

逸散エネルギー算定による構造物—地盤連成系の減衰機構について

白 砂 健

Damping Mechanism of Soil-Structure System Taking Account of Transmitting Energy

Takeshi Shirasuna

Abstract

The damping mechanism of dynamic interaction for a soil-structure system is recognized in a sense as being a process of energy dissipation. Since waves which are developed in the ground due to oscillation of a structure have the ability to transfer a great deal of energy, the system shows a prominent damping property called radiational damping. This damping plays a much greater role than internal material damping. This paper clarifies the relationship between the damping property of the system and radiational energy by traveling waves in the ground, and shows that damping may change according to vibrating types of structures because of difference in types of traveling waves. Radiational damping is not expected for driving frequencies of less than first resonance frequency of the ground, and internal material damping is much more important in this frequency region.

概 要

地盤と構造物の動的相互作用における減衰機構は、この系の振動エネルギーの消散過程を意味する。特に構造物の振動により地盤に発生する波動には多くのエネルギー伝達能力があるので、系は大きな減衰性能を有することになる。この波動のエネルギー伝達による減衰を逸散減衰と呼んでいる。地盤のもつ材料減衰も系の減衰性能に寄与することは確かであるが、逸散減衰の方がはるかに大きな役割をはたす。本報文では、連成系の減衰機構をエネルギー伝達過程から定量的にとらえることを試みた。即ち地盤における伝搬波動の形成と、その波動が伝達する逸散エネルギーと系の減衰性能との関係を明らかにした。その結果逸散減衰は材料減衰に比べてはるかに大きいこと、構造物の振動形態によって地盤内を伝わる波動が異なるために逸散減衰も異なること、地盤の1次共振点以下の振動数では伝搬波動の形成がないため逸散減衰は期待されず、この時には地盤のもつ材料減衰の役割が極めて重要であること、等が明らかとなった。連成系の減衰評価に際して、理論的な判断材料を提供するものである。

1. はじめに

地盤と構造物の動的相互作用を解析するには、両者の間のエネルギー伝達を含んだ方法によらなければならない。そのエネルギーが消費される過程が減衰機構であると考えることができる。減衰には材料のもつ内部減衰と逸散減衰とが考えられ、実際の減衰機構は両者が複合されたものであろう。

減衰は連成系の動的性状に極めて重要な働きを示すにもかかわらず、解析手法上の問題点と実際の減衰評価の困難さから、ともすれば感覚的に決められることが多い現状である。逸散減衰を評価するため波動論によって求めた減衰関数を用いたり、FEM手法では境界処理を工

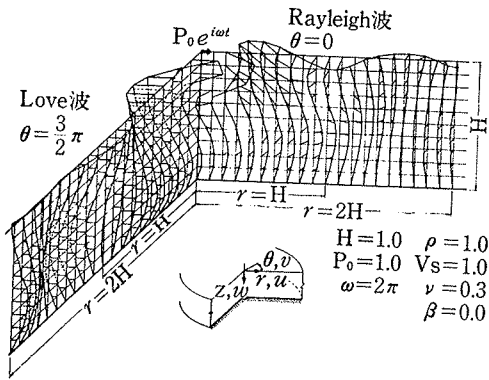
夫することが行なわれている。後者では側方境界としてエネルギー伝達境界が開発されており、波動伝搬の過程を解析的に組み込むことが可能となった。本報告はこの手法によって、構造物の逸散減衰と波動が担うエネルギー逸散の関係を求めたものである。

