

防振壁で Rayleigh 波をしゃへいするための一考察

齋藤 二郎 吉岡 尚也
木村 薫

Evaluation Theory for Reducing Rayleigh Waves in Vibration Damping Wall

Jiro Saito Hisaya Yoshioka
Kaoru Kimura

Abstract

A theory is proposed concerning the reduction of Rayleigh waves through provision of a damping wall (width H and depth infinite) in a semi-infinite elastic solid for reducing vibration due to causes such as traffic. The results may be summarized as follows: $0.03 < H/L_R < 0.08$, where H is width of damping wall and L_R is incident Rayleigh wave.

概要

交通機関等の原因で起きた振動をしゃへいするために、半無限弾性体内に厚み H (ただし深さ方向には無限) の障壁を設けたとき、この障壁を透過した Rayleigh 波がどの程度低減するかについて解析したものである。

その結果、防振壁を設置するさいの目安として、たとえば障壁厚さ H と入射 Rayleigh 波の波長 L_R の比 H/L_R については $0.03 < H/L_R < 0.08$ を満足しなければならないことがわかった。

1. はじめに

地表面上の線振源によって生まれる弾性体内の変位の解より、対称となる構造物が振動源から数 m 以上離れている場合には Rayleigh 波の影響をもっとも受けていることがわかった¹⁾。したがって、今後の対策としては Rayleigh 波を効果的にしゃへいしなければならない。

その対策の1つとして、Rayleigh 波が図-1 (すなわち xy 平面を自由表面に、また z 軸の正の部分に弾性体側にあるように座標軸をとる) の媒質 (I) から x 方向に伝播して H なる厚みの障壁 (II) を通り、再び媒質 (III) を x 方向に伝播する場合の障壁の防振効果を考えてみる。図で E (E') はヤング率、 ρ (ρ') は密度、 ν (ν') はポアソン比を意味している。

実際には地層の複雑化のために波の伝播も複雑になるから、図-1 のような媒質の取り扱い方には問題があるかも知れないが、しかし波の透過という問題のみに限ればこれはこれで意味のある解析と言える。

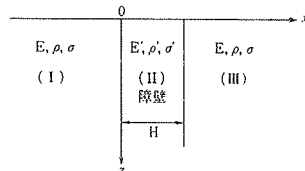


図-1 媒質の取り扱い方

2. 基礎理論

2.1. 入射 Rayleigh 波の定義

二つの関数

$$\varphi = U \exp. i\omega \left(t - \frac{lx - inz}{V_P} \right), \quad \psi = U' \exp. i\omega \left(t - \frac{l'x - in'z}{V_S} \right)$$

について、① $l^2 + (-in)^2 = l^2 - n^2 = 1$, $l'^2 + (-in')^2 = l'^2 - n'^2 = 1$ ② $n = \sqrt{l^2 - 1}$, $n' = \sqrt{l'^2 - 1}$ ③ $l/V_P = l'/V_S$ がみたされているとする。

①から φ, ψ は波動方程式 $\partial^2 \varphi / \partial t^2 = V_P^2 \nabla^2 \varphi$, $\partial^2 \psi / \partial t^2 = V_S^2 \nabla'^2 \psi$ を満足し、かつ x, z 方向の変位

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

は弾性体の運動方程式をみたしている。

②から $n, n' > 0$ であるから φ, ψ を書きなおせば、

$$\varphi = U \exp. \left(-\frac{\omega n}{V_P} z \right) \exp. i\omega \left(t - \frac{lx}{V_P} \right)$$

$$\psi = U' \exp. \left(-\frac{\omega n'}{V_S} z \right) \exp. i\omega \left(t - \frac{l'x}{V_S} \right)$$

となり、これらは x 方向に伝播速度 $V_P/l = V_S/l'$ で伝わる波動であることがわかる。

しかし、その場合には自由表面上での境界条件を満足

しなければならない。\$V_P/l=V_S/l'=V_R\$ とすれば上の \$\varphi\$, \$\psi\$ はそれぞれ,

$$\begin{aligned} \varphi &= U \exp\left(-\omega\sqrt{\frac{1}{V_R^2}-\frac{1}{V_P^2}}z\right)\exp.i\omega\left(t-\frac{x}{V_R}\right) \\ \psi &= U' \exp\left(-\omega\sqrt{\frac{1}{V_R^2}-\frac{1}{V_S^2}}z\right)\exp.i\omega\left(t-\frac{x}{V_R}\right) \end{aligned} \dots\dots\dots(1)$$

