

有限要素法による潜熱を考慮した低温地下タンクの凍結領域解析

齋藤 二郎
藤原 紀夫

Finite Element Analyses Considering Latent Heat of Freezing Domain Around Underground Storage Tank

Jiro Saito
Toshio Fujiwara

Abstract

This paper describes the application of the finite element method to heat conduction problems involving latent heat. The outline of fundamental theory and the procedure of computer programming are described. As an example of analysis, comparison with Neumann's solution, comparisons with freezing model tests of low-temperature underground tanks and the interference problems of the freezing domains around the tanks are shown. It is demonstrated that the finite element method is an excellent means of numerically solving free boundary problems involving phase changes.

概 要

本報告は有限要素法を、潜熱を考慮した非定常熱伝導問題に適用する方法について述べたものである。解析の基礎理論の概要と電算プログラムの構成について述べ、解析例として、Neumann 解との比較、地下低温タンクの凍結模型実験との比較、タンクの凍結相互干渉問題について述べている。その結果、有限要素法は相変化を伴う自由境界値問題の数値解析法として、非常に優れた手法であると言える。

1. まえがき

有限要素法を熱伝導問題に適用する試みについては、Zienkiewicz らが場の問題に応用して以来各所で多くの人々によってなされている。筆者らもすでにある成果を發表している¹⁾²⁾。今回は、これらの拡張であり潜熱を考慮した地下低温タンク周辺地盤の凍結領域の解析方法について述べる。

凍土の成長や鋳物の凝固などの相変化を伴う非定常熱伝導自由境界値問題については、F. Neumann の解析解とこの特別な場合として、J. Stefan の解析解(氷の生成)が得られているに過ぎず、ほとんどの場合には、近似的な数値解析に依存しているのが現状である。数値解析法を大別すると、差分法と有限要素法になる。差分法は古くから用いられている方法である。

有限要素法を差分法と比較すると、材料定数を数多く自由に取扱うことができ、境界の設定も比較的やさしいことが大きな特徴である。

以下に、潜熱を考慮した地盤の凍結領域の解析方法について、まず基礎理論の概要と電算プログラムの構成について述べ、最後に解析の妥当性を示すための解析例のいくつかを示す。

2. 基礎理論

2.1. 基礎方程式

熱伝導問題の時間依存の方程式は次式で示される。

$$k_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + Q = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \dots\dots(1)$$

境界条件は、次の2式で与えられる。

$$S_1 \text{ 上で, } \phi = \phi_B \quad \dots\dots(2)$$

S_2 上で,

$$k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} l_x + k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} l_y + q + h(\phi - \phi_\infty) = 0 \quad \dots\dots(3)$$

ここに、 S_1 と S_2 の和は全境界を表わす。係数 k_x , k_y および q は、 (x, y) の関数であるが、 ϕ (温度) とは無関係である。 l_x , l_y は表面に垂直なベクトルの方向余弦で

ある。 k_x, k_y は熱伝導率, Q は内部発(吸)熱量, q は表面での熱流束, h は熱伝達率である。 λ は $c \cdot \rho$ と書くこともあり, ρ は密度, C は比熱である。 ϕ_∞ は流体温度である。

上式(1)に Euler の理論を適用し, 有限要素解析のための多元連立一次方程式を求めると次式となる。

$$[C] \frac{\partial \{\phi\}}{\partial t} + [K] \{\phi\} + \{F\} = 0 \quad \dots\dots(4)$$

$$[C^{(e)}] = \int_V \lambda [N]^T [N] dV \quad \dots\dots(5)$$

$$[K^{(e)}] = \int_V [B]^T [D] [B] dV + \int_{S_2} h [N]^T [N] dS \quad \dots\dots(6)$$

$$\{F^{(e)}\} = - \int_V Q [N]^T dV + \int_{S_1} q [N]^T dS - \int_{S_2} h \phi_\infty [N]^T dS \quad \dots\dots(7)$$

サフィックス (e) は要素の寄与を示す。 $[C], [K]$ と $\{F\}$ は, それぞれ容量マトリックス, 熱伝導マトリックス, 荷重ベクトルと呼ばれるものである。これらについては, 前報告¹⁾²⁾や他の文献³⁾に詳しいので具体的な形は省略する。