2. 層状地盤の波動形態

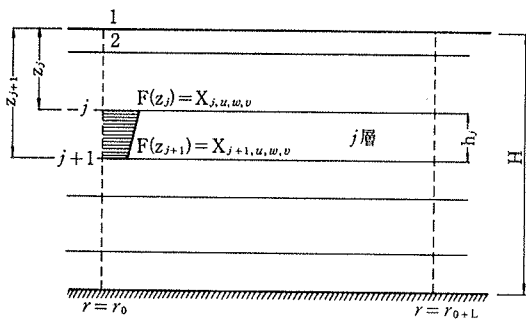
剛な基盤を有する水平成層地盤を考える。図-1に示す円筒座標系において地盤内変位 $\{u\}$ は(1)式のように表現することができる。

$$\{u\} = \sum_n [H_n(kr)] \{F_n(Z)\} \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(1)$$

第3項は円周方向にフーリエ展開をほどこしたことを意



図一 座標系および点加振解



図二 層状地盤

味する。 $[H_n]$ は逸散波動を考慮するので第2種の Hankel 関数よりなる項で k は波数 (Wave number) である。当然(1)式は波動方程式の解でなければならない。解の一例として FEM 手法によって求めた単一表面層地盤の地表点加振による地盤内変位分布を図一に示す。

図一から加振方向 ($\theta=0$) および加振直角方法 ($\theta=3/2\pi$) に波動が伝搬している様子が理解できる。加振方向では u, w 変位成分よりなりこの波動を Rayleigh 波と呼ぶ。加振直角方向では v 変位成分のみで Love 波と呼ぶ。地盤内発生歪と伝搬形態はそれぞれ古典的な意味での Rayleigh 波 Love 波と同一である。この二つの

波動が合成された形で任意の点の変位が決定されることになる。ところで、Rayleigh 波、Love 波はともに自由に存在するのではなく、振動数と地盤の層構成に従って存在する波動の形態が決っている。このことは(1)式における波数 k を求めることと同義である。

図二に成層地盤を示す。層境界 Z_j および地表での応力と変位に関する条件を与えることによって k を未知数とする方程式が得られる。この手続きは Haskell のマトリクス定式化として知られるが、これは超越固有方程式となり解法が困難である。そこで図二に示す様に j 層の深さ方向変位分布を適当な形状関数を用いて離離化すると、複素係数をもつ2次形式の固有値問題に帰着する。

$$([A]k^2 + [B]k + [C]) \{X\} = 0 \quad \dots\dots\dots(2)$$

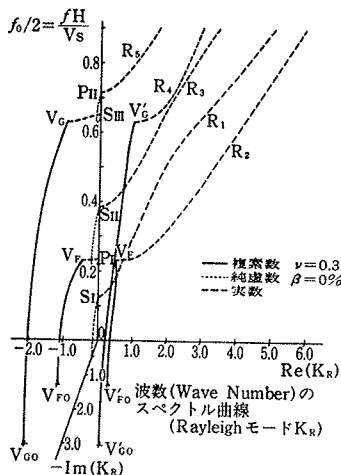
$$[C] = [G] - \omega^2 [M]$$

係数マトリクスは層地盤の材料定数と層厚のみによって決まりフーリエ展開次数 n に無関係である。固有ベクトルは $\{x_j\} = \{\bar{u}, \bar{w}, \bar{v}\}_j^T$ で表わす。ここに \bar{u}, \bar{w} は $\theta=0$ における節点数位を表わし \bar{v} は $\theta=\pi/2$ における節点変位を表わす。

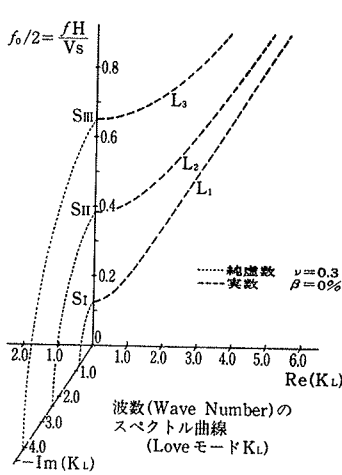
(2)式はマトリクスの要素構成から、Rayleigh 波と Love 波とに分割して解くことができる。このために計算時間の大幅な短縮が可能であり、またそれぞれの役割を分離して考えることができる。固有値としての波数は $\pm k$ のペアとして求められる。この $+k$ と $-k$ は、Hankel 関数の第1種、第2種の関係

