

水平円柱に作用する全波力について (その2)

—有限振幅波理論による次元解析—

藤 沢 康 雄
(本社技術本部海洋開発部)
井 出 和 文
(本社技術本部海洋開発部)

Total Wave Forces on a Horizontal Cylinder (Part 2)

—Dimensional Analysis by Finite-Amplitude Wave Theory—

Yasuo Fujisawa
Kazufumi Ide

Abstract

The authors have investigated the characteristics of wave forces acting on a submerged horizontal cylinder. A submerged horizontal cylinder, located in a two-dimensional wave channel was subjected to a train of linear gravity waves. The horizontal and vertical forces were measured and presented in dimensionless form. Experimental values of horizontal and vertical force coefficients are presented as functions of dimensionless wave height and wave period. Waves are often non-linear in nature, and therefore, fluid particle velocity and acceleration values were calculated from the finite-amplitude wave theory (Stokes fifth-order gravity wave theory). As the result of the theoretical analysis, it was ascertained that in evaluation of the horizontal wave force the Morison equation should be applied, while it is necessary to consider inertia force and lift force in evaluating the vertical wave force.

概 要

近年、海底石油掘削用プラットフォーム、海洋レジャー用プラットフォーム等、水平円柱部材を用いた海洋構造物が数多く建設されている。これらの海洋構造物に作用する波力の適切な評価を行なうことが設計上非常に重要である。本論文は規則波（非砕波）によって波の峰の進行方向が円柱の長手方向と直角になるように二次元水槽内に設置した場合の、水平円柱に及ぼす波力（水平成分波力と鉛直成分波力）の特性について検討した。円柱に作用する波はその非線形性を考慮して、有限振幅波理論（Stokes 波第5近似解）により Morison の波力算定式及び次元解析に基づいて、水平円柱に作用する全波力の特性について検討した。その結果、水平円柱に作用する波力を評価するためには、水平成分波力は Morison 式を適用し、鉛直成分波力の評価には鉛直成分慣性力と揚力を考慮した取扱が必要であることがわかった。

1. 序

前報（その1）⁶⁾では微小振幅波理論を用いて、水平円柱に作用する波力を評価したが、実際の波は非線形でありその波力を評価するために、非線形性を考慮した有限振幅波理論（Stokes 波第5近似解）を用いる必要がある。本報ではこの有限振幅波理論により水平円柱に作用する全波力について検討した。周知のように、海洋構造物に作用する波力の算定には Morison の波力算定式がある。これは波力を抗力と慣性力の線形和として表現できるので広く実用化されている。この代表的な研究には Keule

gan-Carpenter¹⁾、長崎²⁾、土屋・山口³⁾、Gehrman⁴⁾らにより実験及び解析が行なわれている。水平円柱の場合は直立円柱に比べて研究例も少なく、必ずしも明確な波力の算定式が確立されていない。流体力学的観点から見ると、直立円柱の場合と本質的に同じであるが波動運動場において付加的な要素のために若干その特性に相違がある。本論文は有限振幅波理論を導入した Morison の波力算定式及び次元解析に基づいて水平円柱に作用する全波力の特性について検討した。

2. 実験装置及び実験方法

実験は九州大学応用力学研究所海洋防災実験所内の二次元水槽（長さ 60 m, 幅 1.5 m, 深さ 1.5 m）に於て、単一周期の規則波を使用して行なった。水平円柱モデルは硬質塩化ビニール製（直径 11.4 cm, 長さ 76.0 cm）を 2 分割し、波力測定用アーム、取付け枠、固定台等で水槽に固定した。波高計は電気抵抗型を使用しモデル中央真上に 1 個とモデル前方 5 m の位置に 1 個を設置した。なお、波力測定アーム（測定部 2 cm 角、鉄製）には、半導体ストレンゲージ（新興通信(株)製、TYPE-EN108）を貼付け測定した。実験に際しては波高、周期、モデルの設置水深を変化させた。実験に用いた波の周期は 1.0 秒、1.4 秒、2.0 秒、波高は 4.8 cm～13.1 cm の範囲、設置水深（静水面よりモデルの中心距離）を 15.6 cm, 45.1 cm, 74.9 cm とした。実験時の状況を写真-1 に示す。

