

# Huygens の原理を有限要素モデルに置換えて求めた回折音場

真 藤 利 孝  
吉 田 克 雄

## Sound Diffraction Calculated by Replacing Huygen's Principle with a Finite Element Model

Toshitaka Shindo  
Katsuo Yoshida

### Abstract

The attenuation of sound diffraction by a barrier is calculated by theoretical or experimental formulae. But in cases of complex obstacles like buildings, there are occasions when these formulae can not be applied. Therefore, as sound diffraction by any obstacle of complex configuration is calculated by replacing space with a finite element model applying Huygen's principle, first of all, in the case of a simple thin half-plane, the authors compared the results calculated by a finite element model with theoretical values, and studied how to replace space with a finite element model. As a result, it was found that they actually match theoretical values to approximate non-directivity with regard to Huygen's element wave.

### 概 要

障壁による音の回折減衰量は、理論式、或いは実験式によって求められるが、実際の建物などの複雑な形状をした障害物による場合は、それらの式をそのまま適用できないことがある。

そこで、Huygens の原理を応用し、空間を有限要素モデル化すれば、任意の形状の障害物からの回折音場が求められるので、先ず、単純な一枚塀の場合に有限要素モデル化による方法で計算した結果と理論式による値とを比較し、有限要素モデル化についての検討を行なった。

その結果、Huygens による要素波については無指向性に近似させることにより、理論値と非常によく対応することが認められた。

### 1. まえがき

騒音のアセスメントを行なう上で、騒音伝搬経路中における、建物、塀等の障害物からの回折音を求めることは必要不可欠なことである。

音の回折による減衰量を求める理論式、或いは実験式としては、単純な一枚塀(半無限障壁)では前川, Kirchhoff, Macdonald 等の式があり、厚みのある障壁では藤原, 湯沢, Pierce 等の式があり、それぞれ利用されている<sup>1)</sup>。

しかしながら実際の建物、塀等の障害物は複雑な形状であり、これらの障害物による回折音の計算には、必ずしも理論式、或いは実験式をそのまま適用できない場合がある。

そこで、Huygens の原理を応用し、空間を有限要素モデル化する方法によって、理論的には任意の形状の障害物からの回折音場も求められる可能性があるので、先ず、単純な一枚塀の場合に有限要素モデル化による方法で計算した結果と理論式による値とを比較し、有限要素モデル化についての検討を行なった。

### 2. Huygens の原理の回折音場への適用

Huygens の原理は、ある時刻における波面がその時刻に新しく波源となって 2 次波(要素波)を射出し、これら 2 次波の包絡面としてその後の時刻における波面が決定されるという波面構成の原理である。Fresnel は、この 2 次波に幾何学性を越えて、干渉可能な物理性をあらたに追加想定し、2 次波相互の干渉、即ち 2 次波の重

ね合せによって波の振動が決定されるとして、Huygensの原理の適用範囲を拡大した<sup>2)</sup>。

Fresnel によって修正拡張された Huygens の原理を回折音場へ適用すれば、次のように考えられる。

図-1 に示した様に、音源 S, 受音点 R との間に B なる障壁がある場合、B を含む開放面上の音波が新たな波源となって 2 次波を射出してその合成で R 点の音波が構成されることになる。

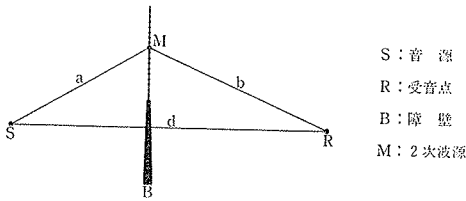


図-1 開放面上の 2 次波の設定

従って、B を含む開放面上に四角形要素を考え、その中心 M に 2 次波を設定する。

開放面上の M 点の波動は音源 S が定常的に正弦波を放射しているものとすれば、下式によって与えられる。

$$\Psi(M) = \frac{A}{a} \cdot e^{i \left[ 2\pi \left( ft - \frac{a}{\lambda} \right) \right]} \quad \dots\dots(1)$$