2.2. 時間領域の差分解析

(4)式は時間の項を含んでいるので, この処理方法を考えないと解けない。ここでは, 差分手法によって求める漸化式を用いる方法を用いる。

$$\left([K] + \frac{1}{\Delta t} [C] \right) \{\phi\}_t = \frac{1}{\Delta t} [C] \{\phi\}_{t-\Delta t} - \{F\} \quad \dots\dots(8)$$

$$\left([K] + \frac{2}{\Delta t} [C] \right) \{\phi\}_t = \left(-\frac{2}{\Delta t} [C] - [K] \right) \{\phi\}_{t-\Delta t} - 2\{F\} \quad \dots\dots(9)$$

$$\left([K]_t + \frac{3}{2\Delta t} [C]_t \right) \{\phi\}_{t+\Delta t} = - [K]_t \{\phi\}_t - [K]_t \{\phi\}_{t-\Delta t} + \frac{2}{2\Delta t} [C]_t \{\phi\}_{t-\Delta t} - 3\{F\}_t \quad \dots\dots(10)$$

(8), (9), (10)式は, それぞれ後進差分式, Wilson and Clough, Zienkiewicz ら⁶⁾の漸化式である。

上の三つの式を用いて実際に演算してみた所, (6)式が一番収れん性が良かった。

ところで, 時間刻み Δt の大きさの取り方が問題となるが, これには, 主な各材料について, 次式を満足するように Δt を決めると, 解は安定した。

$$\frac{k\Delta t}{c \cdot \rho} \left\{ \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \right\} < \frac{1}{2} \quad \dots\dots(11)$$

ここに, k, C, ρ は凍結前の熱定数であり, $\Delta x, \Delta y$ は小さな要素の x および y 方向の長さ。

2.3. 潜熱の考慮方法

地盤の潜熱を考慮する場合, 具体的には地盤中の水が氷

になる時の潜熱の問題となる。与えられた体積 V の地盤を凍らせるに必要な熱量 Q は, L を地盤の潜熱, ρ を密度とすると, 次式となる。

$$Q = \int_V dV \int_{T_1}^{T_2} Q_v dt = L \rho V \quad \dots\dots(12)$$

ここに, T_1 と T_2 は凍結開始と完了の温度である。

潜熱の考慮の仕方として, (1)式における内部発熱 Q に置き換えて考えることとし, 凍結が進むにつれて間歇的に(4)式の荷重項 $\{F\}$ を発生させる方法とする。

今, 三角形要素を考えることにすると, この要素が凍結する時に発生する潜熱の荷重項 $\{F_L^{(e)}\}$ は, 時間刻みを Δt とすると, 次式となる。

$$\{F_L^{(e)}\} = \frac{\beta A}{3\Delta t} \{1 \ 1 \ 1\}^T \quad \dots\dots(13)$$

ここに, $\beta = L\rho, A$: 要素の面積

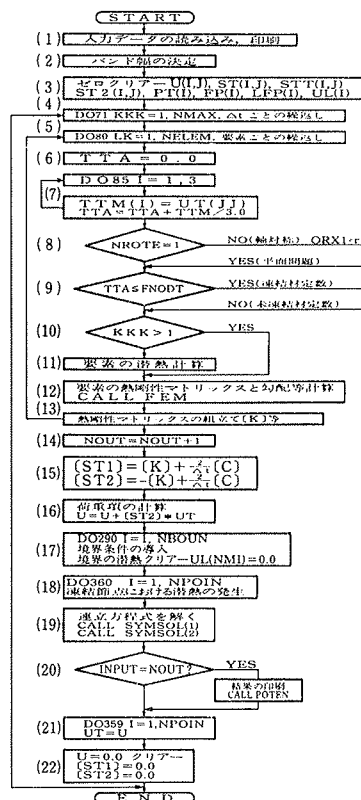
地盤の容積含水率 p が与えられている時は,

$$\beta = L\rho = pL_w\rho_w = 80000 p \text{ kcal/m}^3 \quad \dots\dots(14)$$

電算プログラムの中では, あらかじめ潜熱荷重項 $\{F_L\}$ を計算しておき, 節点温度が 0°C 以下になった時この潜熱荷重項を発生させるようにしている。ただし, これを一度に発生させると解に振動現象を生じるので実際には数回に分けて発生させるようにしている。