となるから、したがって境界条件 \$(p_{zz})_{z=0}=0\$, \$(p_{zx})_{z=0}=0\$ よりそれぞれ,

$$\begin{aligned} (2-\eta^2)U+2i\sqrt{1-\eta^2}U' &=0 \quad \text{ここに } \eta=V_R/V_S, \\ 2i\sqrt{1-\eta'^2}U-(2-\eta'^2)U' &=0 \quad \text{ここに } \eta'=V_R/V_P \end{aligned}$$

となる。この2つの方程式の解である \$U, U'\$ が \$U=U'=0\$ 以外の値をもつためには,

$$\begin{vmatrix} 2-\eta^2 & 2i\sqrt{1-\eta^2} \\ 2i\sqrt{1-\eta'^2} & -(2-\eta'^2) \end{vmatrix} = 4\sqrt{1-\eta^2}\sqrt{1-\eta'^2}-(2-\eta^2)^2=0 \quad \dots\dots\dots(2)$$

であることが必要で十分である。すなわち、\$V_R\$ がこの方程式を満足するなら、境界条件を満足する \$\varphi\$ と \$\psi\$ が存在し、\$\varphi, \psi\$ で与えられるような表面波が実在する。

したがって、われわれは媒質(I)で生まれる Rayleigh 波、つまりここでの入射 Rayleigh 波を(1)の形であたえることにする。ただし、式中の \$V_R\$ は(2)を満足しなければならない。また \$\omega\$ は角振動数、\$V_P\$ はP波速度、\$V_S\$ はS波速度、\$V_R\$ は Rayleigh 波速度を意味している。

2.2. 境界条件および境界条件を満足するための他の波のつけたし

(1)の形で表わされる Rayleigh 波は表面に沿って伝播し、しかも自由表面でその振幅が一番大きい。この波が図-1の \$x=0\$ 面に入射すると次式のような形で表わされる反射波 \$\varphi_1, \psi_1\$ が(I)に誘起され、同時に(II)なる媒質には屈折波である \$\varphi_2, \psi_2\$, そして \$x=H\$ 面で反射される \$\varphi_3, \psi_3\$ の4種類の波を誘起し、(III)には屈折波である \$\varphi_4, \psi_4\$ が誘起される(図-2参照)。

すなわち、図-2の \$\varphi_{1,2,3,4}, \psi_{1,2,3,4}\$ は,

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A \exp\left(-\omega\sqrt{\frac{1}{V_R^2}-\frac{1}{V_P^2}}z\right)\exp.i\omega\left(t+\frac{x}{V_R}\right) \\ \psi_1 &= B \exp\left(-\omega\sqrt{\frac{1}{V_R^2}-\frac{1}{V_S^2}}z\right)\exp.i\omega\left(t+\frac{x}{V_R}\right) \\ \varphi_2 &= C \exp\left(-\omega\sqrt{\frac{1}{V_R'^2}-\frac{1}{V_P'^2}}z\right)\exp.i\omega\left(t-\frac{x}{V_R'}\right) \\ \psi_2 &= D \exp\left(-\omega\sqrt{\frac{1}{V_R'^2}-\frac{1}{V_S'^2}}z\right)\exp.i\omega\left(t-\frac{x}{V_R'}\right) \\ \varphi_3 &= E \exp\left(-\omega\sqrt{\frac{1}{V_R'^2}-\frac{1}{V_P'^2}}z\right)\exp.i\omega\left(t+\frac{x}{V_R'}\right) \\ \psi_3 &= F \exp\left(-\omega\sqrt{\frac{1}{V_R'^2}-\frac{1}{V_S'^2}}z\right)\exp.i\omega\left(t+\frac{x}{V_R'}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_4 &= G \exp\left(-\omega\sqrt{\frac{1}{V_R^2}-\frac{1}{V_P^2}}z\right)\exp.i\omega\left(t-\frac{x}{V_R}\right) \\ \psi_4 &= K \exp\left(-\omega\sqrt{\frac{1}{V_R^2}-\frac{1}{V_S^2}}z\right)\exp.i\omega\left(t-\frac{x}{V_R}\right) \end{aligned} \dots\dots\dots(3)$$

