

交通機関の振動によって生まれる半無限弾性体内の変位について

齋藤二郎 吉岡尚也
木村 薫

Displacements in a Semi-Infinite Elastic Solid Caused by Traffic Vibrations

Jiro Saito Hisaya Yoshioka
Kaoru Kimura

Abstract

Vibration caused by traffic is considered as a line source on a free surface and a theory is proposed regarding the resulting displacement in a semi-infinite elastic solid. When a uniform pressure of simple harmonic motion acts along a certain direction on a free surface, displacements in a semi-infinite elastic solid caused by it is firstly given in integral form. The integral may be obtained by a generalized method (complex integral), but can also be evaluated using the method of steepest descent. It appears the effect of elastic waves is main for large amplitude at close range whereas that of surface waves is main at farther range.

概 要

交通機関による振動を自由表面上の線振源とみなして、これによって生まれる弾性体内の変位について述べたものである。自由表面上のある方向に沿って、一様な単振動型の圧力が作用しているとき、これを振動源として半無限弾性体内に生まれる変位は積分形式であたえられる。積分そのものはよく、知られている方法（複素積分）で行なったが、他の方法、たとえば最大降下法を用いても同様な結果が得られる。弾性実体波および表面波による変位は、振源から数ないしは数10mを境にして、それより遠いところでは後者が、それより近いところでは前者がそれぞれ影響をあたえているようである。

1. はじめに

産業機械や交通機関などの振動源によって生まれる振動公害が大きな問題になっている。これらの振動公害に対処するために、防振壁などを設けて振動をしゃへいする工夫がなされている。

このような問題を解明していくためには、いかなる振動源によってどのような影響が最も大きく現われているかを定性的に解明しておくことも大切なことである。以下では、交通機関による振動を自由表面上の線振源とみなし、これによって生まれる半無限弾性体内の変位の性質について考察してみよう。

2. 交通機関の振動によって生まれる変位

2.1. 振動源の表現

交通機関による振動を図一1のように、自由表面上

のy軸に沿って、一様な単振動型の圧力

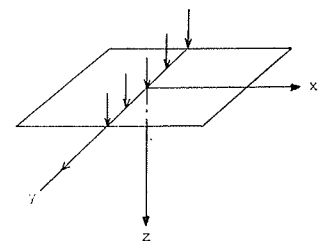
$$(P_{zz})_{z=0} = -Q\delta(x)e^{i\omega t}$$

(ここにQは定数、 ω は角振動数、tは時間、 $\delta(x)$ はデルタ関数)が作用しているものとみなす。このことはこと

がらを2次元化していることになる。したがって以下では、これを振動源として半無限弾性体内に伝わる波の変位を求めればよい。

2.2. 形式解

$\delta(x)$ は $x=0$ 以外では値をもたない特殊な関数であるから、一般に、y軸方向に一様なxy面全体に分布する応力、 $(P_{zz})_{z=0}=f(x)e^{i\omega t}$ を原因する波をまず求め



図一1 振動源の表現

る。その解で、 $f(x) = -Q\delta(x)$ としたものが、もとめる結果になる。

$f(x)$ の Fourier 積分を

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(k) e^{-ikx} dk \quad (\because Z(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx)$$

とすれば $(p_{zz})_{z=0}$ は

$$(p_{zz})_{z=0} = \int_{-\infty}^{\infty} Z(k) e^{i(\omega t - kx)} dk \quad \dots\dots(1)$$

とあらわすことができる。ゆえに

$$(p_{zz})_z = Z(k) e^{i(\omega t - kx)} \quad \dots\dots(2)$$

を原因とする波をもとめ、その結果を k について積分すれば、最初の問題に対する答がえられる。

さて、P波ポテンシャル φ と S波ポテンシャル ψ を求めてみよう。 φ に平面波のポテンシャル

$$\varphi = A \exp. i\omega \left(t - \frac{l x + n z}{V_P} \right) \quad (\text{ここに } l^2 + n^2 = 1)$$

