

建物—基礎構造体—表層地盤連成系の振動解析に関する研究（その5）

——静的な相互作用ばねの略算式の提案——

安井 讓

Study on Interaction Problems of Superstructure-Substructure-Soil Surface Layer System (Part 5)

——An Approximate Estimation Formula of Static Interaction Spring Constants——

Yuzuru Yasui

Abstract

Numerical calculations were made on static interaction spring constants of the lumped mass model of a substructure divided into equal lengths in the direction of depth. From the examinations of the numerical results an empirical formula which provides an easy way of computing static spring constants was obtained. In principle, this formula is valid for an equally-divided model of any depth, but may also be applicable to unequally-divided models with errors in the order of about 10 percent.

概 要

基礎構造体を深さ方向に均等に分割して多質点系にモデル化する場合を想定して、静的な相互作用ばねの数値計算を行ないその性質を検討した。その結果、任意の深さ比を有する基礎構造体を任意に均等分割する場合の静的相互作用ばねの略算式が得られた。この略算式は、原則として均等分割モデルに対して有効なものであるが、不均等分割モデルに対しても10%程度の誤差範囲内で適用できる。

1. まえがき

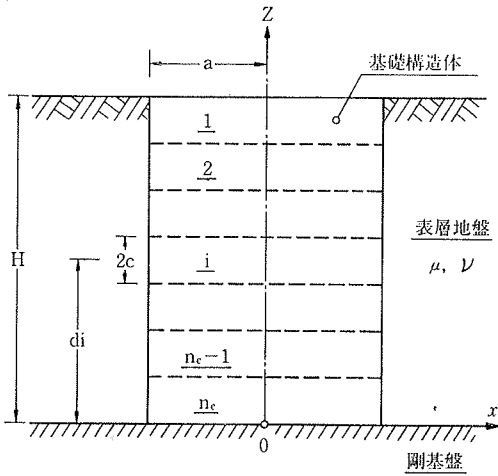
建物、基礎構造体および表層地盤からなる系を集中質点系で表わすためには基礎構造体側壁での相互作用ばねと震動土圧を離散化（集中）表示する必要がある。著者は、表層地盤に弾性波動理論を適用して、これらの相互作用係数の離散化表示式を誘導し^{1),3)}、更に、5等分割モデルについて相互作用係数の性質を検討した^{2),4)}。その結果得られた成果の一つに、静的相互作用ばねの計算図表を作成したことが挙げられる。ところで、この図表は基礎構造体を深さ方向に5等分割して五つの質点にモデル化する場合にのみ有効であった。そこで、幾つかの均等分割モデルについて、静的相互作用ばねの数値計算を行ないその性質を検討してみることとした。その結果任意の深さ比を有する基礎構造体を任意に均等分割する場合の静的相互作用ばねの略算式が得られた。この略算式は、原則として均等分割モデルに対して有効なものであるが、不均等分割モデルに対しても10%程度の誤差範

囲内で適用できることがわかった。

本報告では、静的相互作用ばねの数値計算結果について述べるとともに、その結果の検討により得られた略算式を示す。更に、提案した略算式の不均等分割モデルへの適用例についても触れることとする。

2. 計算モデル

数値計算に用いたモデルを図-1に示した。地盤は層厚 H の単一の弾性表層と剛な基盤とからなるとし、想定する基礎構造体は円筒形でその半径を a とする。この基礎構造体を深さ方向に均等分割して n_c 個の質点にモデル化する場合を考える。その際、地表面に最も近い質点に対応する分割部分の番号を1とする。各々の分割部分の厚さ（分割幅）を $2c(=H/n_c)$ 、中点の位置を $d_i(i=1, \dots, n_c)$ で表わす。数値計算は基礎構造体の深さ比 H/a が2, 4および8の各々の場合について分割数 n_c を5, 10および20として行なった。なお、相互作用ばねは無限級数で表わされる要素からなる影響係数マトリックス



