

# 立体フレームの弾塑性応答解析の研究

昇 高 淳 岡 田 宏  
(本社建築本部設計第三部)  
武 田 寿 一

## Elastic and Inelastic Responses of Framed Structures

Sunao Shotaka Hiroshi Okada  
Toshikazu Takeda

### Abstract

This paper describes the analytical method and calculation results of inelastic responses of three-dimensional frame structures subjected to two horizontal earthquake excitations. In the analysis, the yield behavior of each element of a framed structure is considered as follows: for columns, spherical yielding surfaces are assumed for interaction between normal force and biaxial bending, while for braces, slip-type and bilinear-type restoring force characteristics are assumed. Torsional vibration properties are examined through response calculations of one-story,  $1 \times 1$  span structures with emphasis on the next three items: (1) effect of slip-type and bilinear-type restoring forces of braces, (2) influence of eccentricity on framed structures with slip-type braces, and (3) influence of variation of axial forces of columns during vibration. It is interesting to note that, although a structure may have no eccentricity in its configuration, torsional vibration is induced at yielding, and that structures with slip-type braces show torsional problems which are rather larger than those with bilinear-type restoring forces.

### 概 要

本論は立体骨組の弾塑性応答の解析法および解析例について述べている。本解析法で個材の弾塑性性状は、柱に関しては軸力と2軸曲げモーメントの相互作用を考慮した球面降伏条件式とし、プレースに関してはスリップ型とバイリニヤー型の復元力特性としている。解析例は、1層 $1 \times 1$ スパンモデルを取り上げ、下記の内容についてねじれ振動性状の検討を行っている。(1) プレース付架構でスリップ型とバイリニヤー型の違い。(2) スリップ型プレース付架構で偏心による影響。(3) 純ラーメン架構で柱の降伏耐力の大きさによる影響。結果としてプレース付架構で偏心の無い場合にも、ねじれ振動を生じ、特にバイリニヤー型プレースに比較してスリップ型の場合はねじれ振動が大きくなる事がわかった。

### 1. 序

従来建物のせん断型弾塑性解析は、ある方向の平面骨組を取り出し、各層ごとに質量を1個所に集中させ、それらをつなぐ水平バネは、何らかの方法で柱、梁等の各部材の剛性を考慮した各層1個のバネ（水平剛性）を使用する集中質量（串だんご）モデルによる方法で行なわれている。この方法は、入力データの簡単さや、電算機のCPU時間が短くなる利点があり、多くの場合に使用されているが、建物全体のねじれ振動性状や、部材レベルでの弾塑性々状、特に2方向同時入力時における柱の

軸力と2軸曲げモーメントの相互作用による降伏性状等の諸性状を考慮出来ないため、実際の建物の性状を正確にモデル化出来ない欠点がある。このため Nigam<sup>1)</sup>、小堀<sup>2)</sup>による立体骨組の部材弾塑性応答解析の研究が発表されている。本論は筆者らによる弾性範囲内での立体骨組の応答解析法<sup>3)</sup>を拡張した解析法、即ち柱の弾塑性々状に軸力と2軸曲げモーメントの相互作用を考える球面降伏条件式を用いた Nigam の手法に、今回新しくスリップ型とバイリニヤー型復元力特性を持つプレース部材を追加した立体骨組の部材弾塑性応答解析法を開発したので、その概要および1層 $1 \times 1$ スパンモデルでの

若干の解析例を述べる。

## 2. 解析法

### 2.1. 解析仮定

(i) 応答解析における数値積分は STEP-BY-STEP 法を用い、各 STEP では剛性は変化しないと考える。

(ii) 各層の床版は面内方向に剛と考える。従って振動モデルは串だんごタイプとなり、各層の質点自由度数は水平方向の 2 水平変位と、鉛直軸回りの回転変位の合計 3 個となる。また水平剛性行列は各部材の弾塑性状況を考慮して各 STEP ごとに求める。

(iii) P-A 効果や Rocking, Sway は考慮しない。

(iv) 構成部材は柱、梁、プレースとし、各部材の変形は次のように考える。

柱……………曲げ変形と軸方向変形

梁……………曲げ変形

プレース…軸方向変形

(v) 柱の弾塑性は材端ヒンジ法による。この時材端ヒンジ発生条件は、軸力と 2 軸曲げモーメントの相互作用を考慮した球面降伏条件式で決定し、降伏後の歪硬化も考慮する。