(A: 定数, f: 周波数, t: 時間, λ: 波長)

2 次波の振幅に関しては、波面に対して法線方向が最大で法線に対して傾き θ が大きくなるにつれて単調減少していくものと考えられ、指向性を K で表わせば、K の値は Fresnel の理論によって求められ、法線方向で最大値 K=1/λ となる。更に、Kirchhoff は、法線方向に対する傾き θ が π の時に K=0 となるものとして次式によって表わしている<sup>3)</sup>。

$$K = (1 + \cos \theta) / 2 \cdot \lambda \quad \dots\dots(2)$$

一方、K が非常にゆるやかに単調減少してゆくものとして下式が考えられる。

$$K = \{ (1 + \cos \theta) / 2 \}^n \cdot \frac{1}{\lambda} \quad \dots\dots(3)$$

(n: 0 に近い値 ≪ 1)

(3)式は、θ=0 で K=1/λ, θ=π で K=0 であるが、0 < θ < π で K ≃ 1/λ で、ほぼ無指向性といえる。

従って、開放面上の M 点を音源とする 2 次波が R 点に励起する振動は、

$$\frac{A \cdot K}{a \cdot b} \cdot e^{i \left[ 2\pi \left( ft - \frac{a+b}{\lambda} \right) \right]}$$

と表わすことができる。従って、M 点近傍における表面要素を dS とすれば、この部分からの 2 次波の重ね合せは次のように表わされる。

$$\psi(R) = \int \frac{A \cdot K}{a \cdot b} \cdot e^{i \left[ 2\pi \left( ft - \frac{a+b}{\lambda} \right) \right]} \cdot dS \quad \dots\dots(4)$$

表面要素 (四角形要素) を小さく設定すれば、要素内では 2 次波相互の位相差は無視できるので上式は次のように表わされる。

$$\psi(R) = \frac{A \cdot K \cdot dS}{a \cdot b} \cdot e^{i \left[ 2\pi \left( ft - \frac{a+b}{\lambda} \right) \right]} \quad \dots\dots(5)$$

(dS: 四角形要素の面積)

従って R 点の波動は全開放面について(5)式によって合成して得られる訳であるが、これを有限な開放面を設定して求めることができる。全開放面によるものと等しい有限開口は、Kirchhoff の回折理論により、Fresnel 積分によって求められる<sup>4)</sup>。

以上により、R 点の波動は有限開口からの 2 次波の合成によって次のようになる。

$$\Psi(R) = \sum \frac{A \cdot K_i \cdot dS}{a_i \cdot b_i} \cdot e^{i \left[ 2\pi \left( ft - \frac{a_i+b_i}{\lambda} \right) \right]} \quad \dots\dots(6)$$

従って R 点の音波の振幅は(6)式の絶対値をとって次のようになる。

$$|Z| = \left[ \left\{ \sum \frac{A \cdot K_i \cdot dS}{a_i \cdot b_i} \cdot \cos 2\pi \cdot \left( \frac{a_i+b_i}{\lambda} \right) \right\}^2 + \left\{ \sum \frac{A \cdot K_i \cdot dS}{a_i \cdot b_i} \cdot \sin 2\pi \cdot \left( \frac{a_i+b_i}{\lambda} \right) \right\}^2 \right]^{1/2} \quad \dots\dots(7)$$

一方、障壁がない場合の R 点の波動は、2 次波の媒介をまたず(1)式と同様の形で求められるので、振幅 |Z<sub>0</sub>| は下式となる。

$$|Z_0| = A/d \quad \dots\dots(8)$$

従って回折減衰量は次式によって求められる。

$$A_{tt} = 10 \cdot \log_{10} (|Z|/|Z_0|)^2 \quad \dots\dots(9)$$

### 3. 計算例

厚みのない半無限障壁による回折減衰量を対象として、図-2 に示した様な、正方形の有限開口を設定し、障壁の高さ H<sub>y</sub> を増して行った場合の回折減衰量の変化を調べる。