2.4. 軸対称問題

軸対称熱伝導問題の時間依存の方程式は次のような標



図一 フローチャート

準的な形で表わされる。

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot k \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \cdot k \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + rQ = r \cdot \lambda \frac{\partial \phi}{\partial t} \dots\dots(15)$$

ここに、座標はxとyに代って、半径方向と軸方向のrおよびzである。

(1)と(15)式を比較照合してみれば直ちに理解されるように、平面プログラムを軸対称問題に利用するには、 $k \rightarrow rk$, $\lambda \rightarrow r\lambda$, $Q \rightarrow rQ$ におきかえればよい。

2.5. フローチャート

図一に電算プログラムのフローチャートを示す。熱定数は未凍結と未凍結後とで変更できるようにしてある。その際、熱伝導マトリックス、容量マトリックス、勾配マトリックスなどは凍結前後に各一回だけ計算し、その他は通過するようになっている。また、計算時間を短縮するために、時間刻み Δt は繰返し途中で変更できるようにしている。このプログラムの中で用いる多元連立一次方程式の解法はバンドマトリックスを用いたガウスの消去法によっている。

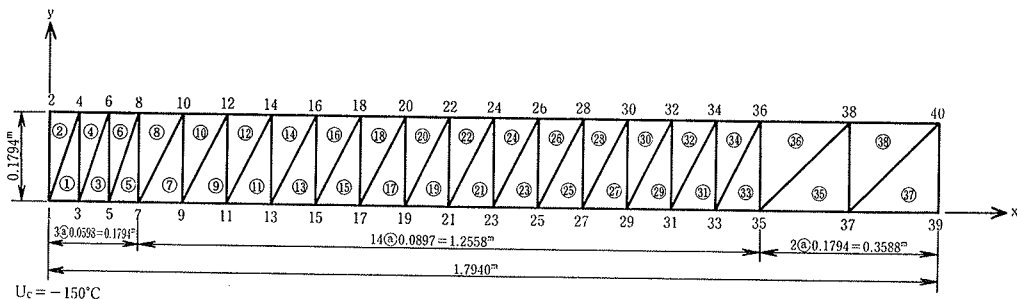
3. 解析例

3.1. Neumann 解などとの比較

柳沢ら⁴⁾は“処罰法と差分法の併用による低温地下タンクの凍結領域の数値解析”を発表している。その中で柳沢らの方法と Neumann 解との比較を行なっている。ここではさらに著者らの有限要素解と比較してみる。解析の対象は氷の生成問題である。計算条件は次の通りである。初期条件 $U_0 = 10^\circ\text{C}$ ($t=0$)、境界条件 $U_c = -150^\circ\text{C}$ ($x=0$)、凍結温度 $U_f = 0^\circ\text{C}$ ($x=S(t)$)、差分間隔 $h' = 0.1794 \text{ m}$ (空間)、 $k' = 4.0 \text{ hr}$ (時間)、処罰定数 $k_1 = 0.1$, $k_2 = 0.8$ 。また、熱物性値を表一に示す。

	熱伝導率 (kcal/mh°C)	温度伝導率 m²/hr	潜熱 kcal/kg	比熱 kcal/kg°C
水	0.476	0.000472	79.400	1.000
氷	1.900	0.00402	—	0.487

表一 水と氷の熱物性値



図一 Neumann 解などとの比較のための有限要素分割図

図一に有限要素分割図を示す。節点数39, 要素数37である。

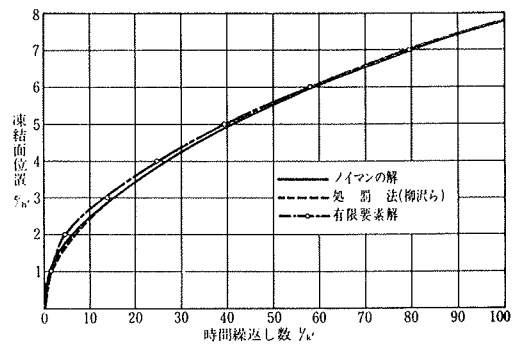
図一に凍結面位置の計算結果の比較図を示す。Neumann 解, 柳沢らの方法と著者らの有限要素解とはほとんど一致しているのがみられる。