(vi) プレースの復元力特性は、スリップ型またはバシリニヤー型とする。

### 2.2. 解析方法

柱、プレースの弾塑性の取り扱い手法以外は参考文献 3) の筆者らによる方法とほぼ同じであるため、本報告書では簡単に説明する。解析は下記に示す(i)～(v)の処理を各 STEP ごとに繰り返す。

(i) 各部材の弾性時の個材剛性行列を求める。

(ii) 上記より建物全体に関する全体剛性行列を求める。この時各節点(柱と梁の交叉する点)の水平変位は、仮定(ii)より質点(重心位置)の水平および回転変位で表現し、あらかじめ自由度数を低減する。

(iii) ガウスの前進消去法を利用して振動モデルの全質点の自由度に関する水平剛性行列を求める。この REDUCE 処理では非ゼロ項のみ取り扱う事により演算速度を早めている。

(iv) 振動モデルの運動方程式を立て、線型加速度法で数値積分を行なう。この時減衰項は Rayleigh 型の内外部減衰を考える。

(v) 部材応力を求め、降伏しているか否かのチェックを行ない、弾性または塑性時の個材剛性行列を求める。

次の STEP は(ii)へもどるが、各個材剛性行列が前回と同じ場合には、(ii)の処理を省略し、(iii)より解析する。

### 2.3. 柱の弾塑性

柱の個材剛性行列は、材端の降伏状態により、両端が弾性状態を含めて 4 通りの場合に分かれる。ここでは両端が共に降伏している場合について述べる。塑性時の個材剛性行列は次の 4 個の条件より求まる。

条件 (i) 部材端の全変形増分は弾性変形増分と塑性変形増分の和である。

(ii) 弹性変形増分と部材端の断面力増分の間には弾性関係がある。

(iii) 塑性変形増分は断面力が降伏曲面上に達している点における降伏曲面の法線に平行である。

(iv) 断面力増分は断面力が降伏曲面上に達している点における降伏曲面の接平面上にある。

両端が降伏している事より上記の (i)～(iv) に対応して次の(1)～(4)式が成立する。

$$\begin{Bmatrix} dq_{\alpha} \\ dq_{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} dq_{\alpha}^e \\ dq_{\beta}^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} dq_{\alpha}^p \\ dq_{\beta}^p \end{Bmatrix} \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$\begin{Bmatrix} dQ_{\alpha} \\ dQ_{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{\alpha\alpha} & K_{\alpha\beta} \\ K_{\beta\alpha} & K_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dq_{\alpha}^e \\ dq_{\beta}^e \end{Bmatrix} \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$\begin{Bmatrix} dq_{\alpha}^p \\ dq_{\beta}^p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_{\alpha} & 0 \\ 0 & \dot{\phi}_{\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\phi_{\alpha}/g_{\alpha} \\ d\phi_{\beta}/g_{\beta} \end{Bmatrix} \quad \dots \dots \dots (3)$$

$$\begin{Bmatrix} d\phi_{\alpha} \\ d\phi_{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_{\alpha}^T & 0 \\ 0 & \dot{\phi}_{\beta}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dQ_{\alpha} \\ dQ_{\beta} \end{Bmatrix} \quad \dots \dots \dots (4)$$

ただし、添字  $\alpha, \beta$  は柱の両端部を示し、 $dQ_i, dq_i, dq_i^e, dq_i^p$  ( $i=\alpha, \beta$ ) は、各々  $i$  端の断面力増分、全変形増分、弾性変形増分、塑性変形増分を示し、全てベクトル量である。 $K_{ij}$  ( $i, j=\alpha, \beta$ ) は個材の弾性剛性行列を、 $\phi_i, d\phi_i, \dot{\phi}_i$  ( $i=\alpha, \beta$ ) は、各々塑性ポテンシャル、同増分値、同変分値を示し、 $g_i$  ( $i=\alpha, \beta$ ) は歪硬化率を示す。(1)～(4)式より個材の塑性時の剛性行列  $[K]$  は次式となる。

$$\begin{Bmatrix} dQ_{\alpha} \\ dQ_{\beta} \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} dq_{\alpha} \\ dq_{\beta} \end{Bmatrix} \quad \dots \dots \dots (5)$$