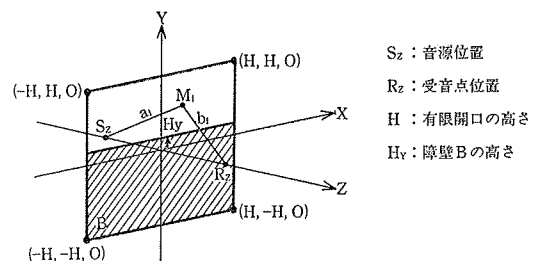


図-2 有限開口と音源、受音点、障壁の位置関係

上図で、各寸法及び音源の波長は次のケースについて検討した (単位: mm)。

- 有限開口の一辺の長さ: 2,000, 6,000, 8,000
- 音源, 障壁間の距離: 42.5, 823
- 受音点, 障壁間の距離: 42.5, 840, 3,427

四角形要素の一边の長さ: 10

音源の波長: 85 ( $f=4,000$  Hz), 170 ( $f=2,000$  Hz)

各項目毎の寸法の組合せは、表-1 に示した様な 5 通りとして、先ず、それらの場合の有限開口からの音圧と無限開口からの音圧の比を Kirchhoff の回折理論により、Fresnel 積分によって求めた。それらの音圧比は表-1 に示した様に小さいが、case 3 はフレネル積分範囲  $v$  が小さいので積分値の収束値 ( $C, S=0.5$ ) に対して多少離れており、障壁による回折音を求めるには、開口の大きさが十分にないので、他の条件は同じとして開口のみを大きく設定した case 4 との比較も行なった。

障壁による回折減衰量の計算は、2 次波の指向性を(2)式によるものと、(3)式によって  $K \approx 1/\lambda$  とした無指向性のものとの 2 通りとして行い、その結果は、図-3 a~d の通りである。なお図-4 は、半無限障壁による回折減衰量の理論値で、Macdonald の厳密解の近似形式と Kirchhoff の近似理論によって求めたものである<sup>5)</sup>。

	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5	
音源、障壁間距離 $-Sz$ (mm)	42.5	42.5	823	823	823	
受音点、障壁間距離 $Rz$ (mm)	42.5	42.5	840	840	3427	
音源の波長 $\lambda$ (mm)	85	170	85	85	85	
有限開口の一边の長さ $2H$ (mm)	2000	2000	2000	6000	8000	
フネ ル分	$v = H \cdot \sqrt{\lambda} \cdot (\frac{1}{Sz} + \frac{1}{Rz})$	33.3	23.5	7.5	22.6	23.8
	$C = \int_0^v \cos(\frac{\pi}{2} v^2) \cdot dv$	0.491	0.513	0.534	0.511	0.488
	$S = \int_0^v \sin(\frac{\pi}{2} v^2) \cdot dv$	0.496	0.504	0.475	0.508	0.494
有限開口の音圧振幅 (A: 定数)	1.95A	2.07A	2.04A	2.08A	1.93A	
無限開口との音圧レベル比 (dB)	0.21	0.29	0.17	0.34	0.31	
$R_N = \frac{2 \cdot (Rz - Sz)}{\lambda}$	2	1	39	39	100	
障壁による回折減衰量 (dB)	図-3(a)	図-3(b)	図-3(c)	図-3(c)	図-3(d)	

表-1 計算例の一覧

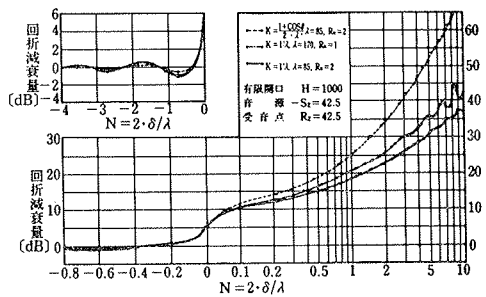


図-3 (a)

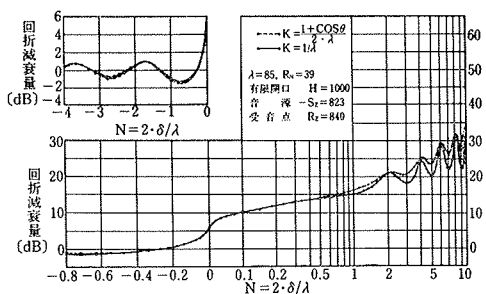


図-3 (b)