のようになる。ただし \$V_P, V_S, V_R\$ は(I)および(III)でのP波、S波、

Rayleigh 波の伝播速度を意味し、\$V_P', V_S', V_R'\$ は(II)でのそれを意味している。

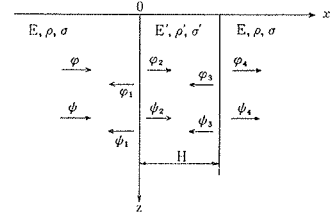


図-2 入射 Rayleigh 波に対する反射波と屈折波

(3)における未定係数 A, B, C,

D, E, F, G, K は境界条件から決定されるものである。さて境界条件であるが、これについては障壁の前面(\$x=0\$面)と後面(\$x=H\$面)で \$x\$ 軸に垂直な面をとうしての変位と応力の連続性を仮定すると、\$x=0\$ 面では,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\varphi+\varphi_1)-\frac{\partial}{\partial z}(\psi+\psi_1) &= \frac{\partial}{\partial x}(\varphi_2+\varphi_3) \\ &\quad -\frac{\partial}{\partial z}(\psi_2+\psi_3) \end{aligned} \dots\dots\dots(4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}(\varphi+\varphi_1)+\frac{\partial}{\partial x}(\psi+\psi_1) &= \frac{\partial}{\partial z}(\varphi_2+\varphi_3) \\ &\quad +\frac{\partial}{\partial x}(\psi_2+\psi_3) \end{aligned} \dots\dots\dots(5)$$

$$\begin{aligned} \left\{(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\lambda\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\}(\varphi+\varphi_1)-2\mu\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}(\psi+\psi_1) \\ = \left\{(\lambda'+2\mu')\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\lambda'\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\}(\varphi_2+\varphi_3) \\ -2\mu'\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}(\psi_2+\psi_3) \end{aligned} \dots\dots\dots(6)$$

$$\begin{aligned} 2\mu\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}(\varphi+\varphi_1)-\mu\left\{\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\}(\psi+\psi_1) \\ = 2\mu'\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}(\varphi_2+\varphi_3)-\mu'\left\{\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\}(\psi_2+\psi_3) \end{aligned} \dots\dots\dots(7)$$

となり、\$x=H\$ 面では,

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_2+\varphi_3)-\frac{\partial}{\partial z}(\psi_2+\psi_3) = \frac{\partial\varphi_4}{\partial x}-\frac{\partial\psi_4}{\partial z} \quad \dots\dots(8)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\varphi_2+\varphi_3)+\frac{\partial}{\partial x}(\psi_2+\psi_3) = \frac{\partial\varphi_4}{\partial z}+\frac{\partial\psi_4}{\partial x} \quad \dots\dots(9)$$

$$\begin{aligned} \left\{(\lambda'+2\mu')\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\lambda'\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\}(\varphi_2+\varphi_3)-2\mu'\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}(\psi_2+\psi_3) \\ = \left\{(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\lambda\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\}\varphi_4-2\mu\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\psi_4 \end{aligned} \dots\dots\dots(10)$$

$$\begin{aligned} 2\mu'\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}(\varphi_2+\varphi_3)-\mu'\left\{\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\}(\psi_2+\psi_3) \\ = 2\mu\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\varphi_4-\mu\left\{\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\}\psi_4 \end{aligned} \dots\dots\dots(11)$$

のようになる。ここに $\lambda(\lambda')$, $\mu(\mu')$ は Lamé の定数で、

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \\ \lambda' &= \frac{\nu' E'}{(1+\nu')(1-2\nu')}, \quad \mu' = \frac{E'}{2(1+\nu')} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

を意味している。

以上の 8 つの条件を用いて 8 個の未定係数 A, B, C, D, E, F, G, K を決定することができ、したがって ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 , ϕ_4 を知ることができる。

2.3. 変位伝達率

ただいまの場合は変位伝達率、とくに自由表面上での変位伝達率を取り上げることになる。 ϕ_4 , ψ_4 による x, z 方向の変位を u_4 , w_4 とすれば、

$$\begin{aligned} u_4 &= \left(\frac{\partial \phi_4}{\partial x} - \frac{\partial \psi_4}{\partial z} \right)_{z=0} \\ &= \frac{\omega}{V_R} \sqrt{G^2 + \left(1 - \frac{V_R^2}{V_S^2}\right) K^2} \exp \left\{ i\omega \left(t - \frac{x}{V_R} \right) \right\} \\ w_4 &= \left(\frac{\partial \phi_4}{\partial z} + \frac{\partial \psi_4}{\partial x} \right)_{z=0} \\ &= \frac{\omega}{V_R} \sqrt{\left(1 - \frac{V_R^2}{V_P^2}\right) G^2 + K^2} \exp \left\{ i\omega \left(t - \frac{x}{V_R} \right) \right\} \end{aligned}$$