を仮定する。境界条件(2)が t, x に関係なくなつたためには、

$$k = l\omega/V_P \quad (\because l = kV_P/\omega \quad (V_P \text{ は P 波速度}))$$

したがって、

$$n^2 = 1 - l^2 = \frac{V_P^2}{\omega^2} (k_\alpha^2 - k^2), \quad k_\alpha = \frac{\omega}{V_P} \quad \dots\dots(3)$$

いま、 z の係数 $-i\omega n/V_P$ を ν とあらわせば、 ν は、 $\nu = \sqrt{k^2 - k_\alpha^2}$ となる。根号については以後もふくめて、 $\text{Re}\sqrt{\quad} \geq 0$ の規約を設けておく。

結局、 φ の形は

$$\varphi = A e^{i\omega t - ikx - \nu z} \quad \dots\dots(4)$$

となる。一方、 ψ の形は上と同様にして

$$\psi = B e^{i\omega t - ikx - \nu' z} \quad \dots\dots(5)$$

となる。ここに、 ν' は $\nu' = \sqrt{k^2 - k_\beta^2}$ 、 $k_\beta = \omega/V_S$ (V_S は S 波速度) を意味している。

以上のようにして求めた φ, ψ は自由表面上で境界条件 $(p_{zz})_{z=0} = Z(k)$ 、 $(p_{zx})_{z=0} = 0$ を満足しなければならない。したがって、 $(p_{zz})_{z=0} = Z(k)$ より

$$(2k^2 - k_\beta^2) A + 2ik\nu' B = \frac{Z(k)}{\mu}$$

$(p_{zx})_{z=0} = 0$ より

$$2ik\nu A + (k_\beta^2 - 2k^2) B = 0$$

これらから A, B を求めると

$$A = \frac{2k^2 - k_\beta^2}{F(k)} \cdot \frac{Z(k)}{\mu}, \quad B = \frac{2ik\nu}{F(k)} \cdot \frac{Z(k)}{\mu}$$

となる。ここに、 $F(k)$ は $F(k) = (2k^2 - k_\beta^2) - 4k^2\nu\nu'$ を意味し、これはいわゆる Rayleigh の関数にほかならない。また、 μ は剛性率を意味している。

以上から、 φ と ψ はそれぞれ

$$\varphi = \frac{Z(k)}{\mu} \frac{2k^2 - k_\beta^2}{F(k)} \exp. (i\omega t - ikx - \nu z)$$

$$\psi = \frac{Z(k)}{\mu} \frac{2ik\nu}{F(k)} \exp. (i\omega t - ikx - \nu' z)$$

のようになることがわかる。一方、問題となる自由表面上の x, z 方向の変位 u_0, w_0 は φ と ψ を用いて

$$u_0 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{z=0}, \quad w_0 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{z=0}$$

のようにあらわされるから、条件(1)のもとでの解は

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= -\frac{i}{\mu} e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k(2k^2 - k_\beta^2 - 2\nu\nu')}{F(k)} e^{-ikx} Z(k) dk \\ w_0 &= \frac{1}{\mu} e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_\beta^2 \nu}{F(k)} e^{-ikx} Z(k) dk \end{aligned} \right\} (6)$$

であたえられる。

したがって、最初の問題に対する形式解は、デルタ関数を

$$(i) \quad x \neq 0 \text{ のとき } \delta(x) = 0 \quad (ii) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{ikx} dx = 1$$

のように定義すれば、(6)式で $Z(k) = -Q/2\pi$ としてただちに

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= -\frac{Q}{2\pi\mu} e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k(2k^2 - k_\beta^2 - 2\nu\nu')}{F(k)} e^{-ikx} dk \\ w_0 &= -\frac{Q}{2\pi\mu} e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_\beta^2 \nu}{F(k)} e^{-ikx} dk \end{aligned} \right\} (7)$$