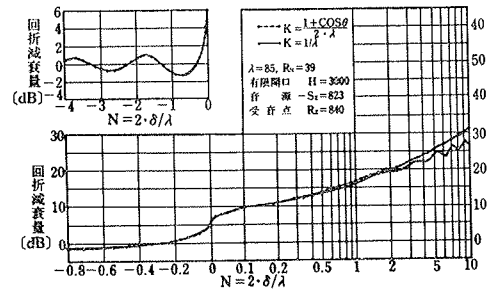


図-3 (c)

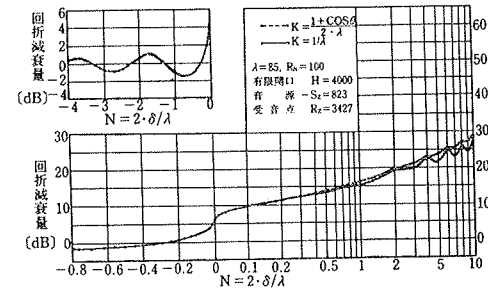


図-3 (d)

図-3 2次波から求めた障壁の回折減衰量

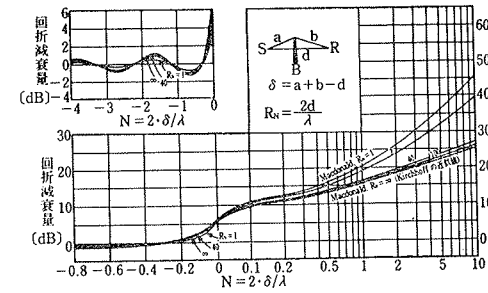


図-4 半無限障壁の回折減衰量の理論値

#### 4. 計算結果と考察

##### 4.1. 音源、受音点間の距離が波長に比較してそれ程長くない場合

表-1 の case 1 は、音源、受音点間の距離が波長に等しい場合で、case 2 は、波長を 2 倍にしたもので、それらの計算結果は図-3 (a) に示した。

これらの計算結果を図-4 に示した理論値と比較すると、2 次波の指向性を無指向性として計算した場合は、波長を変えた場合でも Macdonald の解 ( $R_N=1, 2$ ) とよく合っている。一方、指向性を持たせた計算結果は横軸のフレネルナンバー  $N$  が大きくなるにつれて、理論値に対して徐々に離れて、大きな減衰量となって行くが、これは障壁が高くなるにつれて、回折角が大きくなり、2 次波の受音点に対する寄与が小さくなって行くからであ

り、指向性があるための影響である。

なお、図-4の理論値で、Kirchhoffの値は、Macdonaldの解 ( $R_N=1, 2$ ) よりも小さいが、式の適用範囲が音源、受音点の距離が波長に比べ十分長い場合とすれば case 1, 2 の場合は、Kirchhoffの値に対しては、適用範囲外であり、Macdonaldの値と対応させればよく、その意味からいって、2次波による有限要素モデル化は、その指向性を(3)式によって  $K=1/\lambda$  とした無指向性とするのが妥当といえる。

#### 4.2. 音源、受音点間の距離が波長に比較して十分長い場合

表-1の case 4, 5 は、 $R_N=39, 100$  で波長に対して音源、受音点間の距離が十分長い場合で、そのらの計算結果は図-3(c, d) に示した通りである。

これらの計算結果についても、図-4の理論値と比較すれば、Macdonaldの値に対しては、前項同様、2次波の指向性を無指向性とした場合の方がよく合っているが、 $R_N$ が大きくなるにつれて、指向性の有無による差は小さくなり、いずれの場合でも理論値(Macdonaldの値も  $R_N$ が大きくなるにつれて Kirchhoffの値に近似していく)に合う傾向となる。