$$H_n^{(2)}(-kr) = (-1)^n H_n^{(1)}(kr)$$

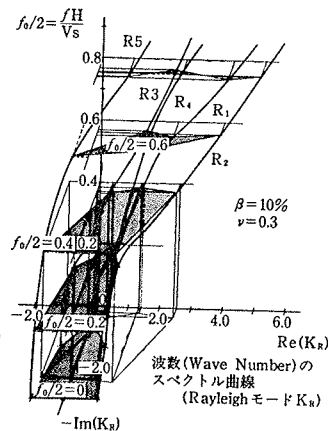
から逸散波動と逆行波動を意味している。そこで、逸散波動を選ぶことにより、結局 $2l$ ケの Rayleigh 波モード k_R と l ケの Love 波モード k_L が得られる。ここに l は層数を示す。非減衰地盤を対象とした k_R, k_L と、減衰地盤を対象とした k_R を求めて低次モードを選んで図三



図三 非減衰地盤 k_R



図四 非減衰地盤 k_L



図五 減衰地盤 k_R

～5に示した。ここに f_0 は後述する無次元振動数である。

k の実数部はこのモードの位相速度の逆数に関係し虚数部は波動伝搬に伴う振幅低減に関係する。従って実数の k を持つ波動モードは最も減衰しにくい波動であり、純虚数の k を持つモードは伝搬することのない波動と

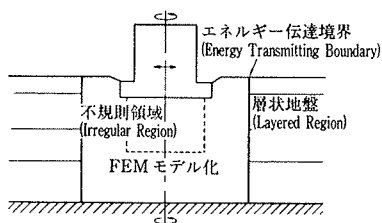


図-6 エネルギー伝達境界

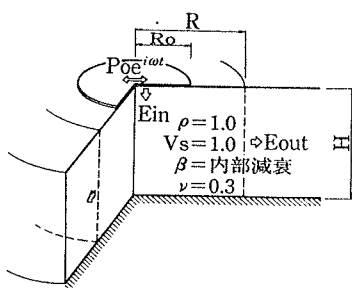


図-7 単層地盤上の円板

呼びにくいモードである。非減衰地盤では $k=0$ が存在するが、これは層状地盤の深さ方向に関するS波またはP波による共振状態を示している。これらの共振点をそれぞれS、Pで表わし添字に共振次数をつけて、例えば1次S波共振点であれば S_I と表わすことにする。

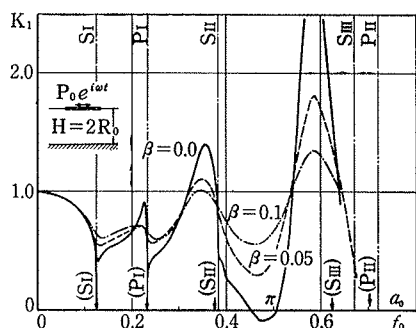


図-8 剛性関数 (Sway)

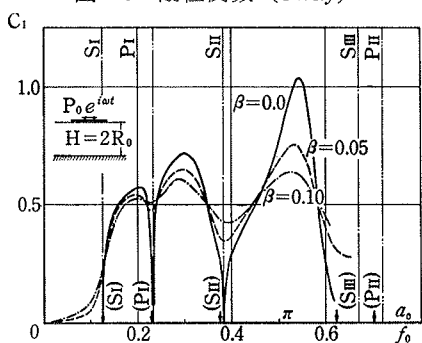


図-9 減衰関数 (Sway)

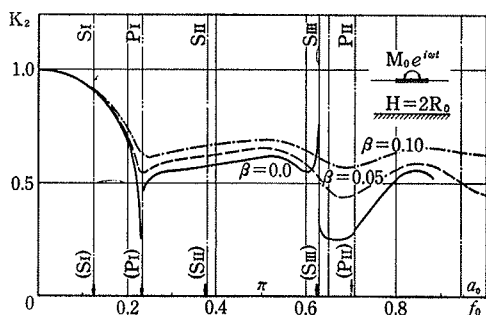


図-10 剛性関数 (Rocking)

