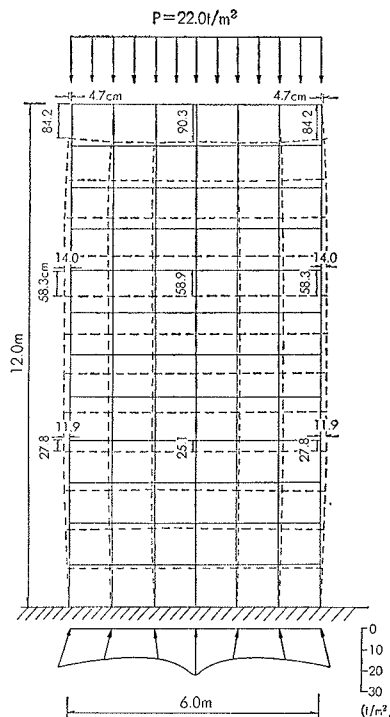
図一六は上面から  $22.0t/m^2$  で圧縮した時の地盤内変位と反力の図である。関数パラメータの値は  $A_m=1$ 、 $\alpha=1$ 、 $C=2$  を使用した。両側方にはらみ出しながら変位している様子がみられる。下面の反力は上載圧力  $22.0t/m^2$  よりわずかに小さく、一様な分布とはならず、中央と両端で反力の大きな値がみられる。また、上面の変位も一様とならず、中央が両端よりもわずかに大きい。

図一七は上面において、強制変位 90cm を与えた時の地盤内変位と反力の図である。関数パラメータの値は、図一六と同じ値を使用した。両側方にはらみ出しながらタイコ状の変形をしている様子がみられる。上面と下面の反力はほぼ同じ形状と同じ値を示すが、一様な分布とはならず、中央と両側部で少し大きな値を示している。

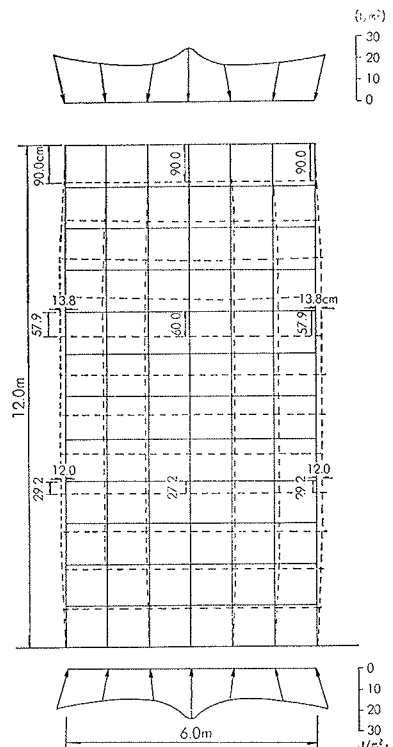
ここでは、紙面の都合で詳しく述べることはできないが、図一五の土粒子配列について、載荷応力、引張応力、強制変位量や関数パラメータを種々に変位させた解析も行なっている。図一八は、これらをまとめて応力~ヒズミ曲線にしたものである。図からわかるように、 $A_m=1$ 、 $\alpha=1$ 、 $C=2$  の場合には、みかけのヤング率はほぼ  $300t/m^2$  となり、載荷応力  $26t/m^2$  (ヒズミにして8.5%) で降伏しているのがみられる。 $A_m=1$ 、 $\alpha=2$ 、 $C=2$  の場合には、みかけのヤング率はほ



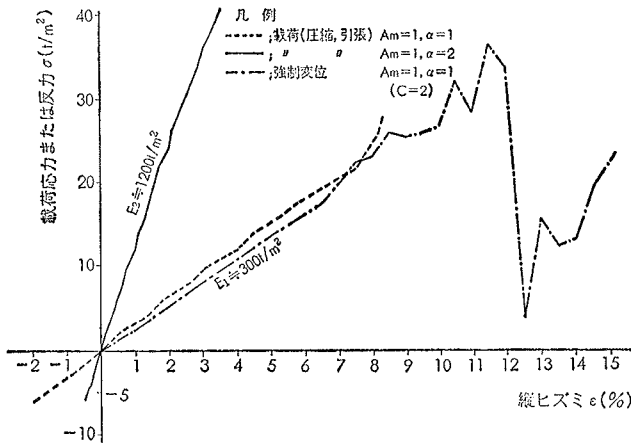
図一五 土粒子配列図



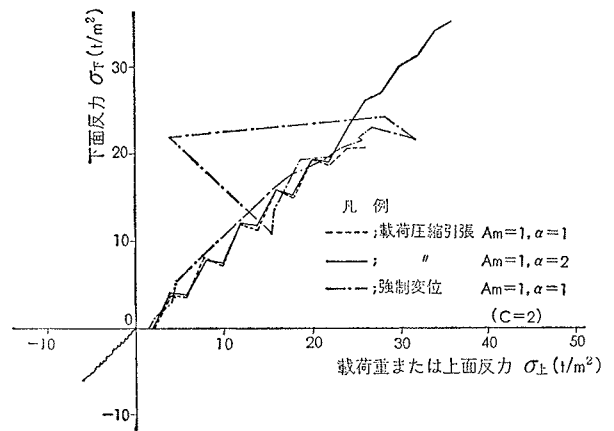
図一六 上面載荷 (22.0t/m<sup>2</sup>)



図一七 上面強制変位 (90cm)



図一八 応力～ヒズミ曲線



図一九 載荷応力と下面反力の関係

ば  $1200 \text{ t/m}^2$  となるが、降伏点はみられない。

図一九は上面と下面の反力または載荷応力の関係図である。その傾きがほぼ45度であり、上面と下面の応力がバランスしているのがみられる。

### 5. むすび

この研究は、まだほんの端緒であり、これから研究すべきことが多い。今後研究すべき問題点としては、(1)ポテンシャルエネルギー関数や土粒子の配列状態と地盤の力学的挙動との関係、(2)多層地盤の取扱い方法(3)地盤の中に連続地中壁や鋼矢板壁がある場合の取り扱い方法、(4)非線形最適化計算のコンピュータ消費時間を短くするなどである。今後はこれらの問題点を解決して、シールド外周地盤の挙動や、土留壁外周地盤の挙動といった具体的な問題に、この解析方法を適用してゆくつもりである。

最後に、本研究を進めるにあたり、当社機械計算部の徳永氏と中央大学学生中島清君から多大な御援助をいただいた。ここに記して、深く感謝致します。

### 参考文献

- 1) 齋藤, 内藤, 藤原: 有限要素法によるトンネル外周地盤の挙動解析例, 大林組技術研究所報, No. 7 (1973)
- 2) 齋藤, 内藤, 藤原: 有限要素法によるシールド外周地盤の挙動解析(弾塑性), 第9回土質工学研究発表会, (1974), 206 (H-5)
- 3) 齋藤, 内藤, 藤原, 吉岡: 有限要素法によるシールド外周地盤の挙動解析(粘弾性), 第10回土質工学研究発表会, (1975), 233 (H-5)
- 4) 内藤, 木村, 藤原, 小出: 有限要素法による地中防振壁の解析, 大林組技術研究所報, No.12 (1976)
- 5) 山本: 粒子モデルによる土の応力解析法(第1報), 農業機械学会誌, 34巻, 4号
- 6) 山本, 小出共訳: 非線形最適化問題, 培風館