図一に温度分布の比較図を示す。これも、三者の解析結果はほとんど一致している。

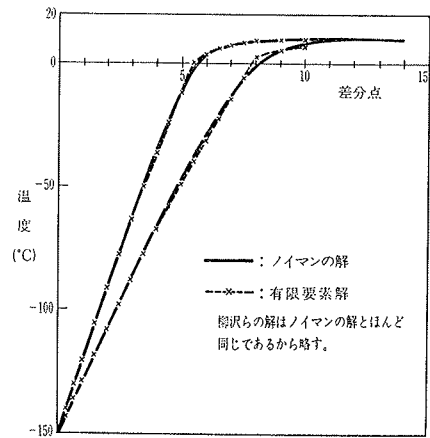
3.2. 地下低温タンクの模型実験の解析

B. E. Eakin ら⁵⁾は、タンク内径12インチ (304.8 mm)、高さ12インチの模型タンクに液体窒素を入れて、周辺地盤の凍結を行なっている。

図一は模型実験の装置図である。28点のサーモカッ



図一 凍結面位置の計算結果比較図



図一 温度分布比較図

プルで温度測定を行なって凍結面の進行状態をみるとい
うかなり精密な実験である。実験に用いた 試料土は、
Dry Sand, Saturated Sand, Brown Silty Clay である。

有限要素分割図は示さないが、軸対称問題であるので
左端に対称軸をとって、要素数 471, 節点数 265 に分割
した。

熱物性値等を決定するには、試料土の物理的、力学的
性状が必要である。不幸にして、原論文にはほとんどそ
の記述がない。高志ら⁷⁾ も同じ模型実験を準定常解と比較
しているが、この場合にもある推定によって熱物性値
を決めている。高志らの推定値を参考にしながら計算に
用いる熱物性値を表-2 のように決定した。その際、容
積含水率や母岩、水と氷の熱伝導率や比熱を仮定して、
いわゆる Smith らの推定方法も参考にした。

図-6, -7 にそれぞれ Dry Sand と Saturated Sand
の場合の凍結領域の進行を実験値と解析値の比較した図
を示す。解析結果と実験値はよく一致しているのがみら
れる。ただ、タンクの底面下部分では、解析解の方が早
く凍結する結果になっている。これは、多分床版が解
析ではその厚さを小さく仮定しすぎたためではないかと
思われる。当然のことながら、Dry Sand の方が Saturat-
ed Sand より潜熱がないだけ凍結の進行は早い。

図-8, -9 に Saturated Sand の場合における地盤
内温度の経時変化図とタンク周辺の温度分布図を示す。

		k	C	ρ	L· ρ	P
		[kcal/mhr°C]	[kcal/kg°C]	[kg/m ³]	[kcal/m ³]	
Saturated Sand	未凍土	1.100	0.6000	1.900	52,000	0.65
	凍土	2.000	0.4000	1.850	52,000	
	コンクリート	1.200	0.2174	2,300	0	
Dry Sand	未凍土	1.558	0.2890	1,650	0	0
	凍土	1.558	0.2890	1,650	0	
	コンクリート	1.200	0.2174	2,300	0	

表-2 熱物性値表

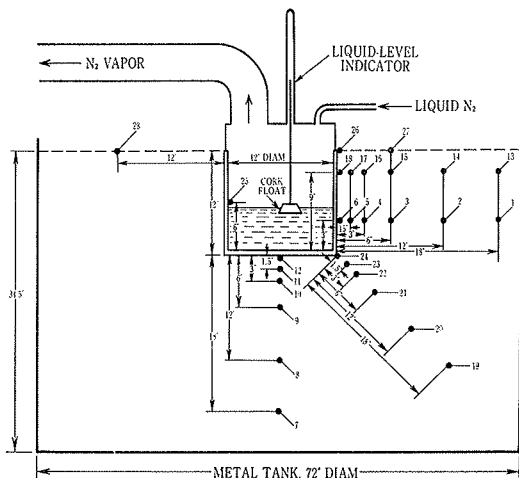


図-5 模型タンク実験装置図

3.3. タンクの凍結相互干渉

地下低温タンクは、用地や設備等の関係で、群設され
ることがある。この場合の凍結相互干渉について考えて
みる。3.2. の例題で示したように、地下タンクの凍結の
進行は、その側部ではほぼ一樣になり、平面的にみた場