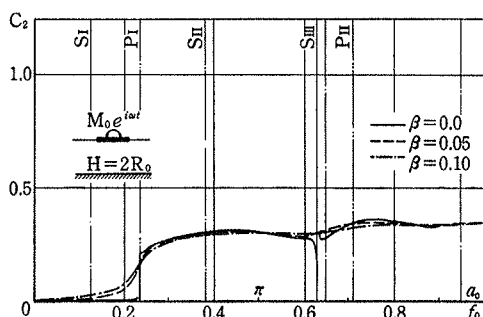


図-11 減衰関数 (Rocking)

非減衰地盤の k_R, k_L では地盤の共振点を境にして新しい伝搬波動のモードが形成されている。1次セン断共振点以下の振動数では伝搬波動が存在していない。これは現実的ではないが、剛な基礎を仮定していることによるものである。非減衰地盤が k_R が複素数の時には共役複素数による $-k_R^*$ も解となるので、図-3の実線は虚数面に対して対称な関係を持つことになる。 V_F と V_F' , V_G と V_G' とは実数でありながら正負の関係を持ち、波動モードの振幅が等しい時には、Standing Waveを呈することになる。このような場合は表面波による共振現象と呼ぶにふさわしいであろう。図-5に示す減衰地盤の k_R も非減衰地盤のそれと大差ない。この場合すべての波数が複素数となって、波動の伝搬に伴う振幅低減がすべての波動モードで認められる。地盤のもつ材料減衰の作用によるものである。図-5を細かく見ると、各モードはそのモードの関与する地盤共振点 (R_1 に対し S_1) の振動数付近で、 k_R の虚数部を急激に小さくしている。すなわち、地盤共振振動数を越えると波動の伝搬特性が急激に向上することを意味している。

図-1の点加振では、非減衰地盤を対象として振動数は $f_0/2=0.5$ に相当するので 伝搬波動としては Rayleigh 波では3次まで、Love 波では2次までのモードが含まれていることになる。

3. モード解析による逸散エネルギー

図-2の $r=r_0$ 面に作用する地盤内応力は、層境界節点変位 $\{u\}$ と同様に離散化手法によって節点力 $\{P\}$ とおくことができる。この時 $r=r_0$ 円筒面の合力と考えることにする。さて k 次モードの節点変位 $\{u\}$ および節点力 $\{P\}$ への寄与をそれぞれ $\{u_k\}, \{P_k\}$ とおくと、これらは刺激係数 α_k と(2)式より決まる固有ベクトル $\{X_k\}$ によって

$$\{u_k\} = \alpha_k [D_k] \{x_k\} \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$\{P_k\} = \alpha_k [E_k] \{x_k\} \quad \dots\dots\dots(4)$$

と表現される。 $[D_k], [E_k]$ は地盤によって決まる定数と Hankel 関数および k で構成されるマトリックスである。

k 次モードの波動が運搬するエネルギー E_k は単位時

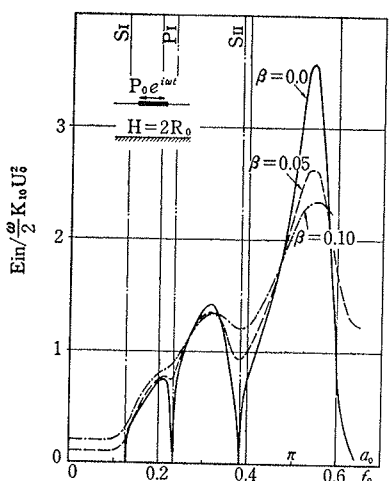


図-12 入力エネルギー (Sway)