図一 計算モデル

の逆マトリックスから求められるが^{1),3)}, その無限級数の項数は $20n_c$ とした。但し, 通常の計算では, この項数は $2n_c \sim 4n_c$ 程度とれば充分である。

3. 静的相互作用ばねの性質

計算結果について述べる前に, 記号の説明をしておく。静的な水平相互作用ばねは ${}_0K_{ij}^{(S)}$ で表わし, 静的な回転相互作用ばねは ${}_0K_{ij}^{(R)}$ で表わす。これらの静的相互作用ばねは, H/a , H/c , H/d_i , μ および ν の関数として与えられる。ここに, μ : 表層地盤のせん断剛性, ν : 表層地盤のポアソン比である。ところで, ${}_0K_{ij}^{(S)}$ あるいは ${}_0K_{ij}^{(R)}$ を要素とするばねマトリックスは 3 重対角マトリックスとなることがわかっている^{1),3)}。従って, 本報では, 3 重対角マトリックスの対角要素と非対角要素の性質

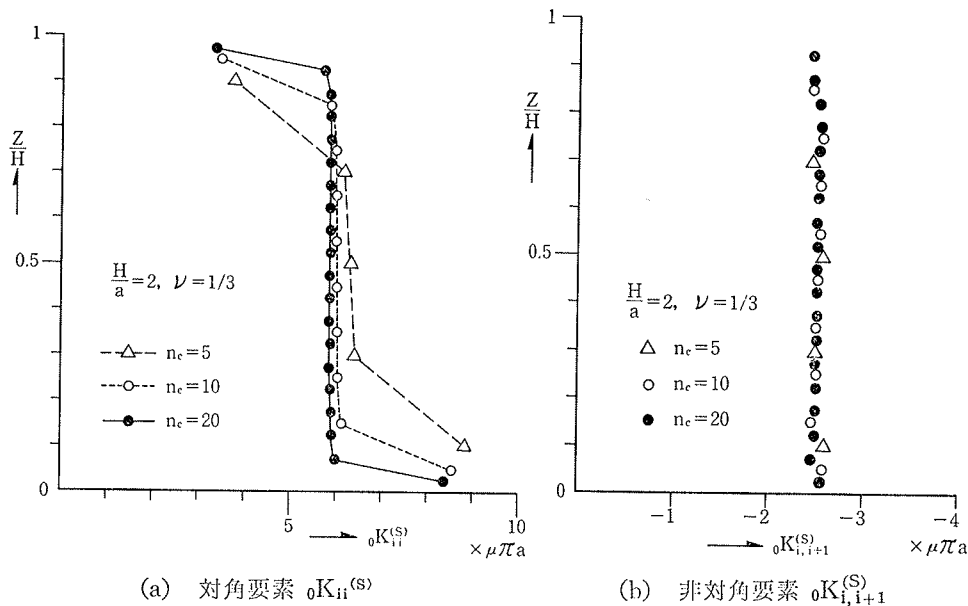
について述べる——例えば水平ばねの場合, 対角要素とは ${}_0K_{ii}^{(S)}$ ($i = 1, \dots, n_c$) を言い, 非対角要素とは ${}_0K_{i,i+1}^{(S)}$ ($i = 1, \dots, n_c - 1$) を指す。