であり、入射 Rayleigh 波による x, z 方向の変位 u_0 , w_0 は、

$$\begin{aligned} u_0 &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{z=0} = U i \frac{\omega}{V_R} \frac{V_R^2}{2V_S^2} \exp \left\{ i\omega \left(t - \frac{x}{V_R} \right) \right\} \\ w_0 &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{z=0} \\ &= U \frac{\omega}{V_R} \frac{V_R^2/V_S^2 \cdot (1 - V_R^2/V_S^2)}{4\sqrt{1 - V_R^2/V_S^2}} \exp \left\{ i\omega \left(t - \frac{x}{V_R} \right) \right\} \end{aligned}$$

であるから x, z 方向の変位伝達率をそれぞれ T_{wx} , T_{wz} とすると、

$$\begin{aligned} T_{wx} &= (u_4 \text{ の振幅}) / (u_0 \text{ の振幅}) \\ T_{wz} &= (w_4 \text{ の振幅}) / (w_0 \text{ の振幅}) \end{aligned} \dots\dots\dots(13)$$

すなわち、

$$\begin{aligned} T_{wx} &= \sqrt{G^2 + \left(1 - \frac{V_R^2}{V_S^2}\right) K^2} / \frac{V_R^2}{2V_S^2} \\ T_{wz} &= \sqrt{\left(1 - \frac{V_R^2}{V_P^2}\right) G^2 + K^2} / \frac{V_R^2/V_S^2 \cdot (2 - V_R^2/V_S^2)}{4\sqrt{1 - V_R^2/V_S^2}} \end{aligned} \dots\dots\dots(13')$$

となって T_{wx} , T_{wz} を決定できる。ただし $U=1$ とする。

(13)' に含まれている未定係数 G, K は複素形式で与えられるから、(13)' の分子は実数部分と虚数部分に分けなければならないが、これについては $G=g_1+ig_2$, $K=k_1+ik_2$ とおくことによってただちに求まる。

3. 考 察

ここではつぎの二つのことから仮定して考察をすす

めていく。すなわち、

(1) 地盤は関東ロームを対象にする。したがって、この場合の地盤の物理定数は以下のようなになる²⁾。

- *ヤング率 $E=775 \text{ kg/cm}^2$
- *密度 $\rho=1.4 \text{ kg/cm}^3$
- *ポアソン比 $\nu=0.42$
- *P波速度 $V_P=380 \text{ m/sec}$
- *S波速度 $V_S=142 \text{ m/sec}$
- *Rayleigh 波速度 $V_R=135 \text{ m/sec}$

(2) 地盤内に設ける障壁のポアソン比が関東ロームのポアソン比に等しいとする。

(2)の仮定を設けたことで障壁内の P, S 波速度および Rayleigh 波速度は原地盤と障壁のヤング率および密度を比の形であたえることによって自動的に決まってしまう。たとえば、障壁を伝わる P 波速度 $V_{P'}$ については $V_{P'} = \sqrt{E'/E \cdot \rho/\rho'} V_P$ のようになる。