間に当りについて次の様に求まる。

$$E_k = \frac{i\omega}{4} \left[\sum_S \{u_k\}^* \{P_S\} - \{u_S\}^* \{P_k\} \right] \dots\dots\dots(5)$$

モード全体では(3), (4)式を代入して

$$E = \sum_k E_k = \frac{\omega}{2} \text{Im} \left(\{u\}^* [R] \{u\} \right) \dots\dots\dots(6)$$

となる。*は共役複素数を示す。

非減衰地盤の場合には、波数を実数であるモード k_T のみがエネルギーを伝達し、モード伝達エネルギー E_k に値を与える。実数以外の波数に関するモードはエネルギー伝達の能力を持たない。すなわち、

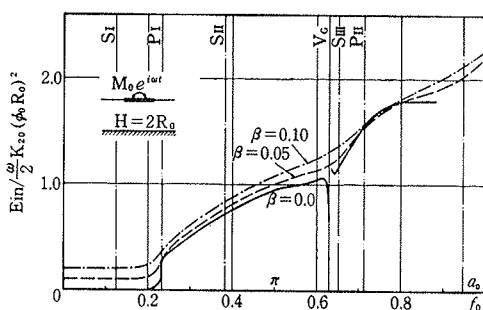


図-13 入力エネルギー (Rocking)

$$E = \sum_{k=k_T} E_k \dots\dots\dots(7)$$

として逸散エネルギーが決まる。このことは、(2)式の固有ベクトルの直交性を利用して証明される。

減衰地盤ではすべてのモードがエネルギー伝達に参与するが、 $k \neq k_T$ に対応するモードの役割はすこぶる小さい。

4. エネルギー伝達境界

刺激係数 $\{\alpha_k\}$ が決まると図-2の層状地盤の変位・力あるいは逸散エネルギーが決定される。 $\{\alpha_k\}$ は、 $r=r_0$ での変位分布が与えられれば求めることができる。変位分布の与え方としては次に示す方法がある。 $r=r_0$ に既知変位として直接与える場合が考えられる。変位仮定の地盤反力を求めたり、挙動の判ったケーソン周辺地盤の解析などがこれに含まれる。もうひとつは間接的に求める方法である。(6)式の $[R]$ を図-2の層状地盤の動的な剛性マトリックスとしてFEM領域に接続し $r=r_0$ での変位を求める手法が一般的である。確かに $[R]$ は $r=r_0$ での節点変位 $\{u\}$ と節点力 $\{P\}$ との関係を記述しているので剛性マトリックスの性質を持っている。この剛性マトリックスを提供する要素という意味から $r=r_0$

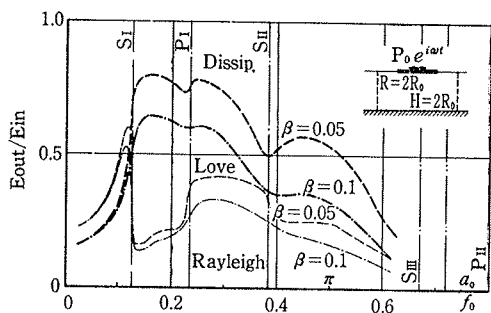


図-14 伝達エネルギー (Sway)

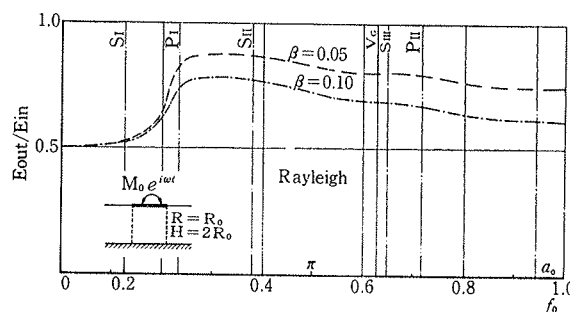


図-15 伝達エネルギー (Rocking)