ただし

$$\begin{aligned} [K] = & \begin{bmatrix} K_{\alpha\alpha} & K_{\alpha\beta} \\ K_{\beta\alpha} & K_{\beta\beta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{\alpha\alpha}\dot{\phi}_{\alpha} & K_{\alpha\beta}\dot{\phi}_{\beta} \\ K_{\beta\alpha}\dot{\phi}_{\alpha} & K_{\beta\beta}\dot{\phi}_{\beta} \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} g_{\alpha} + \dot{\phi}_{\alpha}^T K_{\alpha\alpha}\dot{\phi}_{\alpha} & \dot{\phi}_{\alpha}^T K_{\alpha\beta}\dot{\phi}_{\beta} \\ \dot{\phi}_{\beta}^T K_{\beta\alpha}\dot{\phi}_{\alpha} & g_{\beta} + \dot{\phi}_{\beta}^T K_{\beta\beta}\dot{\phi}_{\beta} \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} \dot{\phi}_{\alpha}^T K_{\alpha\alpha} & \dot{\phi}_{\alpha}^T K_{\alpha\beta} \\ \dot{\phi}_{\beta}^T K_{\beta\alpha} & \dot{\phi}_{\beta}^T K_{\beta\beta} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

次に球面降伏条件式は次式となる。

$$\phi_i = \left[ \sum_{j=1}^3 \left( \frac{Q_{ij}}{\bar{Q}_{ij}} \right)^2 \right]^{1/2} \quad \begin{array}{l} i=\alpha, \beta \\ j=1, 3 \end{array} \quad \dots \dots \dots (6)$$

ただし、 $Q_{ij}$  は  $i$  端の軸力と 2 軸曲げモーメントを示し、 $\bar{Q}_{ij}$  は  $Q_{ij}$  に対応する降伏耐力を示す。材端が降伏しているか否かの判定は、(6)式で 1.0 (歪硬化を考えない場合) になれば降伏している事を示す。

### 3. プログラム性能

(i) 最大規模: コアーサイズ, 1300 KB で, 最大層数10, 最大スパン数 $10 \times 10$ , ただし1層あたりの最大自由度数(節点数×3)100まで解析可能である。

(ii) CPU時間の推定: 個材剛性行列が変化しない場合(主に弾性範囲内の解析時)は、前のSTEPのREDUCE結果を利用して、演算速度を早めているため、CPU時間の一般的な推定は不可能であるが、2回に1回の割合で個材剛性行列が変化すると仮定した場合の1STEP当たりのCPU時間の推定値は図-1となる。同図でX, Yは各々1層当りの自由度数、層数を示す。例として $3 \times 4$ スパン、5層の建物を1/200秒刻みで10秒間解析すると考えれば、X=60, Y=5よりZ=8となり全CPU時間は16,000秒となる。なお使用電算機はIBM-370/158である。

### 4. 解析例

1層、 $1 \times 1$ スパン架構で下記の3種類の場合について検討を行なった。(i)プレース付架構(以下BR型と呼ぶ)でプレースの復元力特性がスリップ型とバイリニヤー型の場合。(ii)前記のスリップ型復元力特性を持つBR型で、各構面のプレース断面積を変える事により偏心させた場合。(iii)純ラーメン架構(以下RM型と呼ぶ)で、柱の降伏耐力を変える事により、降伏時の柱附加軸力を変えた場合。

各解析を通じて梁の剛比は、プレース付構面では柱と同じとし、純ラーメン構面では柱の10倍とする。歪硬化率(弾性剛性に対する降伏後の剛性)は1/100、柱の初期軸力は $0.2\bar{P}$ ( $\bar{P}$ は柱降伏軸力)、使用地震波は1940,