であることがわかる。

2.3. 形式解の求積

(7)の u_0, w_0 の中にあらわれる積分は、実数 k を複素数 $\zeta = \xi + i\eta$ に変えるとそれぞれ

$$\int_{-\infty}^{\infty} I_1 d\zeta, \quad I_1 = \frac{\zeta(2\zeta^2 - k_\beta^2 - 2\nu\nu')}{F(\zeta)} e^{-i\zeta x} \quad \dots\dots(8)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} I_2 d\zeta, \quad I_2 = \frac{k_\beta^2 \nu}{F(\zeta)} e^{-i\zeta x} \quad \dots\dots(9)$$

のようになる。このようにすれば、Cauchy の積分定理を用いることができる。上2つの被積分関数 $I_{1,2}$ には分岐点 $\pm k_\alpha, \pm k_\beta$ および極 $\pm k$ が存在する。しかし、このままでは分岐点および極は実数であるから、 ω に負の虚数部分をつけ加えて $\omega \rightarrow \omega - i\omega_0$ とおきかえておく。このようにしてえた結果の、 ω_0 が 0 に収束する極限值をとって本来の ω に対する(8)、(9)をもとめることにする。分岐点と極および分岐線は図-2 のような位置にならぶ。

さしあたり $x > 0$ として、図2の複平面上で図3のような閉曲線を考える。Cauchy の積分定理から

$$\int_{-R}^R I_{1,2} d\zeta = -2\pi i \text{Res}(\kappa) + \int_{C_1} + \int_{L_\alpha} + \int_{C_2} + \int_{L_\beta} + \int_{C_3}$$

ゆえに、 $R \rightarrow \infty$ の極限では

$$\int_{-\infty}^{\infty} I_{1,2} d\zeta = -2\pi i \text{Res}(\kappa) + \int_{L_\alpha} + \int_{L_\beta} + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1 + C_2 + C_3} I_{1,2} d\zeta$$

となる。ここに $\int_{L_\alpha}, \int_{L_\beta}$ は分岐線に沿った無限線積分を意味している。

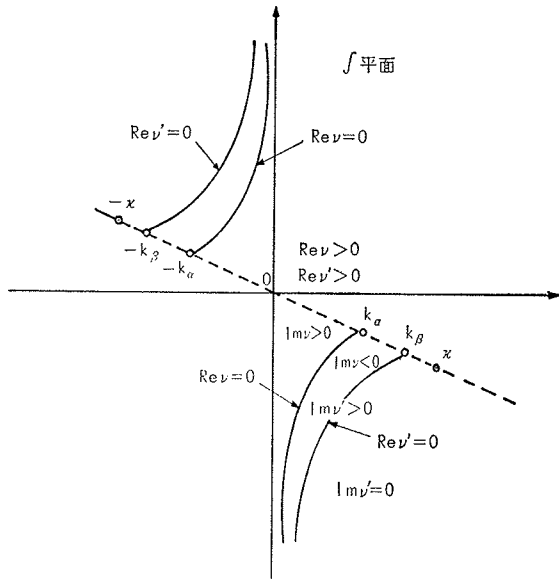


図-2 分岐点と極および分岐線

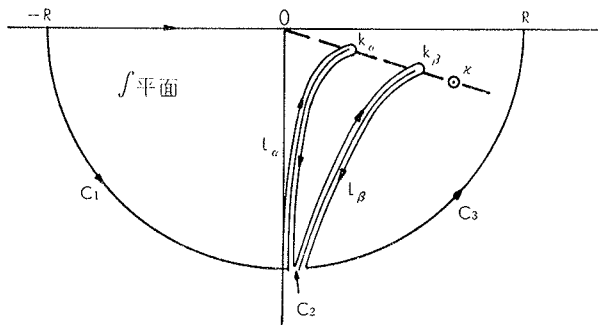


図-3 積分路

* $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1+C_2+C_3} I_{1,2} d\zeta$ について

径路 $C_1+C_2+C_3$ は無限線積分の径路が分岐線にきわめて接近しているならば、ほぼ半円周とみなせるから、

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_C I_{1,2} d\zeta = 0 \text{ となる。}$$

