

地震荷重による間隙水圧の発生・消散の有限要素解析例

齋藤二郎 藤原紀夫

Finite Element Analyses of Pore Pressure Generation and Dissipation During Earthquake Loading

Jiro Saito Toshio Fujiwara

Abstract

When a saturated loose sand is subjected to cyclic shearing stresses, compaction takes place and the pore-water pressure rises. The effective stress thereby drops to zero, the soil has no resistance to shearing stress, and is said to be in a liquid state.

An analytical method for the process of pore pressure generation and dissipation during earthquake loading is described in this paper. The generation and dissipation of pore pressure are assumed to constitute an unsteady seepage flow problem. Seed et al. have already presented analyses based on the finite element method. The authors have extended this study to add another pore pressure generation function, and illustrate applications to a variety of problems.

概要

液状化とは水で飽和した砂が繰返しせん断応力を受けることにより間隙水圧が上昇し、有効応力の減少に伴う破壊現象であることが、動的三軸試験などによって証明されている。本研究は、この液状化に至る間隙水圧の発生と消散過程を解析的に研究したものである。

地震荷重による間隙水圧の発生および消散を非定常浸透流問題としてとらえ、Seedらが行なった有限要素法による二次元状態での液状化判定解析を基本として、この間隙水圧発生関数の所を追加修正して、地震時における構造物近傍の液状化現象を種々の例題で解析している。これによって、この解析法の適用性を検討してみたものである。

1. まえがき

近年、土の非線形応力～ヒズミ関係を使用した砂質地盤の液状化解析、また液状化にいたる間隙水圧の発生と消散過程の解析的研究がなされている。本報告は、地震荷重による間隙水圧の発生および消散を非定常浸透流問題としてとらえ、Seedら¹⁾が実施した有限要素法による二次元状態のもとでの液状化解析を基本として、この間隙水圧発生関数に横田^①、^②式を追加して、地震時における構造物近傍の液状化現象を解析し、このプログラムの実用性を検討してみたものである。

2. 基礎理論

2.1. 液状化の解析方法

飽和砂が繰返しせん断ヒズミを受けると、締め固めが行なわれて間隙水圧が上昇する。過剰間隙水圧が初期有効応力に等しくなると、砂はせん断強度を失い、いわゆる液状化現象を起こすことになる。

水平堆積層における地震時の間隙水圧発生と消散の支

配方程式について考えてみる。間隙水の流れはダルシーの法則に従うものと仮定すれば、過剰間隙水圧 U の時間微分項を含む時間依存の方程式は、次のように表わされる¹⁵⁾。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_x}{\gamma_w} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k_y}{\gamma_w} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) + m_v \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} - \psi \right\} = 0 \quad \dots\dots(1)$$

未知量 u には一定の境界条件が課せられ、次の二つがある。

i) 境界上で u の値が指定される。 $u = u_B \dots\dots(2)$

ii) 境界上で、 $\frac{k_x}{\gamma_w} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x + \frac{k_y}{\gamma_w} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_y + q = 0 \quad \dots\dots(3)$

ここに、 k_x 、 k_y および q は、 (x, y) の関数である。 k_x 、 k_y はそれぞれ x 方向 y 方向の透水係数、 γ_w は水の単位体積重量、 m_v は体積圧縮係数、 ψ は後述の間隙水圧発生項である。

(1)式にEulerの理論を適用し、有限要素解析のための多元連立一次方程式を求めると次式となる²⁾⁵⁾。

$$[A] \{u\} + [D] \left(\left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\} - \{\psi\} \right) = 0 \quad \dots\dots(4)$$

ここに、 $[A]$ は浸透性マトリックス、 $\{u\}$ は過剰間隙

水圧のベクトル, [D]は容量マトリックス, {φ}は後述する間隙水圧発生ベクトルである。

三角形要素 (i, j, m 節点) を用いた場合の[A], [D]マトリックスを示すと, 次のようになる。

$$[A]^{(e)} = \frac{1}{4d} \frac{k_x}{\gamma_w} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_j b_i & b_m b_i \\ b_i b_j & b_j b_j & b_m b_j \\ b_i b_m & b_j b_m & b_m b_m \end{bmatrix} + \frac{1}{4d} \frac{k_y}{\gamma_w} \begin{bmatrix} c_i c_i & c_j c_i & c_m c_i \\ c_i c_j & c_j c_j & c_m c_j \\ c_i c_m & c_j c_m & c_m c_m \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$[D]^{(e)} = \frac{1}{2d} \iint_{m_v} \begin{bmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \\ a_m & b_m & c_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} dx dy \quad \dots\dots\dots(6)$$