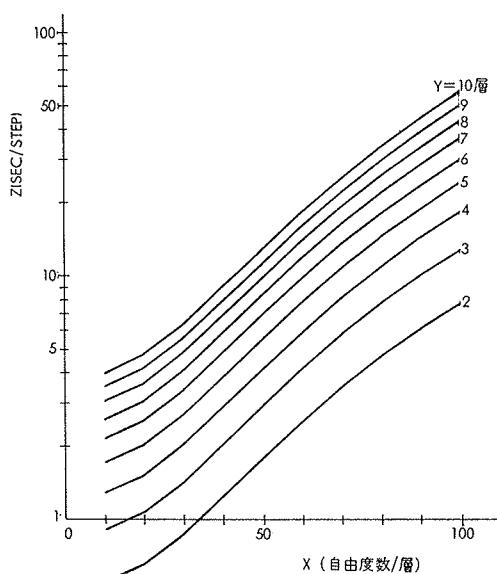


図-1 CPU時間の推定値(IBM 370/158)

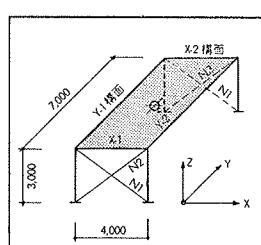


図-2 BR型架構

ELCENTRO波のNS, EW成分を各々X, Y方向に入力し、1/400秒刻みで10秒間解析した。

#### 4.1. BR型でプレースの復元力特性の検討

解析モデルは図-2に示すBR型で、部材断面リストを表-1に示す。プレースの復元力特性は表-2に示すスリップ型(BR-SL型)とバイリニヤー型(BR-BL型)の2種類について比較検討する。BR-SL型のプレースは常に片側しか有効に働くかないと想定し、BR-BL型のプレース断面積をBR-SL型の1/2として両者の固有周期を等しくした。両者の固有周期は、 $T_x=0.2$ ,  $T_y=0.5$ ,  $T_\theta=0.13$ 秒となった。ただしBR-SL型では圧縮側プレースを無視して固有周期を求めていた。次にプレース降伏時の柱附加軸力が $0.3\bar{P}$ となるようにBR-SL型の引張降伏応力度( $t_{oy}=3.08 \text{ t/cm}^2$ )を定め、BR-BL型ではプレースの降伏時の柱附加軸力を等しくするため、プレース断面積が1/2となっている代りに $t_{oy}$ を2倍としている。両者の降伏耐力はBR-BL型がBR-SL型の約2倍となるので、下記に示す $\beta$ により入力レベルの調節を行なった。解析結果は表-3および図-3, 4に示す。図中の $\beta$ (以下地動係数と呼ぶ)はX, Yの各方向に関して平面解析を行ない、プレースが初めて引張降伏する時の地動加速度、即ち弾性限界時(BR-SL型では圧縮側プレースの降伏は0荷重で生じるので厳密には弾性限界とは言えない)の地動加速度を求め、それらの値を基準として地動加速度を無次元化した値である。従って $\beta=1$ とは、X方向とY方向に弾性限界時の加速度を同時に入力した場合に当る。 $u, v$ はXおよびY方向について、一方向地動による平面解析を行なった場合の質点最大変位を示し、 $\mu$ はその時の韌性率を示す。 $u_i/u, v_i/v$ ( $i=0 \sim 2$ )は立体解析結果のXおよびY方向最大

部材	方向	A (cm <sup>2</sup> )	I (cm <sup>4</sup> )	Z (cm <sup>3</sup> )	備考
柱	X	40.9	507	67.6	初期軸力= $0.3\bar{P}$
	Y	40.9	4550	364.	断面サイズ BH-250×150×6×9
梁	X		676	弾性解析	X方向柱剛比の1倍
	Y		$1.06 \times 10^5$	弾性解析	Y方向柱剛比の10倍
プレース	X	20.6			