* 極 κ の留数について

$I_{1,2}$ の留数についてはただちにとまり、それぞれ

$$I_1 \text{ の Res}(\kappa) = \frac{\kappa(2\kappa^2 - k_\beta^2 - \sqrt{\kappa^2 - k_\alpha^2} \sqrt{\kappa^2 - k_\beta^2})}{F'(\kappa)} e^{-i\kappa x}$$

$$I_2 \text{ の Res}(\kappa) = \frac{k_\beta^2 \sqrt{\kappa^2 - k_\alpha^2}}{F'(\kappa)} e^{-i\kappa x}$$

のようになる。ここで $\omega = \omega - i\omega_0$ の ω_0 を $\omega_0 \rightarrow 0$ とするとき、上式の中の κ , k_α , k_β はもとの実数値にもどるだけである。

* 無限線積分 $\int_{L_\alpha} I_1 d\zeta$ について

L_α (L_β) に沿っての積分は、先に $\omega_0 \rightarrow 0$ と考え、曲線を図-4 のような直線に直して求める。それゆえに

$$\int_{L_\alpha} I_1 d\zeta = \int_I + \int_{II} + \int_{III} + \int_{IV}$$

と考える。 \int_I と \int_{IV} については、 $\zeta = -i\tau$ とおき

積分変数を τ から τ におきかえる。I の道すじは L_α , L_β のいずれについても、その左側にあるから

$I_{m\nu} > 0$, $I_{m\nu'} > 0$ 。一方IV は右側、 L_β にとっては左側であるから $I_{m\nu} < 0$, $I_{m\nu'} > 0$ 。したがって

$$\begin{aligned} \int_I + \int_{IV} &= \int_0^\infty \frac{\tau(2\tau^2 + k_\beta^2 + 2\nu\nu')}{(2\tau^2 + k_\beta^2)^2 + 4\tau^2\nu\nu'} e^{-\tau x} d\tau \\ &\quad + \int_0^\infty \frac{\tau(2\tau^2 + k_\beta^2 - 2\nu\nu')}{(2\tau^2 + k_\beta^2)^2 - 4\tau^2\nu\nu'} e^{-\tau x} d\tau \\ &= -4k_\beta^2 \int_0^\infty \frac{\tau(2\tau^2 + k_\beta^2)\nu\nu'}{(2\tau^2 + k_\beta^2)^4 - 16\tau^4\nu^2\nu'^2} e^{-\tau x} d\tau \end{aligned} \quad (8)$$

のようになる。ここに式中の $\nu = +i\sqrt{\tau^2 + k_\alpha^2}$, $\nu' = +i\sqrt{\tau^2 + k_\beta^2}$ を意味している。

つぎに \int_{II} と \int_{III} については、 $\zeta = k$ とおき積分変数を k から k におきかえる。II の道すじは L_α , L_β のいずれについても、その上側にあるから $I_{m\nu} > 0$, $I_{m\nu'} > 0$ 。一方III の道すじは L_α にとっては下側、 L_β にとっては上側であるから $I_{m\nu} < 0$, $I_{m\nu'} > 0$ 。したがって、

$$\begin{aligned} \int_{II} + \int_{III} &= \int_0^{k_\alpha} \frac{k(2k^2 - k_\beta^2 - 2\tilde{\nu}\tilde{\nu}')}{(2k^2 - k_\beta^2)^2 - 4k^2\tilde{\nu}\tilde{\nu}'} e^{-ikx} dk \\ &\quad + \int_{k_\alpha}^0 \frac{k(2k^2 - k_\beta^2 + 2\tilde{\nu}\tilde{\nu}')}{(2k^2 - k_\beta^2)^2 + 4k^2\tilde{\nu}\tilde{\nu}'} e^{-ikx} dk \\ &= 4k_\beta^2 \int_0^{k_\alpha} \frac{k(2k^2 - k_\beta^2)\tilde{\nu}\tilde{\nu}'}{(2k^2 - k_\beta^2)^4 - 16k^4\tilde{\nu}^2\tilde{\nu}'^2} e^{-ikx} dk \end{aligned} \quad \dots\dots(9)$$