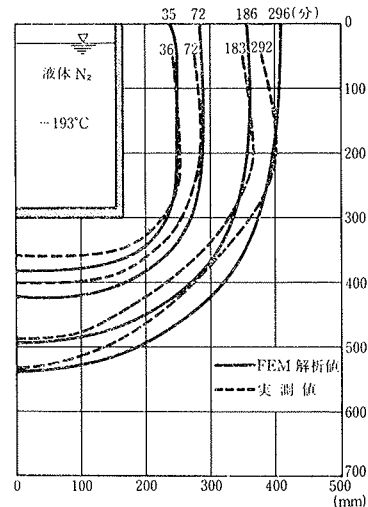


図-6 凍結領域の進行 (Dry Sand)

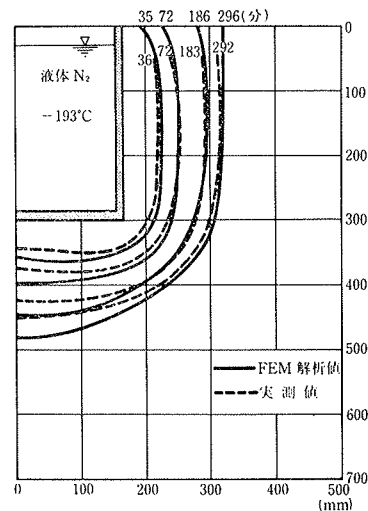


図-7 凍結領域の進行 (Saturated Sand)

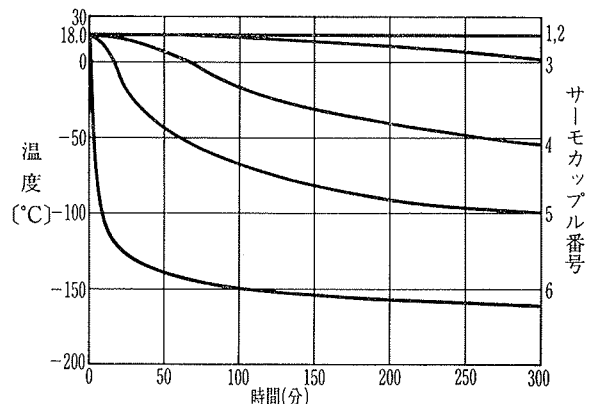


図-8 地盤内温度の経時変化 (Saturated Sand)

合、同心円状に広がってゆく。したがってタンクの中点深さでの平面上で切った二次元問題として凍結相互干渉を検討することができよう。

前述した柳沢ら⁴⁾も同じ考え方でタンクの凍結相互干渉問題を解いている。これと同じ問題を著者の方法で解いてみることにする。

さて、正方格子 (100 m ピッチ)

の頂点に配置された四つのタンクが同時に移動し始めたものとして、タンクに囲まれた地盤の凍結相互干渉を考えてみる。タンクは RC 造で内側に断熱層を設けるものとする。タンクの外半径 33.95 m, 内半径 31.15 m, 断熱材の内半径 32.0 m とする。計算に用いる熱物性値を表一 3 に示す。

このタンクの配置では 4 本の対称軸があるので 1/8 の領域で解析することが可能である。有限要素分割図は示さないが、節点数 155, 要素数 204 に分割した。外側の境界は柳沢らの方法に合わせて、タンクを中心から 64.45 m の所に断熱境界を考えた。