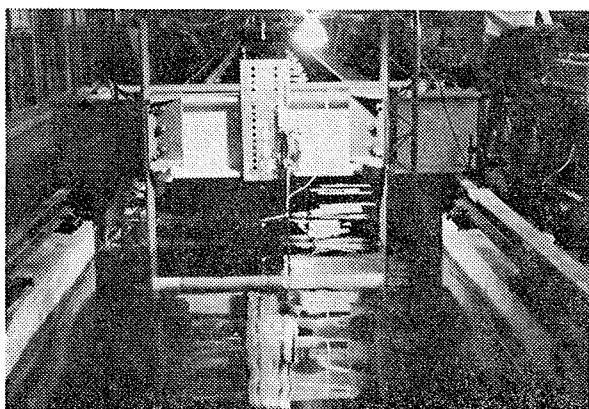


写真-1 実験状況

3. 有限振幅波理論による次元解析

3.1. 次元解析

水平円柱に作用する波力は、波や水平円柱の特性と密接な関係があり、それらの特性を示す各種のパラメータの波力に及ぼす効果を知ることが重要である。図-1 に水平円柱の座標系を示す。

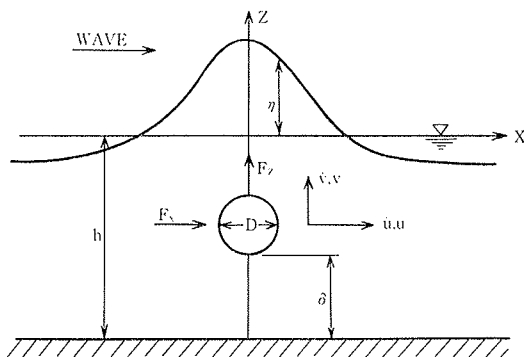


図-1 座標系

水平円柱に作用する全波力に関する物理量に対し、単位ユニット当りに作用する最大波力は次式でしめされ

る。

$$F_{\max}/l = f(h, H, T, L, a, \rho, g, \mu) \quad \dots\dots(1)$$

ここに、F: 波力, h: 水深, H: 波高, T: 波の周期, L: 波長, a: 円柱の半径, ρ: 流体の密度, g: 重力加速度, μ: 流体の粘性, l: 円柱の長さ

各パラメータ間の関係は、実際の波の物理量(h, H, L)に関係している。式(1)において適当な基本量を選んで Buckingham の π 定理により無次元波力は次式となる。

$$F_{\max}/\rho \cdot g \cdot a^2 \cdot l = f(gT^2/h, h/a, H/D, \mu/l\sqrt{gha^2}) \quad (2)$$

式(2)の右辺の最後の項は、Froude 数と Reynolds 数の比を表わし、慣性力と粘性との比も表わす。しかしながら、全波力の最大値に注目し粘性の効果を無視すれば式(2)は次のように表わせる。

$$\tilde{F}_{\max} = f(gT^2/h, h/a, H/D) \quad \dots\dots(3)$$

ここに、 $\tilde{}$ は無次元量を表わす。

これから、全波力の最大値は三つの無次元量, gT^2/h , H/D , h/a の関係として表示できる。

3.2. 波動理論

波動運動は過度が零であり、速度ポテンシャル φ をもち次式の境界問題として表わせる。

(1) 運動方程式 流体の運動はラプラス方程式を満足する。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Z^2} = 0 \quad \dots\dots(4)-(1)$$

X, Z 方向速度は $U = \frac{\partial \phi}{\partial X}$, $V = \frac{\partial \phi}{\partial Z}$ $\dots\dots(4)-(2)$

(2) 境界条件 底部の境界条件は鉛直方向の水粒子速度は零であるから、

$$\frac{\partial \phi}{\partial Z} = 0, \quad (Z = -h) \quad \dots\dots(5)$$

また、水面での境界条件は動学的な条件として圧力が零となるように、また、波速 C と同じ X 方向に移動する座標を考えるとベルヌイ方程式は次のように表わせる。

$$(U-C)^2 + V^2 = 2g(\pi - Z), \quad (Z = \eta) \quad \dots\dots(6)$$

運動力学的境界条件は、自由表面を横方向に伝わらないという条件より次のように表わせる。

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = \frac{V}{U-C}, \quad (Z = \eta) \quad \dots\dots(7)$$

以上から、式(4)-(1)、式(5)、式(6)、式(7)で流体の運動は完全に決定される。上式より速度ポテンシャル φ を求めるために、波動理論として Stokes 波の第 5 次近似解を用いた。