のようになる。ここに式中の $\tilde{\nu} = +i\sqrt{k_\alpha^2 - k^2}$, $\tilde{\nu}' = +i\sqrt{k_\beta^2 - k^2}$ を意味している。

以上から、 L_α に沿った I_1 の積分は、(8)および(9)の積分の和として表わされることがわかる。

積分(8)は

$$(8) = -4k_\beta^2 \int_0^\infty \tau^{\frac{1}{2}} G(\tau) e^{-\tau x} d\tau$$

の形をしている。ここに $G(\tau) = \frac{\tau^{\frac{1}{2}}(2\tau + k_\beta^2)\nu\nu'}{(2\tau^2 + k_\beta^2)^4 - 16\tau^4\nu^2\nu'^2}$

を意味している。一般に上のような形をした積分は

$$\int_0^\infty \tau^{\frac{1}{2}} G(\tau) e^{-\tau x} d\tau = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{x^{\frac{3}{2}}} G(0) + \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{x^{\frac{5}{2}}} G'(0) \dots \quad (10)$$

のように展開できる。したがって、 x が大きいとき、すなわち観測点が振動源より十分遠方にあるときには、右辺の始めの数項で左辺の近似値がえられる。しかる

に $G(0) = 0$ であるから、積分(8)は

$$(8) = 0(x^{-\frac{5}{2}})$$

となる。

積分(9)については、積分変数を k から $u = k_\alpha - k$ におきかえると

$$(9) = 4k_\beta^2 e^{-ik_\alpha x} \int_0^{k_\alpha} u^{\frac{1}{2}} \tilde{G}(u) e^{iux} du$$

の形をしていると見る事ができる。ここに

$$\tilde{G}(u) = \frac{u^{\frac{1}{2}} (k_\alpha - u) \{2(k_\alpha - u)^2 - k_\beta^2\} \tilde{v} \tilde{v}'}{\{2(k_\alpha - u)^2 - k_\beta^2\}^4 - 16(k_\alpha - u)^4 \tilde{v}^2 \tilde{v}'^2}$$

を意味している。先の近似の条件によって x は大きいから、上式は

$$\int_0^{k_\alpha} u^{\frac{1}{2}} \tilde{G}(u) e^{iux} du \quad \dots\dots(9')$$

のように書きなおすことができる。積分(9')について、

ふたたび積分路を図-5のようにとれば、上半円 C での積分は 0 に収束して

$$(9') = \int_0^\infty \xi^{\frac{1}{2}} \tilde{G}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \quad (9'')$$

と書きかえられる。(9')で

$\xi = i\tau$ とおきかえると

$$(9'') = i \cdot i^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \tau^{\frac{1}{2}} \tilde{G}(\tau) e^{-\tau x} d\tau$$

となる。ここで、上式の右辺の積分に(10)を用いれば

$$(9'') = i \cdot i^{\frac{1}{2}} \tilde{G}(0) \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{x^{\frac{3}{2}}} + 0(x^{-\frac{5}{2}})$$

のように近似できる。したがって積分(9)は

$$(9) = -2\sqrt{2\pi} \frac{k_\alpha^3 k_\beta^2 (k_\beta^2 - k_\alpha^2)^{\frac{1}{2}}}{(2k_\alpha^2 - k_\beta^2)^3} e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{e^{-ik_\alpha x}}{(k_\alpha x)^{\frac{3}{2}}} + 0(x^{-\frac{3}{2}})$$

のようになる。

他の無限線積分 $\int_{L\beta} I_1$, $\int_{L\alpha} I_2$, $\int_{L\beta} I_2$ についても

$\int_{L\alpha} I_1$ と同じようにして求まるから、結局交通機関の振動によって生まれる地表面上の変位は、以下のよう

$$u_0 = -\frac{QH}{\mu} e^{i(\omega t - kx)} + \frac{iQ}{2\pi\mu} \{c(k_\alpha x)^{-\frac{3}{2}} e^{i(\omega t - k_\alpha x)} + D(k_\beta x)^{-\frac{3}{2}} e^{i(\omega t - k_\beta x)}\}$$

$$w_0 = -i \frac{QG}{\mu} e^{i(\omega t - kx)} - \frac{Q}{2\pi\mu} \{C_1(k_\alpha x)^{-\frac{3}{2}} e^{i(\omega t - k_\alpha x)} + D_1(k_\beta x)^{-\frac{3}{2}} e^{i(\omega t - k_\beta x)}\}$$