表-1 BR型架構部材断面リスト

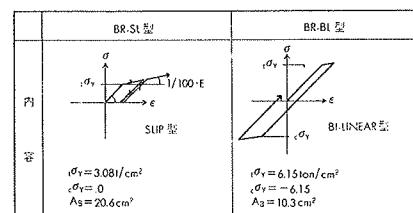


表-2 ブレースの復元力特性

変位を対応する平面解析結果  $u, v$  で無次元化した値を示し、 $i=0$  は重心の、 $i=1, 2$  は各々 X および Y 構面の最大変位を示す。 $u_\theta, v_\theta$  は最大ねじれ回転角時の X および Y 構面の回転による変位を X および Y 方向重心最大変位で無次元化した値で、並進と回転運動の最大値が同時に発生したと想定した場合の構面の最大水平変位の割増し係数を示す。図-3, 4 の結果より BR-SL 型では構面の最大変位 ( $u_1/u, v_1/v, i=1, 2$ ) と重心の最大変位 ( $u_0/u, v_0/v$ ) の差は  $\beta$  が増大するにつれ大きくなり、ねじれ振動を生じているが、一方 BR-BL 型では構面と重心の最大変位の差は見られない。次に  $u_\theta, v_\theta$  で見れば、 $\beta$  が増大するにつれ BR-SL, BL 型共に大きくなるが、BR-SL 型の方がその傾向が大である。これらの事よりブレース付架構では、偏心の無い場合でもねじれ振動を生じ、バイリニヤー型に比較してスリップ型の方がねじれ振動を生じやすい事がわかる。この理由は、2 方向同時入力した場合、X-1, X-2 構面のブレースに直交方向入力による逆方向の軸力が生じるためブレースの引張、圧縮降伏発生時刻がずれる事と、柱の初期軸力により各柱の降伏発生時刻がずれる事によると考えられる。特にスリップ型の場合にねじれ振動が大きくなるのは、X-1, X-2 構面の剛性がゼロとなる場合（逆 S 字型復元力でスリップする部分）が発生し、この時全体のねじれ剛性が低下してねじれ易くなる事と、柱の附加軸力が圧縮力のみ生じるためと考えられる。

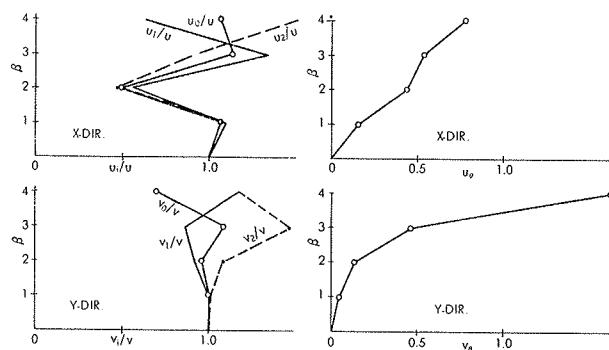


図-3 BR-SL 型結果

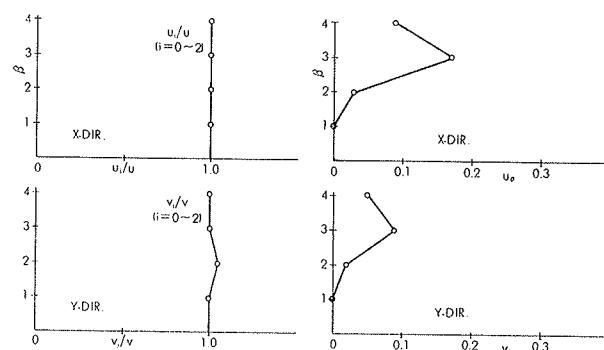


図-4 BR-BL 型結果

#### 4.2. 偏心による検討

BR-SL 型で X 方向固有周期を大きく変化させないために X-1, X-2 構面ブレース断面積の総和を一定とし、両者の比率を変える事により剛心を X-1 構面に近づけて偏心させた場合の検討を行なった。偏心率  $\eta$  が 0 ~40% の範囲で、 $T_x = 0.195 \sim 0.206$  秒、 $T_y = 0.500$  秒、 $T_\theta = 0.126 \sim 0.124$  秒であった。 $\beta$  を 1.0 とした場合の  $u_1/u, u_2/u$  を図-5 に示す。同図で  $\alpha_s$  は静的弾性解析時（圧縮側ブレースを無視している）の重心変位に対する各構面の変位割増し係数を示し、 $\alpha_e$  は動的弾性応答解析時（弾性応答のため圧縮側ブレースも有効となるので断面積を 1/2 とした）の結果を、 $\alpha_p$  は動的弾塑性応答解析時の結果を示す。X 方向に注目すると、 $\eta$  が大きくなるにつれて  $\alpha_s, \alpha_e, \alpha_p$  の順で構面の最大変位と重心最大変位の差が大きく、即ちねじれ振動が大きくなっている。これより偏心の有る建物では、静的に求めた結果以上に大きなねじれ変形を生じる事が想定され、剛心より遠く離れた構面では特に変形が大きくなると考えられる。