ここに, (e)は要素の寄与を示す。d: 三角形の面積 $a_i = x_j y_m - x_m y_j$, $D_i = y_j - y_m$, $C_i = x_m - x_j$ などである²⁾⁵⁾。

以上は三角形要素について示したが, 四角形要素の場合は, 四角形を四つの三角形に分けそれらの和の1/2として, 要素のマトリックスを求める。

ここで, 体積圧縮係数 m_v について説明を加える。 m_v は, 過剰間隙水圧比 ($r_u = u/\sigma'_0$) が小さい所では一定であるが, 60%を越える過剰間隙水圧比の場合には相対密度 (D_r) と過剰間隙水圧比に影響される。Seed ら¹⁾は, 次の関係式で示されることを見出した。

$$m_v/m_{v0} = e^y / (1 + y + y^2/2) \quad \dots\dots\dots(7)$$

ここに, m_{v0} は過剰間隙水圧比 $r_u = 0$ の時の値, $y = A(r_u)^B$, $A = 5(1.5 - D_r)$, $B = 3(2 - 2D_r)$ である。

2.2. 間隙水圧の発生関数

時間 dt の間を考えると, 過剰間隙水圧は du だけ変化する。土の要素は, 繰返しせん断力の dN サイクルを受け, このせん断力は間隙水圧を $\partial U_g/\partial N \cdot dN$ だけ増大させる。ここに, u_g は繰返しせん断力による過剰間隙水圧である。したがって, 要素の体積変化は dt の間で下式となる。

$$d\varepsilon = m_v (du - \partial u_g/\partial N \cdot dN) \quad \dots\dots\dots(8)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = m_v \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \phi \right) \quad \dots\dots\dots(9)$$

$$\text{ここに, } \phi = \partial u_g/\partial N \cdot \partial N/\partial t \quad \dots\dots\dots(10)$$

このφを間隙水圧発生項と呼び, これについて考えてみる。

u_g と N の関係は, 多くの人々によって, 振動三軸試験などによって実験的に研究されている。ここでは, Seed らの提唱式の他に, 横田・今井³⁾が提唱する二つの式を用いる。

i) Seed の式 $\frac{N}{N_l} = \left\{ \left(1 - \cos \pi \frac{u_g}{\sigma'_0} \right) \frac{1}{2} \right\}^\theta \quad \dots\dots\dots(11)$

ii) 横田①式 $\frac{N}{N_l} = 1 - \left\{ \left(1 + \cos \pi \frac{u_g}{\sigma'_0} \right) \frac{1}{2} \right\}^\alpha \quad \dots\dots\dots(12)$

iii) 横田②式 $\frac{N}{N_l} = 1 - (1 - u_g/\sigma'_0)^\beta \quad \dots\dots\dots(13)$

ここに, N_l : 液状化を起こすに必要なサイクル数, σ'_0 : 初期有効応力, θ, α, β : 土質や試験によって変化する定数である。通常上式は, $r_N = N/N_l$, $r_u = u_g/\sigma'_0$ とおき, $r_N \sim r_u$ 曲線で示されることが多い。

さて, (1)式の解を得るためには, 土の圧縮性や透水性と同時に, 間隙水圧発生項φすなわち, $\partial u_g/\partial N$ と $\partial N/\partial t$ の評価が必要である。(11), (12), (13)式をそれぞれ微分して, $\partial u_g/\partial N$ を求めると次のごとくなる。

$$\frac{\partial u_g}{\partial N} = \frac{\sigma'_0}{\theta \pi N_l} \cdot \frac{(1 - \cos \pi \cdot u_g/\sigma'_0)}{\sqrt{1 - \cos^2 \pi \cdot u_g/\sigma'_0}} \cdot \left[\frac{1}{2} \left(1 - \cos \pi \frac{u_g}{\sigma'_0} \right) \right]^{\theta-1} \quad (14)$$

$$\frac{\partial u_g}{\partial N} = \frac{\sigma'_0}{\alpha \pi N_l} \cdot \frac{2\alpha}{(1 + \cos \pi \cdot u_g/\sigma'_0)^{\alpha-1} \sin \pi \cdot u_g/\sigma'_0} \quad \dots\dots\dots(15)$$

$$\frac{\partial u_g}{\partial N} = \frac{\sigma'_0}{\beta N_l} \cdot \frac{1}{(1 - u_g/\sigma'_0)^{\beta-1}} \quad \dots\dots\dots(16)$$