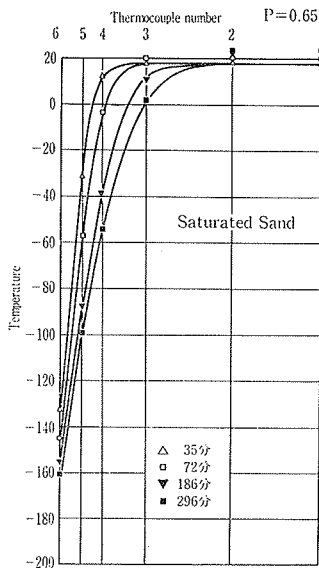
図一 9 に解析結果の比較図を示す。解析結果は 2 年と 4 年後のものだけしか示していないが、両者はほぼ一致しているのがみられる。

4. むすび

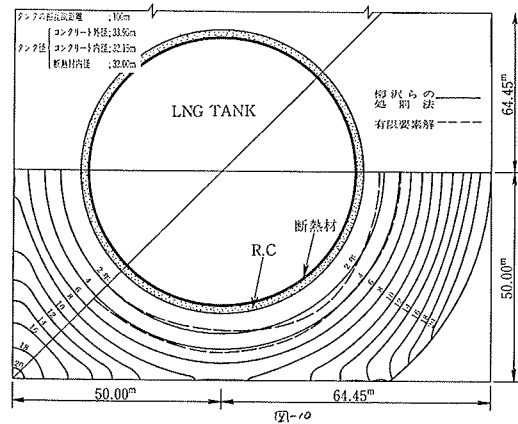
有限要素法を潜熱を考慮した非定常熱伝導問題に適用する方法について、解析方法の基礎理論と電算プログラムの構成について述べ、解析結果の妥当性を示すためのいくつかの例題を示してきた。その結果、有限要素法は相変化を伴う自由境界値問題の数値解析法として非常に優れた手法であると言える。

演算時間について述べておくと、当社の電算機 IBM 370/158 を用いた場合、3.1. の解析例 (節点数 39, 繰返し 400 回) では 147 秒, 3.2. の解析例 (節点数 265, 繰返し 77 回) では 278 秒の CPU Time であった。

実はこのプログラムの中には (6), (7) 式の熱伝達率の項は入っていない。現在の所、熱伝達率を考慮するには、



図一 9 温度分布図



図一 10 タンクの凍結相互干渉

	断熱材	コンクリート	凍土	未凍土	水
温度伝導率(m ² /hr)	0.00104	0.00238	0.004529	0.00225	—
熱伝導率(kcal/mh°C)	0.0250	2.0	2.5201	1.64	—
比熱(kcal/kg°C)	0.40	0.35	0.28	0.37	—
密度(kg/m ³)	60.0	2400	1970	1970	1000
潜熱(kcal/kg)	—	—	—	L=17.767	L _w =80.0

表一 3 熱物性値表

“境界要素”なるものを冷却面に仮定して現実的な答えを出している。今後は、熱伝達率の項を入れたり、三次元解析に拡張することなどを考えている。

最後にこの研究にあたり日本大学学生恩田君、東洋大学学生水村・中野両君に御援助いただいた。ここに記して深く感謝致します。

参考文献

- 1) 斎藤, 藤原: 有限要素法による浸透流・熱流などの解析, 大林組技術研究所報, No. 7, (1973)
- 2) 斎藤, 藤原: 有限要素法による三次元浸透流・熱流などの解析, 大林組技術研究所報, No. 9, (1974)
- 3) 川井忠彦監訳: 応用有限要素解析, 丸善, (1978)
- 4) 柳沢, 由川: 処罰法と差分法の併用による低温地下タンクの凍結領域の数値解析, 土木学会論文報告集, (1978. 4)
- 5) Eakin, B. E., et al.: Blowground Storage of Liquefied Natural Gas in Prestressed Concrete Tanks, A.G.A. Inc. Technical Report, No. 8
- 6) Zienkiewicz, O. C.: Finite Element Solution of Non-linear Heat Conduction Problems with Special Reference to Phase Change, I. J. N. M. E., Vol. 8, (1974)
- 7) 高志, 住吉: 液化低温ガス貯蔵用地下タンク周囲の地盤の凍結について, 冷凍, (1969. 10)