3.3. 有限振幅波理論(Stokes 波第 5 次近似解)

Stokes 波理論は水面での境界条件を非線形のまま取扱うものであり、これには摂動法が用いられる。Stokes はすべての従属変数を無次元パラメータ ε (ε ≪ 1) のべき級数で展開し、第 2 次近似解の有効性を証明した。また、

Skjelbreia, Hendrickson⁵⁾ はこの理論を第5次近似まで拡張し境界問題を次のように表わした。以下すべてを無次元量(記号 \sim)で表わす。

(1) 速度ポテンシャル

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} = \bar{c} \{ & A_1 \cosh(\beta S) \sin \theta + A_2 \cosh(2\beta S) \sin(2\theta) \\ & + A_3 \cosh(3\beta S) \sin(3\theta) + A_4 \cosh(4\beta S) \sin(4\theta) \\ & + A_5 \cosh(5\beta S) \sin(5\theta) \} \quad \dots\dots(8) \end{aligned}$$

ここに $\tilde{\phi} = \beta\phi/\sqrt{gh}$, $\bar{c} = c/\sqrt{gh}$, θ : 位相角

(2) 波形

$$\begin{aligned} \bar{y} = \frac{1}{d} \{ & \lambda \cos(\theta) + B_2 \cos(2\theta) + B_3 \cos(3\theta) \\ & + B_4 \cos(4\theta) + B_5 \cos(5\theta) \} \quad \dots\dots(9) \end{aligned}$$

ここに, $\bar{y} = y/d$, $\bar{d} = 2\pi h/L$, π の級数表示は $\pi = 1/\beta \times \{\lambda^2 c_3 + \lambda^4 c_4\}$, $\lambda = \beta \cdot \alpha$, $\beta = 2\pi/L$, α : 波による定数

(3) 波速

$$\bar{c} = \frac{1}{\bar{d}} c_0^2 \{1 + \lambda^2 c_1 + \lambda^4 c_2\} \quad \dots\dots(10)$$

(4) 水粒子の速度, 加速度

$$\bar{u} = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial X} = \bar{c} \{ A_1 \cosh(\beta S) \cos(\theta) + 2A_2 \cosh(2\beta S) \times \cos(2\theta) + \dots\dots + 5A_5 \cosh(5\beta S) \cos(5\theta) \} \quad \dots(11)$$

$$\bar{V} = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} = \bar{c} \{ A_1 \sinh(\beta S) \cos(\theta) + 2A_2 \sinh(2\beta S) \times \cos(2\theta) + \dots\dots + 5A_5 \sinh(5\beta S) \cos(5\theta) \} \quad \dots(12)$$

ここに, $\bar{u} = u/\sqrt{gh}$, $\bar{V} = V/\sqrt{gh}$

$$\hat{a}_x = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \bar{d} \bar{c}^2 \{ A_1 \sinh(\beta S) \sin(\theta) + 2A_2 \sinh(2\beta S) \times \sin(2\theta) + \dots\dots + 5A_5 \sinh(5\beta S) \sin(5\theta) \} \quad \dots(13)$$

$$\hat{a}_z = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = \bar{d} \cdot \bar{c}^2 \{ A_1 \sinh(\beta S) \cos(\theta) + 2A_2 \sinh(2\beta S) \times \cos(2\theta) + \dots\dots + 5A_5 \sinh(5\beta S) \cos(5\theta) \} \quad \dots(14)$$