3.1. 分割数との関係

図一2 は, 水平相互作用ばねと分割数 n_c との関係を見るために作成したものである。 $H/a = 2$, $\nu = 1/3$ の場合について, $n_c = 5, 10, 20$ としたときの計算結果であり, ばねの値を $\mu\pi a$ で無次元化して深さ方向にプロットしたものである。図一2 (a)の対角要素のばねに関する図から次の様なことがわかる。分割数が大きくなるにつれてばねの値は少しずつ小さくなる。また, 対角要素のばねの値の深さ方向の分布は, 三つの分割数の場合に共通して, 次の様になっている。即ち, 最上部のばね (${}_0K_{11}^{(S)}$) が最も小さく, 最下部のばね (${}_0K_{n_c, n_c}^{(S)}$) が最も大きい。更に, これらのばねに挟まれたばねは互いにほぼ等しい (${}_0K_{22}^{(S)} \approx {}_0K_{33}^{(S)} \approx \dots \approx {}_0K_{n_c-1, n_c-1}^{(S)}$)。図一2 (b)は非対角要素のばねを深さ方向にプロットしたものである。この図から非対角要素のばねは, 分割数とその位置に関係なくほぼ一定値をとることがわかる。以上の考察からわかるように, ${}_0K_{11}^{(S)}$, ${}_0K_{22}^{(S)}$, ${}_0K_{n_c, n_c}^{(S)}$, ${}_0K_{12}^{(S)}$ の値がわかればばねマトリックスを作成できることになる。

3.2. 深さ比との関係

次に, 深さ比 H/a を変化させた場合の相互作用ばねの性質を検討してみる。 H/a を 2, 4, 8 とし, それぞれの深さ比のモデルについて分割数 n_c が 5, 10, 20 の場合について相互作用ばねを計算してみた。表一は水平相互作用ばねの対角要素の ${}_0K_{11}^{(S)}$ を例にとってその計算結果を示したものである (表中の値は ${}_0K_{11}^{(S)}$ を $\mu\pi a$ で



図二 相互作用ばねと分割数との関係(水平ばね)

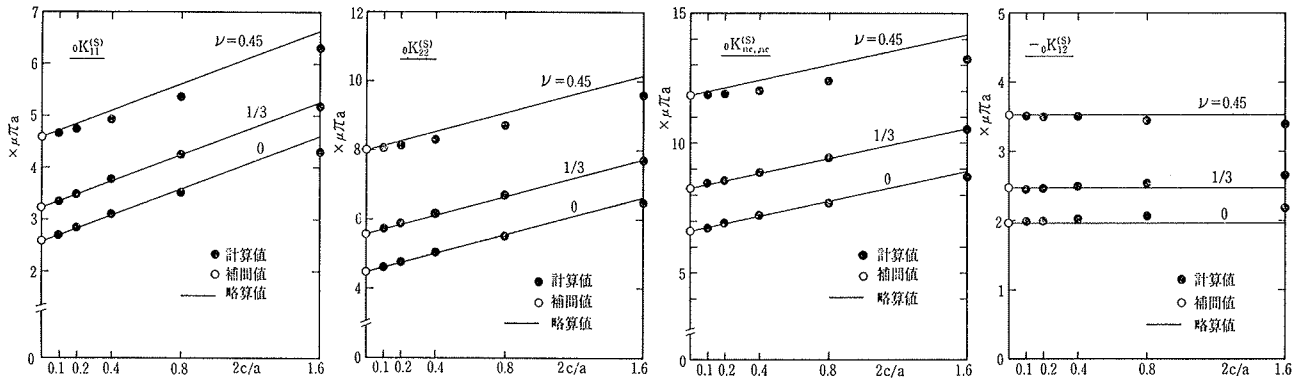
除した無次元量)。この表から ${}_0K_{11}^{(S)}/\mu\pi a$ の値は無次元分割幅 ($2c/a$) とポアソン比によって定まり, 深さ比 H/a あるいは分割数 n_c とは直接的な関係がないことがわかる。他の対角要素のばね ${}_0K_{22}^{(S)}$ と ${}_0K_{n_c, n_c}^{(S)}$ についても検討したが同様な性質を示すことが確認された。表二は非対角要素のばねについての $-{}_0K_{12}^{(S)}/\mu\pi a$ の値を示したものである。この表から,