一方, $\partial N/\partial t$ の値は, 地震を等価な規則波におきかえて考えると次のようになる。

$$\partial N/\partial t = N_{eq}/T_{eq} \quad 0 < t < T_{eq} \quad \dots\dots\dots(17)$$

$$\partial N/\partial t = 0 \quad t > T_{eq} \quad \dots\dots\dots(18)$$

ここに, N_{eq} は等価サイクル数, T_{eq} は地震継続時間である。Seed ら⁴⁾は, 地震のマグニチュードによって, T_{eq} と N_{eq} を表-1のように与えている。

マグニチュード	N_{eq}	$T_{eq}(\text{sec})$
5・½-6	5	8
6・½	8	14
7	12	20
7・½	20	40
8	30	60

表-1 地震のマグニチュードと N_{eq} , T_{eq}

2.3. 時間項の処理

(4)式は時間の項を含んでいるので, この処理方法を考えないと解けない。差分手法を用いると, 次のような漸化式が得られる⁵⁾。

$$\left(\frac{dt}{2} [A] + [D] \right) \{u_{i+dt}\} = [D] (\{u_i\} + \{\phi\} dt) - \frac{dt}{2} [A] \{u_i\} \quad \dots\dots\dots(19)$$

この漸化式を用いて, 時間刻み dt ごとに $\{u_{i+dt}\}$ を求めてゆけばよい。この際 dt の大きさの取り方によっては解が発散することもある。これには, 次式を満足するように dt を決めると解は安定した。

$$\frac{k dt}{\gamma_w m_v} \left(\frac{1}{(dx)^2} + \frac{1}{(dy)^2} \right) \leq \frac{1}{2} \quad \dots\dots\dots(20)$$

ここに, dx, dy は小さな要素の x および y 方向の長

さである。

2.4. 軸対称問題

軸対称問題の間隙水圧発生と消散の支配方程式は次のような標準的な形で表わされる⁵⁾。

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r \cdot k}{r_w} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{r \cdot k}{r_w} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) + r \cdot m_v \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \psi \right) = 0 \dots\dots(2)$$

ここに、座標は x と y に代って、半径方向と軸方向の r および z である。(1)式と(2)式を比較照合してみれば直ちに理解されるように、平面プログラムを軸対称問題に利用するには、x→r, y→z, k/r_w→r·k/r_w, m_v→r·m_v に置換えれば、同じプログラムを利用することができる。

2.5. フローチャート

図-1に電算プログラムのフローチャートを示す。土の体積圧縮係数 m_v が過剰間隙水圧比に対して変化しなければ、上述のマトリックス[D]は一定となり、時間ごとの繰返し計算の間そのままの値を用いることができる。一方、m_v が変化するのであれば、その時々過剰間隙水圧比 (r_u) の計算値を用いて、マトリックス[D]を計算し直し、この手順を収斂するまで繰返した後の時間ステップに進む。間隙水圧発生関数すなわち、Seed, 横田①式, 横田②式の選択については、入力データによって自由に選ぶことができる。

3. 解析例

3.1. 間隙水圧発生関数 (Seed, 横田) による違い

新潟地震で液状化を起した標準的な地盤を Seed ら¹⁾ がモデル化した。このモデル地盤において、間隙水圧の

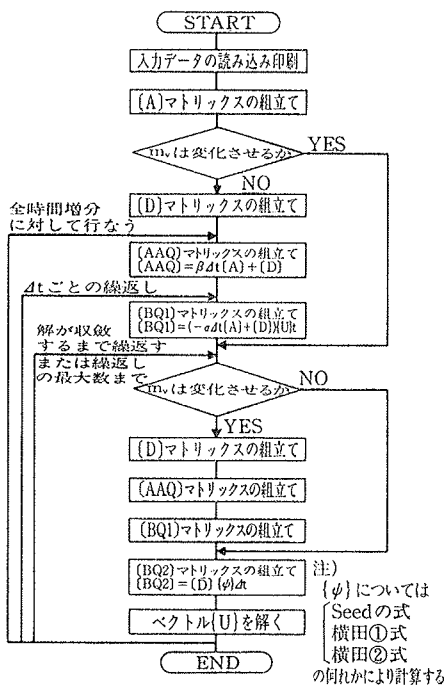


図-1 フローチャート

発生を表わす三つの関数すなわち、Seed の式、横田①式、横田②式に対してそれぞれ解析し、その差を検討してみた。解析モデルと入力定数を図-2に示す。一定元状態を仮定しているため、境界拘束条件は、両側面と底面を不透水境界としている。また、地下水位は地表面にとっているため、地表面は過剰間隙水圧をゼロと仮定する。