#### 4.3. Fresnel 積分範囲 $v$ の小さい場合

表-4の case 3 は、有限開口の高さに対する Fresnel 積分範囲を示す  $v \left( v = H \cdot \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{-S_z} + \frac{1}{R_z} \right)} \right)$  が小さい場合で、このような場合の障壁による回折減衰量は、図-3(b)に示した様に、横軸の  $N$  が2以上でうねりが見られ、有限開口の大きさが十分でないことが判る。

横軸:  $N > 0$  での回折減衰量のうねりは、図-5に示した様に、有限開口内の障壁の高さ  $H_Y$  より上からの部分の高さ方向に寄与する音圧振幅をベクトル  $V$  で積分値の Cornu の曲線上に図示すれば、 $|V|$  は有限開口の積分値が収束値から離れていると、障壁の高さ  $H_Y$  が増すにつれて、ある所迄は減少し続けるが、その後は極大、極小を取りながら小さくなってゆくことから判る。従ってうねりをなくすためには、有限開口を大きくするか、又は障壁の高さに応じて、有限開口の大きさを微妙に変化させれば理論上は解決する。

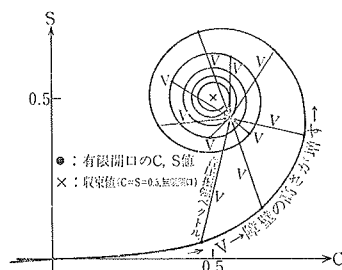


図-5 障壁上部からの音圧振幅

#### 4.4. フレネルナンバー $N$ が負の場合

音源と受音点を結ぶ線より下に障壁がある場合は、どの case でも理論値によく合っている。これは、受音点から音源への見通し線上付近の寄与の大きい2次波が含

まれるので、無限開口に対する誤差が小さいからであり、図-5のベクトルでいえば、フレネルナンバーが負の場合は、ベクトルの始点が第三象限にくることになり、誤差が小さいことも判る。

### 5. むすび

Huygensの原理を回折音場へ適用する場合の有限要素モデル化について、今回の計算結果から概ね次のようなことがいえる。

(1) 2次波の指向性は、音源、受音点、障壁の位置に関係なく、無指向性として計算すれば、Macdonaldの厳密解に非常によく合い、音源、受音点間の距離が波長に比べ十分大きい場合は、有指向性としても理論値に合う。

(2) フレネルナンバーが負の領域、又は正の領域でも小さい所では、計算結果は理論値によく合うが、フレネルナンバーが大きい所では、有限開口の大きさを大きく設定しないと、回折減衰量にうねりが生じ、誤差が大きくなる。

(3) 有限要素モデルによる回折音の計算は、音源、受音点の位置が固定されて、障壁の高さを変化させる場合は、計算時間上有利であるが、音源、障壁を固定して受音点を移動させる場合は、計算時間は受音点の数に比例して増えるので、多くの受音点で検討を要するような場合は、計算時間上からは不向きといえる。

(4) 今回の計算は、半無限障壁による回折減衰量を求めたものであるが、有限要素モデルによるその他の計算への応用としては、理論計算が困難な場合に有利であり、その意味からいっても、任意の形状の遮音壁による回折音の計算、或いは、任意の反射面からの反射音の計算等が考えられる他、回折点が複数ある場合にも、2次波の指向性を無指向性として、有限開口を一面設定し、2次波自身に回折による減衰率を音圧振幅に乗ずることにより計算が可能と思われ、今後、このような計算への応用は興味のある問題といえよう。

### 参考文献

- 1) 藤原: 壁による音波減衰, 日本音響学会誌, Vol. 34, No. 12, (1978)
- 2) 湯川, 田村: 物理学通論, 中巻, 大明堂, (昭和36)
- 3) 堀 健夫, 堀 淳一: 光学第2, みすず書房, (昭和28)
- 4) 前川: 障壁の音響回折実験結果の理論的検討, 日本音響学会論文報告集, (昭和36.6)
- 5) 川井, 伊藤: 半無限障壁による回折音場, 日本音響学会誌, Vol. 32, No. 5, (1976)