#### 4.3. RM 型で柱変動軸力の検討

RM 型で偏心の無い場合でも柱に初期軸力（長期荷重）が有る場合には、圧縮力を生じる柱の方が引張力を生じる柱より早く降伏するため、2 方向同時入力時にねじれ振動を生じ、特に変動軸力が大きな場合にその傾向が大きくなると考えられる。図-6、表-4 に示すような、BR 型の Y 方向構面を X 方向にも使用したモデル（RM-L 型）と、各方向ともそのスパンを 1/10 にしたモデル（RM-H 型）を考える。柱の上下端が降伏する時の柱の変動軸力は RM-L 型で  $0.03\bar{P}$ 、RM-H 型で  $0.25\bar{P}$  とな

$\beta$		X-DIR.					Y-DIR.				
		$\mu$		$u_0/u$	$u_1/u$	$u_2/u$	$u_\theta$	$\mu$		$v_0/v$	$v_1/v$
		1.0	1.00	1.07	1.10	1.08	.16	1.00	1.00	.99	1.02
BR-SL	2.0	3.35	.49	.56	.47	.44	1.57	.96	.92	1.09	.14
	3.0	4.91	1.14	1.35	.93	.54	1.72	1.09	.87	1.47	.47
	4.0	12.27	1.07	.63	1.51	.78	2.64	.70	1.18	1.18	1.61
	1.0	1.00	1.00	1.00	1.00	.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.00
BR-BL	2.0	1.68	1.00	.99	1.01	.03	1.57	1.04	1.05	1.03	.02
	3.0	1.69	1.00	1.08	1.01	.17	1.72	1.09	1.00	1.17	.09
	4.0	2.43	1.00	.98	1.02	.09	2.64	.95	1.00	.91	.05

表-3

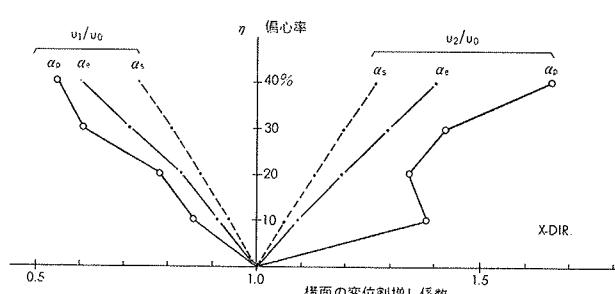


図-5 偏心時の結果

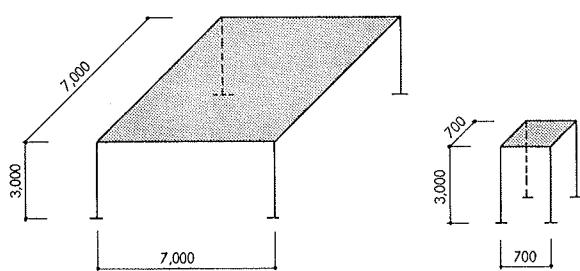


図-6(a) RM-L型架構

図-6(b) RM-H型架構

	RM-L	RM-H
柱 : A=40.9	柱 : A=40.9	
I <sub>x</sub> , I <sub>y</sub> =4550.	I <sub>x</sub> , I <sub>y</sub> =4550.	
梁 : I <sub>x</sub> , I <sub>y</sub> = $1.06 \times 10^5$ (剛比柱の10倍)	梁 : I <sub>x</sub> , I <sub>y</sub> = $1.06 \times 10^4$ (剛比柱の10倍)	
質量 : W=100.2ton	質量 : W=81.64ton	
W <sub>s</sub> = $5.43 \times 10^6$ ton·cm <sup>2</sup>	W <sub>s</sub> = $3.94 \times 10^4$ ton·cm <sup>2</sup>	