ここに, $\hat{a}_x = a_x/g$, $\hat{a}_z = a_z/g$

以上, 第5次近似解の諸係数は次の通りである。

$$\begin{aligned} S &= \sinh(\bar{d}), C = \cosh(\bar{d}), C_0 = \tanh(\bar{d}) \\ C_1 &= (8C^4 - 8C^2 + 9)/8S^4 \\ C_2 &= (3840C^{12} - 4096C^{10} + 2592C^8 - 1008C^6 + 5944C^4 \\ &\quad - 1830C^2 + 147)/512S^{10}(6C^2 - 1) \\ C_3 &= -1/4SC, C_4 = (12C^8 + 36C^6 - 162C^4 + 141C^2 - 27) \\ &\quad /192CS^9 \\ A_{11} &= 1/S, A_{13} = -C^2(5C^2 + 1)/8S^5 \\ A_{15} &= -(1184C^{10} - 1440C^8 - 1992C^6 + 2641C^4 - 249C^2 \\ &\quad + 18)/1536S^{11}, A_{22} = 0.375S^4 \\ A_{24} &= (192C^8 - 424C^6 - 312C^4 + 480C^2 - 17)/768S^{10} \\ A_{33} &= (13 - 4C^2)/64S^7 \\ A_{35} &= (512C^{12} + 4224C^{10} - 6800C^8 - 12808C^6 + 16704C^4 \\ &\quad - 3154C^2 + 107)/4096S^{13}(6C^2 - 1) \\ A_{44} &= (80C^8 - 816C^4 + 1338C^2 - 197)/1536S^{10}(6C^2 - 1) \\ A_{55} &= -(2880C^{10} - 72480C^8 + 324000C^6 - 432000C^4 \\ &\quad + 163470C^2 - 16245)/61440S^{11}(6C^2 - 1)(8C^4 \end{aligned}$$

$$-11C^2 + 3)$$

$$B_{22} = (2C^2 + 1)/4S^3, B_{33} = 3(8C^6 + 1)/64S^6$$

$$B_{24} = C(272C^8 - 504C^6 - 192C^4 + 322^2 + 21)/384S^9$$

$$\begin{aligned} B_{35} &= (88128C^{14} - 208224C^{12} + 70818C^{10} + 54000C^8 \\ &\quad - 21816C^6 + 6264C^4 - 54C^2 - 81)/12228S^{12} \times \\ &\quad (6C^2 - 1) \end{aligned}$$

$$B_{44} = C(768C^{10} - 448C^8 - 48C^6 + 48C^4 + 106C^2 - 21) \times /384S^9(6C^2 - 1)$$

$$\begin{aligned} B_{55} &= (192000C^{16} - 262720C^{14} + 83680C^{12} + 20160C^{10} \\ &\quad - 7280C^8 + 7160C^6 - 1800C^4 - 1050C^2 + 225) \times \\ &\quad /12288S^{10}(6C^2 - 1)(8C^4 - 11C^2 + 3) \end{aligned}$$

$$A_1 = \lambda A_{11} + \lambda^3 A_{13} + \lambda^5 A_{15}, A_2 = \lambda^2 A_{22} + \lambda^4 A_{24}$$

$$A_3 = \lambda^3 A_{33} + \lambda^5 A_{35}, A_4 = \lambda^4 A_{44}$$

$$A_5 = \lambda^5 A_{55}, B_2 = \lambda^2 B_{22} + \lambda^4 B_{24}$$

$$B_3 = \lambda^3 B_{33} + \lambda^5 B_{35}, B_4 = \lambda^4 B_{44}, B_5 = \lambda^5 B_{55}$$

3.4. 水平円柱に作用する波力算定式

(1) 水平方向波力

図-1に示した座標系によると, 水平円柱に作用する波力は抗力と慣性力の和として Morison 式で表わせる。

$$F_X = (\rho/2) \cdot C_D \cdot D \cdot l \cdot |u|u + (\rho/4) \cdot C_M \cdot \pi \cdot D^2 \cdot l \cdot du/dt \quad \dots\dots(15)$$

ここに, F_X : X方向の全波力 l: 円柱の長さ

C_D : 抗力係数 u: 水粒子速度

C_M : 質量係数 du/dt : 水粒子加速度

D: 円柱の直径 ρ : 流体の密度

今回の実験では波動場の非定常性を表示する Keulegan-Carpenter 数 (KC: $u_{max} T/D$) は2.6以下となり慣性力が卓越する。式(15)の慣性項を無次元化する。

$$\tilde{F}_X = (1.0 + C_{Ma}) \cdot \pi \cdot \hat{a}_x \quad \dots\dots(16)$$

ここに, $\tilde{F}_X = F_X/\rho \cdot g \cdot a^2 \cdot l$, C_{Ma} : 付加質量係数

(2) 鉛直方向波力

鉛直方向成分波力は揚力と慣性力の二つの力を考慮する。

① 揚力

$$F_L = -\frac{1}{2} (D \cdot l \cdot \rho) \cdot C_L \cdot U|U| \quad \dots\dots(17)$$

$$\tilde{F}_L = \tilde{h} \cdot C_L \cdot \tilde{U}|\tilde{U}| \quad \dots\dots(18)$$

ここに, C_L : 揚力係数 ($C_L = 1.0$), $\tilde{F}_L = F_L/\rho \cdot g \cdot a^2 \cdot l$, $\tilde{h} = h/a$