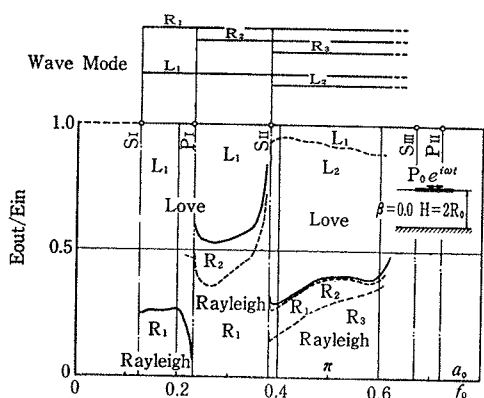


図-16 伝達エネルギーのモード分担 (Sway)

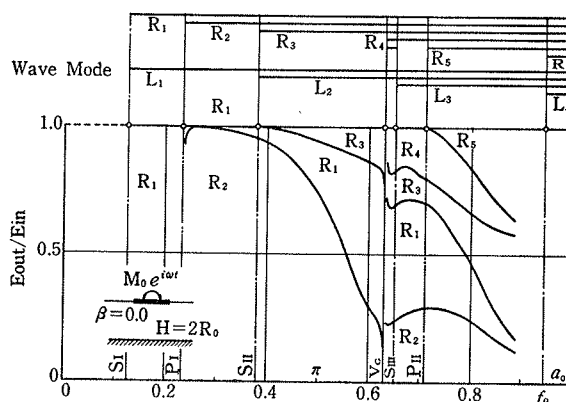


図-17 伝達エネルギーのモード分担 (Rocking)

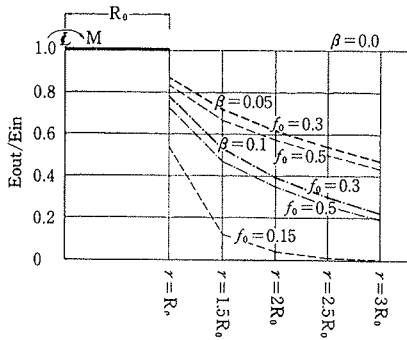


図-18 伝達エネルギーの距離減衰 (Rocking)

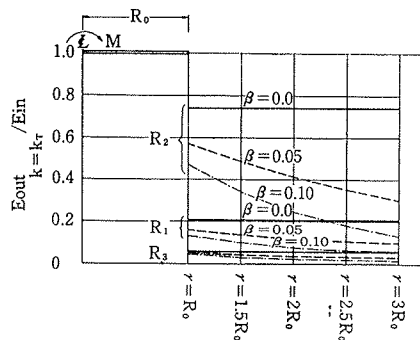


図-19 モード伝達エネルギーの距離減衰 (Rocking)

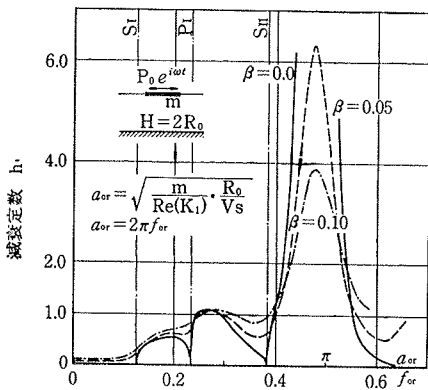


図-20 連成系減衰定数 (Sway)

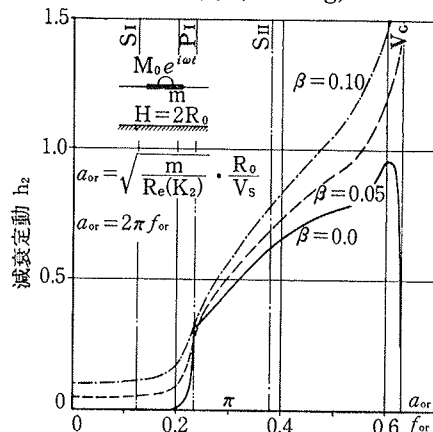


図-21 連成系減衰定数 (Rocking)