H/a	ν	2c/a (= H/n _c a)				
		0.1	0.2	0.4	0.8	1.6
2	0	2.712	2.843	3.101	—	—
	0.2	2.955	3.095	3.371	—	—
	1/3	3.352	3.496	3.784	—	—
	0.4	3.819	3.953	4.232	—	—
	0.45	4.666	4.741	4.948	—	—
4	0	—	2.837	3.078	3.538	—
	0.2	—	3.088	3.346	3.838	—
	1/3	—	3.489	3.756	4.278	—
	0.4	—	3.945	4.202	4.724	—
	0.45	—	4.733	4.915	5.377	—
8	0	—	—	3.071	3.510	4.325
	0.2	—	—	3.338	3.809	4.686
	1/3	—	—	3.748	4.245	5.188
	0.4	—	—	4.193	4.689	5.666
	0.45	—	—	4.906	5.338	6.304

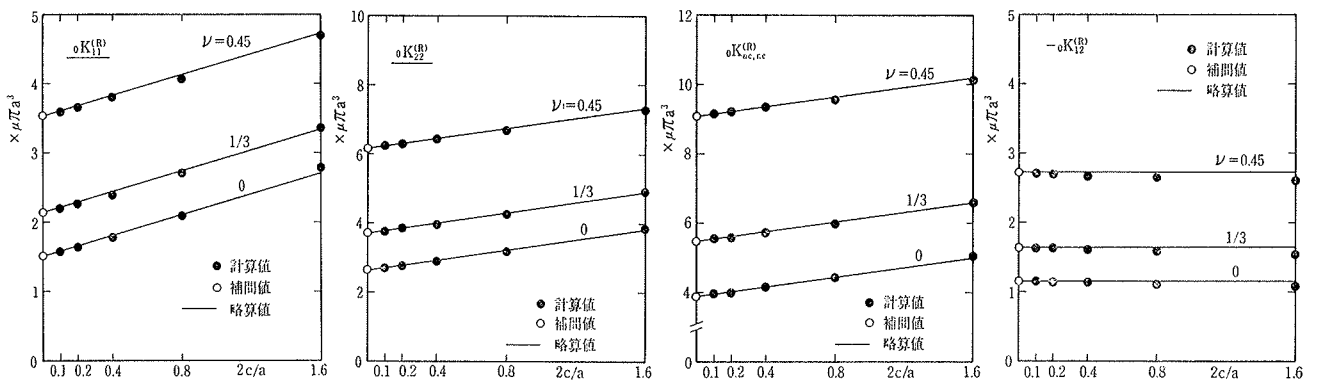
表一 ${}_0K_{11}^{(S)}/\mu\pi a$ の値

H/a	ν	2c/a (= H/n _c a)				
		0.1	0.2	0.4	0.8	1.6
2	0	1.983	1.991	1.997	—	—
	0.2	2.163	2.172	2.177	—	—
	1/3	2.463	2.471	2.470	—	—
	0.4	2.828	2.830	2.813	—	—
	0.45	3.522	3.495	3.417	—	—
4	0	—	1.997	2.022	2.059	—
	0.2	—	2.178	2.204	2.240	—
	1/3	—	2.478	2.500	2.526	—
	0.4	—	2.837	2.845	2.846	—
	0.45	—	3.504	3.453	3.369	—
8	0	—	—	2.029	2.089	2.184
	0.2	—	—	2.211	2.272	2.370
	1/3	—	—	2.508	2.562	2.652
	0.4	—	—	2.854	2.884	2.948
	0.45	—	—	3.463	3.410	3.391

表二 $-{}_0K_{12}^{(S)}/\mu\pi a$ の値



図—3 相互作用ばねと分割幅との関係（水平ばね）



図—4 相互作用ばねと分割幅との関係（回転ばね）

${}_0K_{12}^{(S)}/\mu\pi a$ の値は深さ比と無次元分割幅の影響を殆んど受けずにポアソン比の値により定まることがわかる。

3.3. 分割幅との関係

図—3 に水平相互作用ばねと（無次元）分割幅との関係を示した。図—4 は回転相互作用ばねに関するものである。これらの図中の（●）印が計算値であって、（○）印は補間値であり、実線は略算式による値である。この