地震入力は、等価サイクル数 N_{eq}=30, 地震継続時間 T_{eq}=60 秒とする。

間隙水圧発生関数において、Seed の式では θ=0.7, 横田①式では α=1.0, 横田②式では β=1.5 としてい

Depth (m)	σ' _v (tf/m ²)	N _i	k×10 ⁻² (m/sec)	D _r (%)	θ	m _v ×10 ⁻³ (m ² /tf)	Finite element mesh
0.0	0.001	55.0	0.01	50	0.7	0.205	1 ① 2
6.1	4.648	20.0	0.01	70	0.7	0.205	3 ② 4
15.2	11.621	170.0	0.01	85	0.7	0.205	5 ③ 6
24.4	18.593	5500.0	0.01	90	0.7	0.205	7 ④ 8
36.6	27.890	10000.0	0.01	90	0.7	0.205	9 ⑤ 10
51.8	39.511	10000.0	0.01	90	0.7	0.205	11 ⑥ 12
76.2	58.104	10000.0	0.01	90	0.7	0.205	13 ⑦ 14

図-2 解析モデルと入力定数

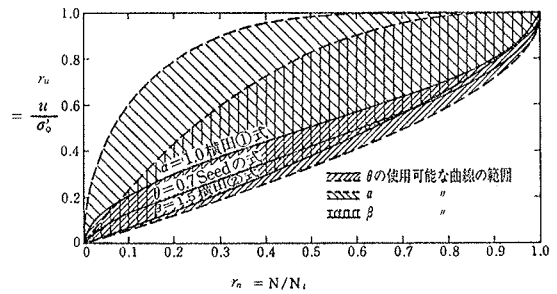


図-3 間隙水圧発生関数

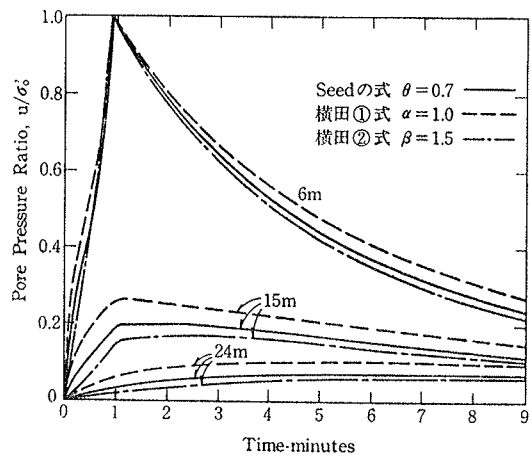


図-4 過剰間隙水圧比の経時変化

る。図-3に、これら3本の曲線を示す。

図-4は、解析結果であり、過剰間隙水圧比の経時変化を、9分の間について、三つの式で解析したものの比較を示している。過剰間隙水圧の上昇および消散過程は、三つの式とも大きな違いは見られない。これは、3式の解析結果が一致するように、 θ 、 α 、 β なるパラメータを選んだので当然と言えば当然である。

三つの式の選択にあたっては、土質試験を行なって、 $\tau_u \sim \tau_N$ 曲線を求め、これに合った式とそのパラメータを決定する必要がある。その際、パラメータの取り方によっては解が発散することがあるので注意する必要がある。これは、上述した(14)、(15)、(16)式の $\partial u_g / \partial N$ の値が不定になったりするためである。図-3の中に、三つの関数の発散しないパラメータの範囲を斜線で示しておいた。

3.2. シールドトンネル近傍の液状化変化

水平に堆積し、地表面まで水で飽和した深さ 45 m の成層砂地盤の中にシールドトンネル（外壁 $D=6$ m）が深さ 9 m の所に位置しているものを想定し、その近傍地盤の液状化現象はどうなるかを解析してみる。

有限要素分割図は示さないが、左右対称問題となるので、左端に対称軸をとって、要素数 150、節点数 147 に分割した。境界拘束条件は、対称軸、下端面、右側面とも不透水層を仮定し、地表面は過剰間隙水圧ゼロを仮定している。地盤は新潟地震によって液状化を起した標準的な地盤を想定し、入力定数は表-2に示すもので、Seedらの文献⁴⁾を参考に決定した。この際、トンネル周辺の初期有効応力は、トンネル建設前後において変化しないものと仮定した。また、地震入力は、 $N_{eq}=25$ 、