② 慣性力

水平円柱の表面まわりの圧力分布は, 鉛直波力の総和として求まる。波力は図-2に示すように, 円柱の微小面積 dA

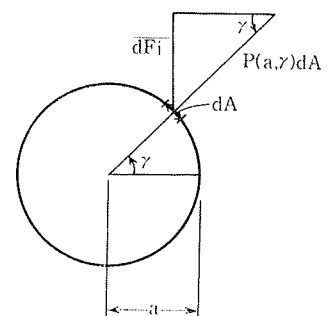


図-2 慣性力の作用

に dF_i が作用する。無次元表示で表わすと、

$$\tilde{F}_L = \int_0^{2\pi} \tilde{P}(a \cdot r) \sin r d\gamma \quad \dots\dots(19)$$

圧力はバインイ方程式より、

$$\tilde{P} = -\tilde{h} \left\{ \frac{1}{2} (\tilde{U}^2 + \tilde{V}^2) + \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} \right) \right\} \quad \dots\dots(20)$$

ここに、 $\tilde{P} = P / \rho \cdot g \cdot a$

従って、慣性力は、

$$\tilde{F}_L = -\tilde{h} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} (\tilde{U}^2 + \tilde{V}^2) + \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} \right) \right\} \sin r d\gamma \quad \dots\dots(21)$$

そして鉛直方向の全波力は次式で表わせる。

$$\tilde{F}_Z = \tilde{h} \left[C_L \cdot \tilde{U} |\tilde{U}| - \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} (\tilde{U}^2 + \tilde{V}^2) + \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} \right) \right\} \cdot \sin r d\gamma \right] \quad \dots\dots(22)$$

諸式を用いて水平円柱に作用する全波力の次元解析を行なった。

4. 結果と考察

図-3から図-8に次元解析結果及び実験結果をしめす。この結果から無次元波力の最大値に及ぼす波や水平円柱に関する無次元量の影響を明らかにし、これらの結果が理論計算によってどの程度説明されるかを検討した。質量係数については前報(その1)⁶⁾で報告したように、 $\delta/D = 4.7 \sim 9.9$ (Proximity effect) と大きい。土屋・山口ら³⁾によると $\delta/D > 0.6$ であれば底面の影響は無視できるとしている。本実験では底面の影響は表われていない。設置水深 15.6 cm の場合は水平円柱が水面の近くに位置しているので、波自体が水平円柱のため散乱、および波の変形が生じるので波力にも特異な性質が見られる。特にこの場合の質量係数は非常にバラツキがある。また、設置水深 45.1 cm, 74.9 cm の場合は、波によるバラツキも少なく質量係数は1.7~2.1の範囲であった。本報ではこの質量係数を用いて ($C_M = 2.0$ の場合) 次元解析した波力と実験結果は良く一致している。円柱の粗度、振動特性、粘性および底面の影響を無視すると、水平円柱に作用する単位長さあたりの波力の最大値 ($F_{\max} / \rho \cdot g \cdot a^2 \cdot l$) に関する要素として、 $g \cdot T^2/h$, H/h , H/D と他に円柱の設置水深を表わす z/h がある。図-3に ($z/h = -0.34$ (一定) とした場合の水平円柱に作用する単位長さあたりの最大波力 $F_{x \cdot \max} / \rho \cdot g \cdot a^2 \cdot l$ と $g \cdot T^2/h$ の関係を H/D をパラメータにして示す。この図からは X 方向最大波力係数の一般的な特性は考察しにくい、一定の H/h , z/h の値に対して $g \cdot T^2/h$ とともに増加していく。図-4に水平円柱に作用する単位長さあたりの最大波力係数と H/h の関係を $g \cdot T^2/h$ をパラ

メータにして示す。波力係数は図-4の H/h , 図-5の H/D と共に直線的に増加しており、その増加の割合は両者とも $g \cdot T^2/h$ が大きくなるとともに大きく増加し、小さい値では比較的ゆるい増加である。図-4, 図-5から水平円柱に作用する単位長さあたりの水平成分最大波力係数は、主として H/D 及び H/h に依存していることがわかる。また、質量係数 $C_M = 2.0$ を用いて計算した理論値と実験値は非常によく一致している。従って水平円柱に作用する水平成分波力を評価する場合は、Mori-son 式による算定法で十分評価できる。