図-3 (A), (B) は密度比 ρ'/ρ を固定し、ヤング率比

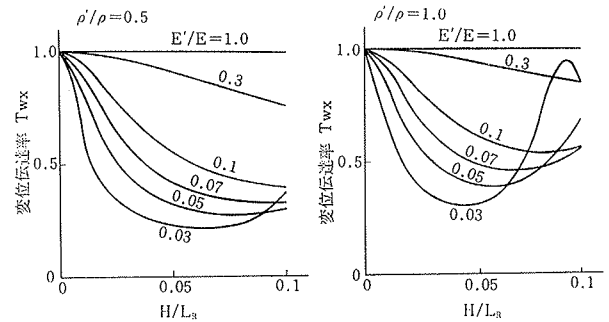


図-3(A), (B) T_{wx} と H/L_R の関係

E'/E を変えて H/L_R (すなわち、障壁厚さ H と入射 Rayleigh 波との比) に対する x 方向 (水平方向) の変位伝達率 T_{wx} を図示したものである。(A) が $\rho'/\rho=0.5$, (B) が $\rho'/\rho=1.0$ にあたる。 ρ'/ρ が一定なら H/L_R のある範囲においては、 E'/E が小さいほど障壁による変位の低減率は大きくなるようである。しかし、障壁による変位の低減率が H/L_R の制約にうけているということは、 E'/E を小さくしすぎると障壁効果が上がらないときもありうることを暗示していることになる。逆に E'/E が一定なら、 ρ'/ρ が小さいほど障壁効果の良いいことも(A), (B)の図からわかる。

図-4 はとくに障壁厚さを 1 m, 入射 Rayleigh 波の周波数を 5 Hz とした場合 (したがって、このときの $H/L_R=0.04$) の密度比 ρ'/ρ の変化による変位伝達率 T_{wx} とヤング率比 E'/E の関係を図-3 (A), (B)を利用して図示したものである。図から障壁による変位の低減率の幅は、 ρ'/ρ を小さくするよりも E'/E を小さくするほう

が大きいと言える。また、図において $E'/E < 0.02$ の範囲を図示してないのは、変位の伝達を7割以上低減させると認めためである。

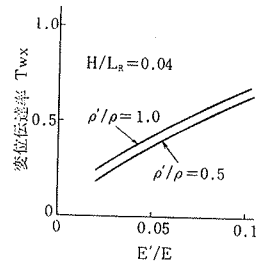


図-4 T_{wx} と E'/E の関係

図-5では $H/L_R (=0.04)$ を固定し、密度比 ρ'/ρ の変化による変位伝達率 T_{wx} とヤング率比 E'/E の関係をさらに詳しく調べてみた。 ρ'/ρ と E'/E がともに小さくなるほど(すなわち、障壁の密度とヤング率が小さくなるほど)しゃへい効果の良くなる事が図からわかる。

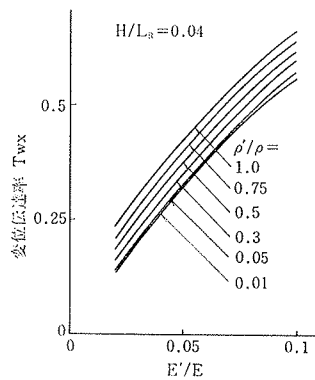


図-5 ρ'/ρ の変化による T_{wx} と E'/E の関係

図-6は入射 Rayleigh 波の変位の振幅を6割低減させたいときの密度比 ρ'/ρ とヤング率比 E'/E の関係を図-5を利用して図示したものである。したがって、障壁の厚さ H と入射 Rayleigh 波の波長の比 H/L_R が 0.04 であるような場合には、 ρ'/ρ と E'/E とが図のような関係を満足する材料を障壁材として設置すれば、この障壁材

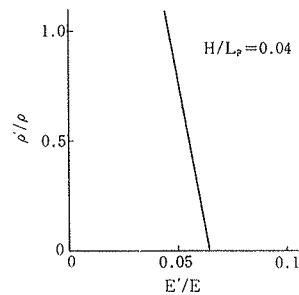


図-6 ρ'/ρ と E'/E の関係

で入射 Rayleigh 波の変位の振幅を6割低減できる。

なお、数値解析の結果 x 方向の変位伝達率 T_{wx} と Z 方向の変位伝達率 T_{wz} はほとんど同じであった。

4. おわりに

以上のような理論考察を行なってみたが、まとめるとつぎのようになる。すなわち、われわれが防振壁を設置するさいの目安として、

- (1) 障壁厚さ H と入射 Rayleigh 波の波長 L_R の比 H/L_R については $0.03 < H/L_R < 0.08$
- (2) 原地盤と障壁の密度比 ρ'/ρ については 0.5 以下、ヤング率比 E'/E については 0.1 以下を満足する必要があると言える。

考察を述べるにあたり、当研究所の後藤、小出、白砂、菊地職員から貴重な御意見をいただいた。ここに記して感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 齋藤、木村、吉岡：交通機関の振動源によって生まれる半無限弾性体内の変位について、大林組技術研究所報, No. 15, (1977)
- 2) 内藤、木村、藤原、小出：有限要素法による地中防振壁の解析、大林組技術研究所報, No. 12, (1976)