ここに

$$H = -\frac{\kappa(2\kappa^2 - k_\beta^2 - 2\sqrt{\kappa^2 - k_\alpha^2} \sqrt{\kappa^2 - k_\beta^2})}{F'(\kappa)}$$

$$G = -\frac{k_\beta^2 \sqrt{\kappa^2 - k_\alpha^2}}{F'(\kappa)}$$

$$C = -2\sqrt{2\pi} \frac{k_\alpha^3 k_\beta^2 (k_\beta^2 - k_\alpha^2)}{(2k_\alpha^2 - k_\beta^2)^3} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$D = -2i\sqrt{2\pi} \sqrt{1 - \frac{k_\alpha^2}{k_\beta^2}} c^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$C_1 = -i\sqrt{2\pi} \frac{k_\alpha^2 k_\beta^2}{(2k_\alpha^2 - k_\beta^2)^2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$D_1 = -4i\sqrt{2\pi} \left(1 - \frac{k_\alpha^2}{k_\beta^2}\right) e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

を意味している。

3. 考察

交通機関の振動を自由表面上の線振源とみなした場合、これによって生まれる自由表面上の x (水平方向), z (深さ方向) 方向の変位 u_0 , w_0 は(11)式のように表わされる。(11)からわかのように、変位はいずれも3つの項から形成されている。1項が速度 V_R で伝わる Rayleigh 波で、2項および3項は通常の弾性実体波 (PおよびS) である。一方、振幅についてはPおよびS波は距離 x の3/2乗に逆比例して減衰していくが、Rayleigh 波は減衰しない。したがって、振動源からある程度離れたところでは、P, S 波による変位よりも Rayleigh 波による変位のほうが大きくなるはずである。