補間値および略算式については後に言及する。図—3, 4 から、 $\mu\pi a$ （回転ばねの場合は $\mu\pi a^3$ ）で規準化された相互作用ばねの値は無次元分割幅（2c/a）の一次式（直線）で近似できそうであること、その直線の傾きはポアソン比の影響をあまり受けにくいこと等がわかる。特に、 ${}_0K_{12}^{(S)}/\mu\pi a$ と ${}_0K_{12}^{(R)}/\mu\pi a^3$ の値が無次元分割幅に対してほぼ一定値をとることは注目し値いする。

ν	${}_0K_{11}^{(S)}/\mu\pi a$	${}_0K_{22}^{(S)}/\mu\pi a$	${}_0K_{n_c, n_c}^{(S)}/\mu\pi a$	$-{}_0K_{12}^{(S)}/\mu\pi a$
0	2.581 (1.0)	4.485 (1.0)	6.618 (1.0)	1.975 (1.0)
0.2	2.815 (1.091)	4.893 (1.091)	7.217 (1.091)	2.154 (1.091)
1/3	3.208 (1.243)	5.573 (1.243)	8.225 (1.243)	2.455 (1.243)
0.4	3.685 (1.428)	6.407 (1.429)	9.459 (1.429)	2.826 (1.431)
0.45	4.591 (1.779)	8.006 (1.785)	11.83 (1.788)	3.549 (1.797)

表一三 分割幅が零の場合の補間値(水平ばね)

ν	${}_0K_{11}^{(R)}/\mu\pi a^3$	${}_0K_{22}^{(R)}/\mu\pi a^3$	${}_0K_{n_c, n_c}^{(R)}/\mu\pi a^3$	$-{}_0K_{12}^{(R)}/\mu\pi a^3$
0	1.502 (1.0)	2.619 (1.0)	3.871 (1.0)	1.161 (1.0)
0.2	1.736 (1.156)	3.026 (1.155)	4.470 (1.155)	1.338 (1.152)
1/3	2.127 (1.416)	3.707 (1.415)	5.476 (1.415)	1.640 (1.413)
0.4	2.608 (1.736)	4.541 (1.734)	6.709 (1.733)	2.007 (1.729)
0.45	3.532 (2.352)	6.150 (2.348)	9.085 (2.347)	2.712 (2.339)

表一四 分割幅が零の場合の補間値(回転ばね)

3.4. ポアソン比との関係

相互作用ばねとポアソン比との関係をわかり易くみるために分割幅が零の場合の相互作用ばねの値を求めてみる。具体的には、図一3および図一4の計算値を用いて直線補間により横軸(無次元分割幅)が零の場合の相互作用ばねの値を求める。図一3, 4の(○)印はこうして求めた補間値をプロットしたものである。表一3および表一4にこれらの補間値をまとめて示した。表一3は水平相互作用ばねに関するものであり、表一4は回転相互作用ばねに関するものである。これらの表中の()内の数値はポアソン比が零の場合の値を1としたときの比である。この比は4種類の要素の相互作用ばねについてほぼ同一の値をとるようである。そこで、これらの比の平均値をポアソン比に関する倍率係数と名づけ、水平相互作用ばねの場合には Γ_s で、回転相互作用ばねの場合には Γ_R でそれぞれ表わすこととする。表一5に Γ_s と Γ_R の値を示しておいた。この Γ_s , Γ_R とポアソン比が零のときの相互作用ばねの値を用いれば、分割幅が零の場合の任意のポアソン比に対するばねの値が求められる。

ν	Γ_s	Γ_R
0	1	1
0.2	1.091	1.155
1/3	1.243	1.415
0.4	1.429	1.733
0.45	1.787	2.347

表一五 ポアソン比に関する倍率係数(Γ_s , Γ_R)