$T_{eq}=50$ 秒としている。

図-5は、対称軸より右側に 6 m 離れた所の過剰間隙水圧比の深さ方向の分布を各経過時間ごとに示す。深さ 4.5 m 付近より過剰間隙水圧が急速に上昇し、約48秒後には過剰間隙水圧の増大がピークに達し、深さ0.5~10.5 m の範囲で液状化を起している。その後、過剰間隙水圧は時間の経過とともに消散していく。

図-6は、図-5と同じ位置で、過剰間隙水圧の深さ方向の分布を、初期有効応力とともに、経過時間ごとに示したものである。この図からも、約48秒後には、過剰間隙水圧の増大がピークに達し、液状化範囲が最大になっているのがわかる。その後、徐々に液状化範囲は減少

深さ (m)	σ_b (tf/m ²)	N_t	$k \times 10^{-4}$ (m/sec)	Dr (%)	θ	$m_{eq} \times 10^{-4}$ (m ² /tf)
0.0	0.001	80.0	1.50	50	0.7	4.12
1.5	1.202	53.0	1.50	50	0.7	4.12
3.0	2.403	19.0	1.50	50	0.7	4.12
4.5	3.605	9.2	1.50	50	0.7	4.12
6.0	4.806	12.0	1.50	60	0.7	4.12
7.5	6.008	16.0	1.50	60	0.7	4.12
9.0	7.209	17.3	1.50	60	0.7	4.12
10.5	8.411	19.0	1.50	60	0.7	4.12
12.0	9.612	21.0	1.50	60	0.7	4.12
13.5	10.814	23.0	1.50	60	0.7	4.12
15.0	12.015	70.0	1.50	80	0.7	4.12
16.5	13.217	260.0	1.50	80	0.7	4.12
18.0	14.418	340.0	1.50	80	0.7	4.12
21.0	16.821	580.0	1.50	80	0.7	4.12
24.0	19.224	3200.0	1.50	90	0.7	4.12
28.0	22.428	10000.0	1.50	90	0.7	4.12
33.0	26.433	10000.0	1.50	90	0.7	4.12
45.0	36.045	10000.0	1.50	90	0.7	4.12