図-6, 図-7, 図-8に水平円柱に作用する単位長さあたりの鉛直成分の最大波力係数 ($F_{z \cdot \max} / \rho \cdot g \cdot a^2 \cdot l$)

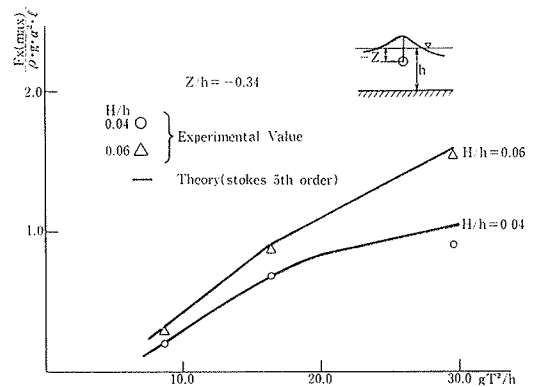


図-3 水平成分波力(波力係数と $g \cdot T^2/h$)

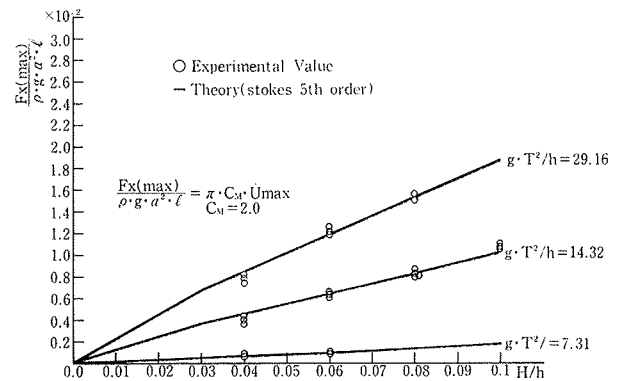


図-4 水平成分波力(波力係数と H/h)

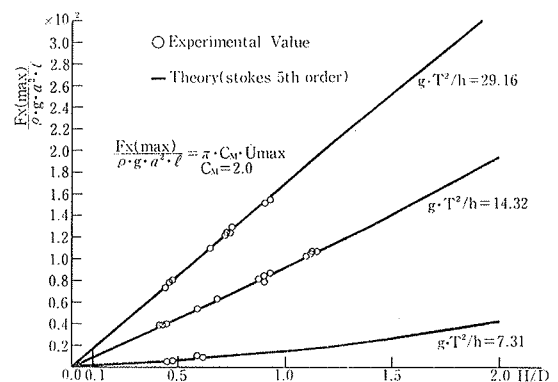


図-5 水平成分波力(波力係数と H/D)

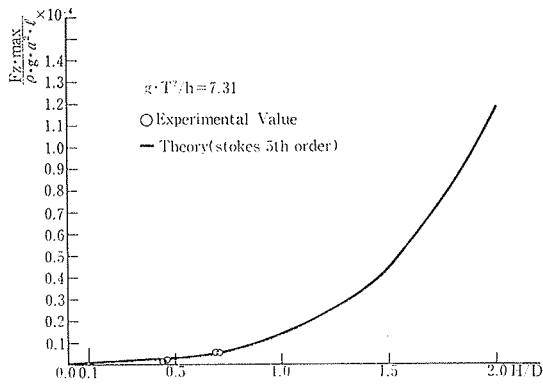


図-6 鉛直成分波力 ($g \cdot T^2/h = 7.31$)

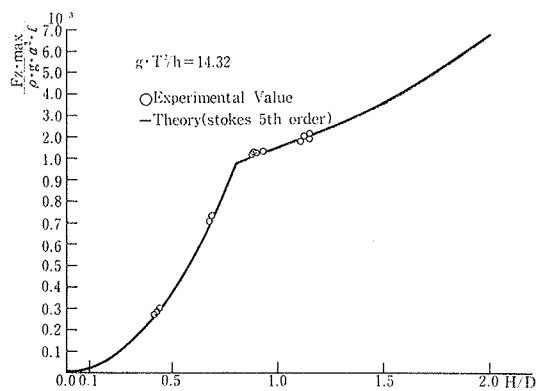


図-7 鉛直成分波力 ($g \cdot T^2/h = 14.32$)