を含む薄層領域は薄層要素と呼ばれている。

しかし、(6)式に示される関係は、節点変位 $\{u\}$ の内在するエネルギーを層状地盤に存在しえる各波動モード k に適切な分配を行ない、この波動に伝搬によってエネルギーの逸散をはかっていることを意味している。この $[R]$ の性質から、 $r=r_0$ の円筒面はエネルギー伝達境界と呼ぶにふさわしい。 $[R]$ は相互作用の原理によって対称マトリックスである。Love 波と Rayleigh 波を対象とした対称性の証明は Wass によってなされている。3次元問題における3節点自由度の $[R]$ の対称性は著者によって示された。 $[R]$ は FEM 領域に接続すると図-6 の様な解析モデルとなる。図-1の計算例では、 $r=H$ の位置に伝達境界を設定している。

5. 逸散エネルギーと連成系における減衰

5.1. 解析モデル

簡単な地盤-構造物連成系モデルとして単層地盤上に質量のない剛な円板を密着させて、この円板に強制振動を与えた。加振方法は1次の円周方向フーリエ展開次数で扱うことの出来る Sway と Rocking の2通りを選んだ。この時、円板より系にエネルギー E_{in} が入力され、 R の位置の円筒面を通してエネルギー E_{out} が出力

される。地盤は単位の密度 ρ とせん断波速度 V_s を持ちポアソン比 ν は 0.3 減衰は弾性定数を複素数で表示する履歴型の内部材料減衰 β として与え 0%, 5%, 10%, の3種について検討した。結果は無次元振動数 $f_0=R_0f/V_s$ または無次元角振動数 $a_0=2\pi f_0$ に従って無次元表記で整理した。ここに、 R_0 円板半径、 $f=\omega/2\pi$ 加振振動数、そして V_s セン断波速度を示す。

5.2. 剛性関数、減衰関数

円板の振動変位と外力との関係から定まる動的な剛性を K_t とする。ここに $t=1$ は Sway を、 $t=2$ は Rocking を示す

$$K_t = K_{0t}(k_t + ia_0c_t)(1 + 2i\beta) \dots\dots\dots(8)$$

K_{0t} は静的な剛性を示す。

k_t, c_t はそれぞれ剛性関数、減衰関数と呼び無次元量で、無次元振動数 f_0 又は a_0 の関数である。剛性関数を図-8、図-10に、また減衰関数を図-9、図-11に示

した。図中の S_I, P_I 等は解析モデルにおける、S波、P波による地盤の共振振動数を示す。カッコで示した (S_I) 等は地盤を連続体とした時の共振点である。モデル化における離散化手法が共振点を若干高い方へずらしている。Sway では共振点のたびに k_t, c_t が大きく変化する。内部減衰 β を与えるとその傾向は平滑化する傾向が認められる。特に、地盤共振点付近においては内部減衰の有効性が大である。 c_t は、(8)式に示すように速度比例型の粘性減衰として表現しているが、1次せん断共振点 S_I を越えると急激に大きな値を示す。逸散減衰が作用することを意味する。 V_G 以下では逸散減衰は期待されず内部減衰に比例した低い減衰性能が示されている。

一方 Rocking に対する k_2 を見ると変化の度合いが小さいことが理解される。非減衰地盤に対して不連続性を示すのはP波による地盤共振点と V_G 点に限られている。これは円板の変形が地盤共振点において新しく発生しようとする波動の変位パターンになじむかどうかの選択が行われているものと理解される。 V_G は図-3において表面波の共振点と呼んだところである。一方 c_2 は P_I 以下ではほとんど値をもたず、内部減衰の重要な領域である。しかし P_I を越えて逸散減衰が期待されるようになると内部減衰の大小は重要な意味を持たなくなる。