表-2 地盤の入力定数

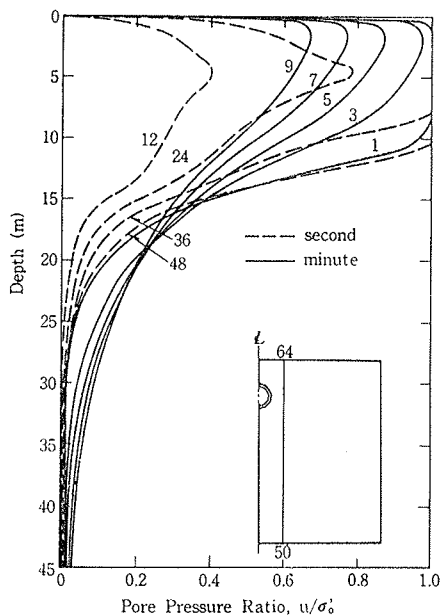


図-5 過剰間隙水圧比分布

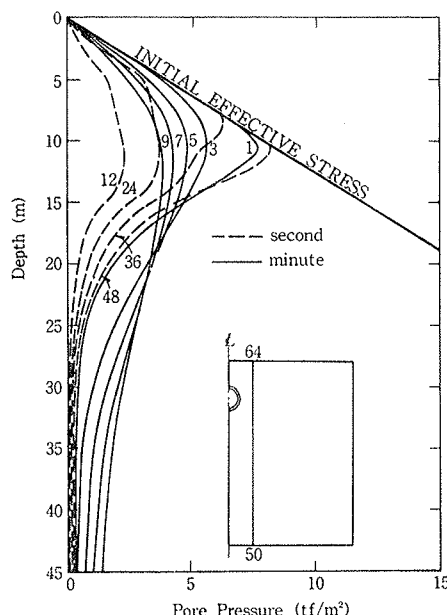
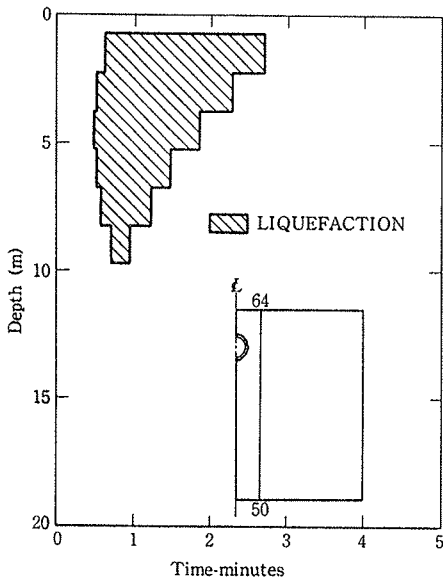
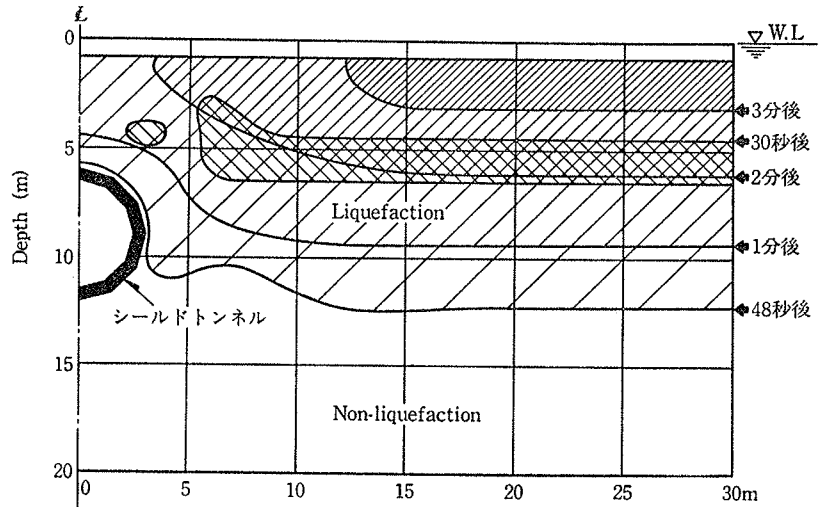


図-6 過剰間隙水圧分布



図一七 時間による液状化



図一八 液状化領域

して、3分を過ぎると液状化はおさまり、間隙水圧は次第に小さくなるが、12分たっても静水圧分布にはもどっていない。

図一七は、上図と同じ位置において、液状化が時間とともに、どの深さ地点から発生し、消散していくかを示したものである。約30秒後に、 D_r と N_0 の最も小さい深さ 4 m 付近より液状化が発生し、その後上下方向に広まり、48秒後には液状化範囲が最大となり、それから下層から上層へむかって液状化が徐々に消えてゆく。

図一八は、トンネル周辺地盤において、液状化領域が時間的にどう変動するかを二次元的に示したものである。シールドトンネル近傍の液状化領域が時間とともに増減する様子がわかる。

4. むすび

地震荷重による間隙水圧の発生および消散を非定常浸透流問題としてとらえ、有限要素によって、液状化判定解析ができることを示した。また、横田①式②式の間隙水圧発生関数を用いることによって、この解析方法の適用範囲を拡大した。これによって、地震の間とその後における砂地盤に発生し、消散する間隙水圧の性状を計算すれば、地中に発生する液状化が、地表面近くにある構造物にどのような影響を与えるかを決定することができる。また、液状化対策としての地盤改良効果を検討するにも有用であろう。

ただし、この解析プログラムは、他の解析でもそうであるが、地盤特性入力データによって基本的に制限を受ける。今後は、入力データの決定方法についての研究が必要であろう。

最後に、この研究にあたり、日本大学酒井左武郎教授と卒論生奥田章君、東洋大学岩本相一助教授と卒論生藤井圭一・宮本健一両君から、御助言と御助力を戴いた。ここに記して深く感謝致します。

参考文献

- 1) H. Bolton Seed, et al.: A Computer Program for the Analysis of Pore Pressure Generation and Dissipation during Cyclic or Earthquake Loading, EER C 76-24, (Oct. 1976)
- 2) 吉識雅夫監訳: マトリックス有限要素法, 培風館
- 3) 今井, 横田: 動的くり返しせん断による砂質土の間隙水圧上昇過程, 第5回日本地震工学シンポジウム講演集, (1978), pp. 601~608
- 4) H. Bolton Seed, et al.: Pore-Water Pressures Changes during Soil Liquefaction, Proc. of the ASCE, Vol. 102, No. GT4, (Apr. 1976), pp. 323~346
- 5) 斎藤, 藤原: 有限要素法による浸透流・熱流などの解析, 大林組技術研究所報, No. 7, (1973), pp. 134~138