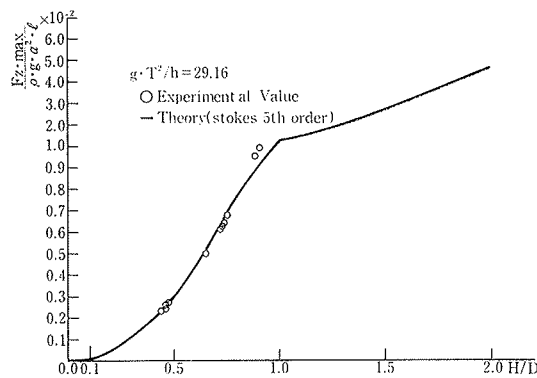


図-8 鉛直成分波力 ($g \cdot T^2/h = 29.16$)

と H/D の関係を $g \cdot T^2/h$ をパラメータにして示した。

図-6 では $g \cdot T^2/h = 7.31$ の実験ケース, $H/D = 0.4 \sim 0.7$ と範囲が小さいが, 理論値のこの範囲に良く一致している。図-7 では H/D が $0.1 \sim 0.8$ までは急激に増加し, $0.8 \sim 2.0$ までは比較的ゆるやかに増加する。図-8 でも H/D が $0.1 \sim 1.0$ までは急激に増加し, $1.0 \sim 2.0$ はゆるやかに増加する傾向が見られる。また, 実験値も少ないながら理論値と良く一致している。この現象としては, 鉛直成分の最大波力係数の算定の場合, 鉛直成分の慣性力と揚力の2成分が作用しているので, H/D と $g \cdot T^2/h$ のパラメータのある範囲 (図-7 は $H/D \geq 0.8$, 図-8 は $H/D \geq 1.0$) で流れの分離から生じる揚力の低

下が原因ではないかと思われる。今回の実験ではこの現象については十分検討ができなかったため, 今後の実験的解明が必要である。

5. 結語

著者らは非砕波の波によって水平円柱に作用する波力を評価するための基礎的研究を実施し若干の成果を得た。その結果を要約すると次のようになる。

水平円柱の質量係数は, 無次元波高 H/D のみでなく円柱の設置水深比 z/h により影響を受ける。また, 底面の影響は今回の実験ではまったく影響していない。この結果, 質量係数は設置水深 15.6 cm の場合 (水平円柱により波が変形し, 散乱して質量係数が非常にバラつく) を除いた実験ケースでは, 質量係数 C_M は $1.5 \sim 2.1$ の範囲であった。水平成分最大波力係数 ($F_{X,max} / \rho \cdot g \cdot a^2 \cdot l$) は H/D の増加とともに直線的に増加する。水平成分最大波力係数は主として H/D 及び H/h に依存する。この傾向は理論計算ともよく一致している。

鉛直成分最大波力係数 ($F_{Z,max} / \rho \cdot g \cdot a^2 \cdot l$) も同様に H/D に依存することがわかるが, H/D のある値で流れの分離から生じる揚力の低下で増加の割合が変形する傾向が見られた。以上から, 水平円柱に作用する全波力を評価するためには, 水平成分波力は Morison 式を適用する。また, 鉛直成分波力は鉛直成分慣性力と揚力を考慮した取扱が必要である。

参考文献

- 1) Carbis H. Heulegan and Lloyd H. Carpenter: Forces on Cylinder and Plate in an Oscillating Fluid, Jour. Res. N.B.S., Vol. 60, No. 5, (1958)
- 2) 長崎作治, 尾形 賢: 海底パイプラインに作用する波力について (その1), 第19回 海岸工学講演会論文集, (1972), pp. 223~227
長崎作治, 中村幸司, 尾形 賢: 海底パイプラインに作用する波力・潮力について (その2), 第19回 海岸工学講演会論文集, (1972), pp. 359~399
- 3) 土屋義人, 山口正隆: 水平円柱に作用する全波力について, 第21回 海岸工学講演会論文集, (1974), pp. 25~29
- 4) Fred Herman Gehrman, Jr.: Forces on a Horizontal Cylinder due to Non-linear waves, Naval Postgraduate school Monterey, California, AD-756547, (December 1972)
- 5) Skjelbreia, L. and Hendrickson, J. A.: Fifth Order Gravity Wave Theory, Proc. Seventh Conf. on Coastal Eng., Vol. i, Chap. 10, (1961), pp. 184~196
- 6) 藤沢康雄, 井出和文, 細野成一: 水平円柱に作用する全波力について (その1), 大林組技術研究所報, No. 14, (1977), pp. 52~56