今仮りに、交通機関の振動源によって 5Hz, 10Hz, 15Hz の周波数をもった波が、関東ローンを伝わりとして、振動源から観測点までの距離の変化に伴う自

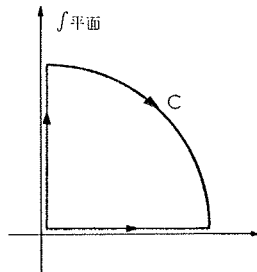


図-5 (9')の積分路

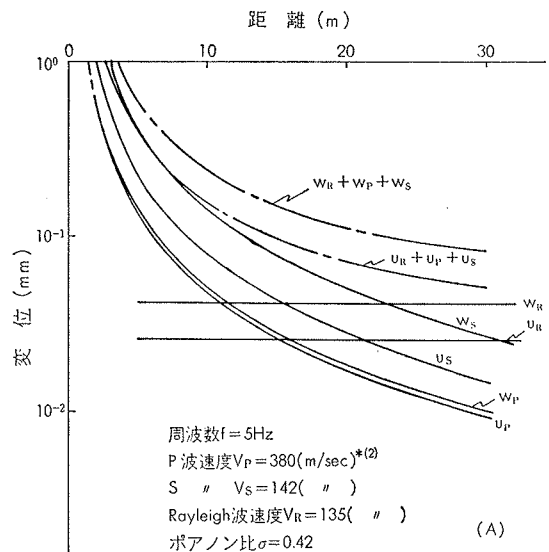
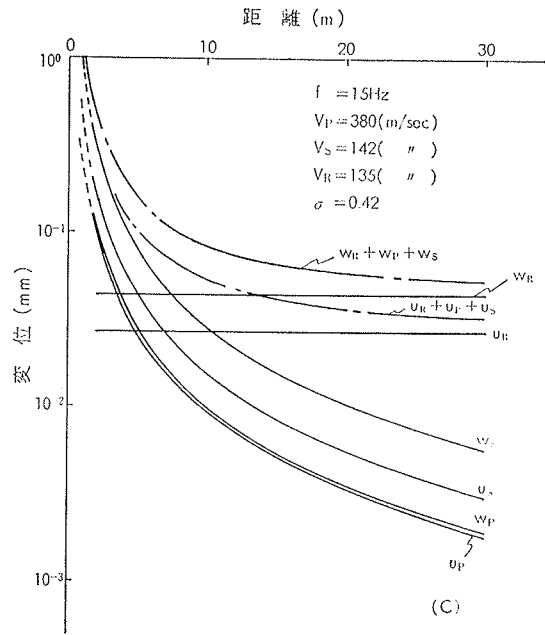
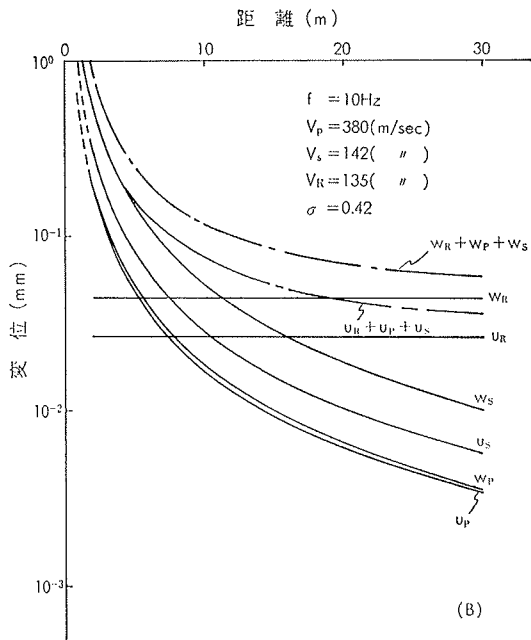


図-6 (A), (B), (C)地表面における変位の振幅



由表面上の x, z 方向の変位の振幅 u, w を図示するとそれぞれ図—6(A), (B), (C)のようになる。図で u, w の添字 P, S, R はそれぞれ P 波, S 波, Rayleigh 波による変位のことである。

3つの図から、つぎのようなことが言える。

- (1) 実体波による変位は、P波よりもS波のほうがつねに大きい。しかもS波による z 方向の変位 w_s が最も大きく、他の変位は w_s によってかくされてしまうような変位である。
- (2) Rayleigh 波による変位も z 方向の変位のほうが大きい。
- (3) とくに図—6(A)について言えば、振動源から20数mまではS波による z 方向の変位 w_s が支配的であるが、20数mを境にして Rayleigh 波による z 方向の変位 w_R が大きくなり、他の波による変位は w_R によってすべてかくされてしまう。
- (4) 周波数が大きくなるとPおよびS波の変位の振幅は小さくなるから、(3)のような現象は周波数が大きくなるほど、はやく現われてくる (図—6(B), (C)参照)。
- (5) Rayleigh 波による変位は周波数によらず一定の値をとっている。これはもっともなことで、式(11)の Rayleigh 波を表わす振幅の項の分母、分子から角振

動数 ω が消えてしまうからである。このことは媒質のもつ P, S 速度がわかれば、Rayleigh 波の振幅は自ずと決まってしまうことを意味している。

(6) 図の曲線で破線部分はあまり信頼できない値かも知れない。なぜなら、観測点はある程度遠いところになければならないという仮定を設けたからである。

4. おわりに

交通機関による振動を自由表面上の線振源とみなして、これによって生まれる変位の性質について、以上のような理論考察を行なった。まとめると、対称物が振動源に近い場合にはS波を、遠い場合には Rayleigh 波をしゃへいする工夫をしなければならないと言える。

現在は、Rayleigh 波を最も効果的にしゃへいする方法について考察している。

参考文献

- 1) Ewing, Jardetsky, Press: Elastic waves in Layered Media, McGraw-Hill, (1957), pp. 44~61
- 2) 内藤, 木村, 藤原, 小出: 有限要素法による地中防振壁の解析, 大林組技術研究所報, No. 12, (1976)