5.3. 入力エネルギー

系に入力されるエネルギー E_{in} を図-12, 図-13に示す。逸散減衰が形成されない S_I 又は P_I 以下の振動数では, 内部減衰に比例したエネルギー E_{in} が入力されている。しかし, 地盤共振点をへるごとに大きなエネルギーを要求される。これは地盤共振点から新しい伝搬波動が形成されることになる訳で, この波動形成のためにエネルギーが要求されていると考えることができる。すなわち, 伝搬波動の運搬するエネルギーに応じて E_{in} が決定されることを意味する。そして, 円板の変位パターンによって選択された波動モードのエネルギー伝達のための関与のしかたは, 各モードごとに異なるため, この違いが Sway と Rocking との入力エネルギー E_{in} の違いの理由となっている。

5.4. 逸散エネルギー

入力エネルギー E_{in} について内部減衰の役割はエネルギー逸散の生じている限り大きいものではない。しかし, エネルギーの伝搬過程には内部減衰が関与している。図-14, 図-15に R の位置の円筒面より掃き出される伝達エネルギー E_{out} を入力エネルギーの比として示した。Sway では $R=2R_0$, Rocking では $R=R_0$ として E_{out} を求めた。 E_{out} を求めた円筒面の位置が両者で異なる。

内部減衰の働きによって逸散過程においてエネルギーが消費されるため, 出力エネルギーは入力エネルギーより小さくなる。図中の太い線が R における伝達エネルギーの割合で, 1に満たない分が内部減衰によって消費された割合である。細い線は, 伝達エネルギーの Rayleigh 波と Love 波のエネルギー分担を示したが, Rocking では Love 波の寄与が全くないことが理解される。

内部減衰のない時には逸散過程におけるエネルギー消費がないので, 入力エネルギーと出力エネルギーは常に等しい。振動数, 位置に関係なく E_{out}/E_{in} は1である。この時伝達波動モードのエネルギー分担割合を図-16, 図-17に示した。Sway では Love 波が, Rocking

では Rayleigh 波が重要である。しかし, すべてのモードが積極的な役割を持つとは限らないことが示される。例えば Rocking に対する S_{II} 共振点での R3 モードを考えると, S_{II} よりエネルギー伝達に消極的に参加する。この様な場合には図-10, 図-11の k_2 , C_2 に変化がなく, 地盤共振点が連成系に影響を持たないことが示される。

逸散過程におけるエネルギーの変化を振動数とモードを選んで図-18, 図-19に示した。

5.5. 連成系減衰定数

円板に質量を付加して振動系を構成し, 共振時の減衰定数 h を共振振動数の関係によって図-20, 図-21に示す。逸散減衰は極めて大きく特に Sway について大きいこと, 逸散減衰が期待出来ない時には内部減衰が重要な役割を持つことが理解される。

6. まとめ

連成系の減衰特性とエネルギー逸散過程を調べた結果, 逸散減衰は内部減衰に比べてはるかに大きいこと, 地盤に形成される波動の運搬するエネルギーに応じて逸散減衰が決まること, 構造物の振動形態によって形成される波動のモード構成が異なるため逸散減衰も異なること, そして地盤の1次共振点以下の振動数では逸散減衰が全く期待できないこと, この場合地盤共振点とともに内部減衰が重要な役割を持つこと, が明らかとなった。最後に, この研究に貴重な助言をいただいた安井讓副主任研究員に深く感謝します。

参考文献

- 1) Kausel, E., Roéssel, J. M., Wass, G.: Dynamic Analysis of Circular Foundations, Proc. of ASCE, J. of Eng. Mech. Div., Vol. 101, No. EM6, (Dec. 1975), pp. 771~785
- 2) 白砂 健: 地盤—構造物系動的相互作用における逸散減衰の検討, 土木学会第35回年次学術講演会講演概要集第1部, (昭和55.9), pp. 390~391