表-4 RM 型モデル部材断面リスト

る。なお  $T_x$ ,  $T_y$  は両者共に 0.50 秒となるように質量を変えているが、 $T_\theta$  については RM-L, H 型で各々 0.235, 0.200 秒となっている。解析結果を表-5, 図-7 に示す。なお同図表で RM-H 型の場合に  $\beta$  が 1.23 の倍数となっているのは、RM-L 型に比較して質量が 1/1.23 倍より  $\beta$  を 1.23 倍としたためである。重心最大変位と構面最大変位の差は両者共に見られないが、 $u_\theta$ ,  $v_\theta$  では  $\beta$  が増大するにつれ大きくなる傾向が見られる。この傾向は RM-H 型の方が著しく大きな値を示している。これらの事より並進とねじれ振動のピークが一致しないため構面の最大変位にねじれ振動の影響は表われないが、ねじれ振動は常に生じており、軸力変動値が大きな場合 (RM-H 型) はねじれ振動も大きくなっている事がわかる。しかしその度合は、4.1 で述べた BR-SL 型に比較すれば小さな値である。

## 5. 結 論

今回の計算例の様な場合に限定されるが、下記の事がわかった。

(i) プレース付架構で偏心の無い場合でも、プレースの復元力特性がスリップ型の場合は、バイリニヤー型に比較してねじれ振動が大きくなり、その傾向は地動加速度の増大に伴なって大きくなる。

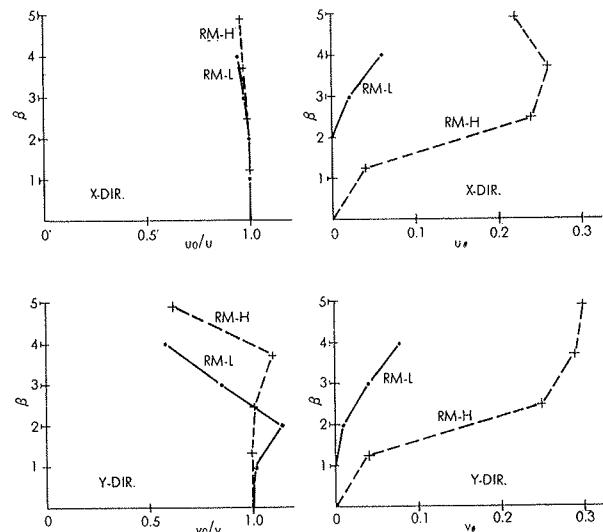


図-7 RM-H, RM-L 型

$\beta$	X-DIR.					Y-DIR.					$v_n$	
	$\mu$	$u_0/u$				$u_1/u$	$v_0/v$					
		$u_0/u$	$u_1/u$	$u_2/u$	$u_n$		$v_0/v$	$v_1/v$	$v_2/v$	$v_n$		
RM-L	1.00	1.00	1.00	1.00	.00	1.00	1.01	1.01	1.01	.00		
	2.00	1.70	1.00	1.00	.00	1.57	1.14	1.14	1.15	.01		
	3.00	2.22	.98	.96	.02	1.72	.85	.83	.88	.04		
	4.00	2.37	.95	.96	.06	2.64	.58	.55	.62	.08		
RM-H	1.23	1.00	1.00	1.00	.04	1.00	1.00	1.00	1.01	.04		
	2.45	1.70	.99	.99	.24	1.57	1.01	1.00	1.02	.25		
	3.68	2.22	.97	.95	.26	1.72	1.10	1.08	1.13	.29		
	4.91	2.37	.96	.98	.22	2.64	.62	.62	.62	.30		

表-5 RM 型結果

(ii) スリップ型プレース付架構で偏心の有る場合の弾塑性応答の変位割増し係数は、静的解析、動的弾塑性応答の場合に比較して大きくなる。

(iii) 純ラーメン架構で偏心の無い場合でも、初期軸力が存在するとねじれ振動を生じ、柱の変動軸力が大きな場合、また入力加速度が大きな場合にその傾向が大きくなるが、しかし(i)で述べた程大きなものではない。なお本研究にあたり技術研究所井元氏の御協力を得た事を感謝します。

## 6. 参考文献

- 1) Nigam : Yielding in Framed Structures under Dynamic Loads, (Oct. 1970), EM 5, ASCE
- 2) 小堀, 他: 三成分地震動を受ける構造物の弾塑性地震応答, 建築学会大会号, (Oct. 1973)
- 3) 屋高, 他: 立体振動解析プログラムの開発, 大林組技術研究所報, No. 6, (1972)