4. 静的相互作用ばねの略算式

前章で説明した静的相互作用ばねの性質を利用して、任意の均等分割モデルの静的ばねの略算式を提案する。次いで、この略算式の不均等分割モデルへの適用性を検討する。

4.1. 略算式の提案

任意の均等分割モデルの水平相互作用ばねの略算式として次の様な諸式を提案する。

$${}_0K_{11}^{(S)} = \mu\pi a \left\{ 2.58\Gamma_s + 1.26\left(\frac{2c_1}{a}\right) \right\} \dots\dots\dots (1\cdot a)$$

$${}_0K_{n_c, n_c}^{(S)} = \mu\pi a \left\{ 6.62\Gamma_s + 1.45\left(\frac{2c_{n_c}}{a}\right) \right\} \dots\dots\dots (1\cdot b)$$

$${}_0K_{1i}^{(S)} = \mu\pi a \left\{ 4.49\Gamma_s + 1.36\left(\frac{2c_i}{a}\right) \right\},$$

$$(i=2, 3, \dots, n_c-1) \dots\dots\dots (1\cdot c)$$

$${}_0K_{i, i+1}^{(S)} = -\mu\pi a \times 1.98\Gamma_s,$$

$$(i=1, 2, \dots, n_c-1) \dots\dots\dots (1\cdot d)$$

$${}_0K_{ij}^{(S)} = {}_0K_{ji}^{(S)} \dots\dots\dots (1\cdot e)$$

ここに、 $2c_i$ は*i*番目の分割部分の厚さを表わす。均等分割モデルではこれらの厚さはすべて等しく、 $2c_i = 2c = H/n_c$ であるが、不均等分割モデルへの適用を考えて $2c_i$ を用いた。

次に、回転相互作用ばねの略算式を示す。

$${}_0K_{11}^{(R)} = \mu\pi a^3 \left\{ 1.50\Gamma_R + 0.752\left(\frac{2c_1}{a}\right) \right\} \dots\dots\dots (2\cdot a)$$

$${}_0K_{n_c, n_c}^{(R)} = \mu\pi a^3 \left\{ 3.87\Gamma_R + 0.673\left(\frac{2c_{n_c}}{a}\right) \right\} \dots\dots\dots (2\cdot b)$$

$${}_0K_{1i}^{(R)} = \mu\pi a^3 \left\{ 2.62\Gamma_R + 0.736\left(\frac{2c_i}{a}\right) \right\},$$

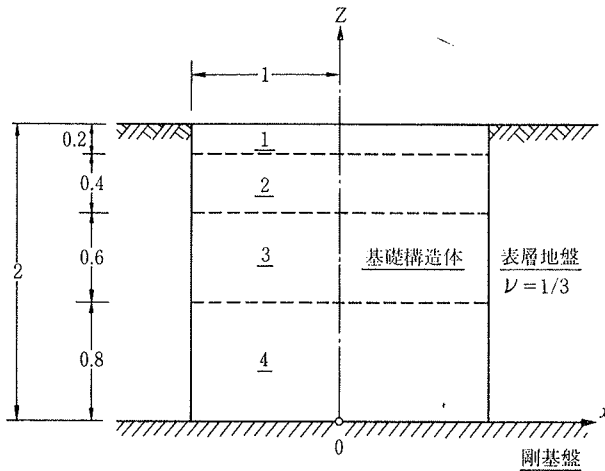
$$(i=2, 3, \dots, n_c-1) \dots\dots\dots (2\cdot c)$$

$${}_0K_{i, i+1}^{(R)} = -\mu\pi a^3 \times 1.16\Gamma_R,$$

$$(i=1, 2, \dots, n_c-1) \dots\dots\dots (2\cdot d)$$

$${}_0K_{ij}^{(R)} = {}_0K_{ji}^{(R)} \dots\dots\dots (2\cdot e)$$

(1)式および(2)式中の $(2c_i/a)$ に掛けられた係数は図一3あるいは図一4のポアソン比が零の場合の計算値を最小自乗近似して定めた直線の傾きである。また、 Γ_s , Γ_R の値は表一5の値を補間して用いるが、ポアソン比が0.45以上の場合は0.45のときの値を用いた方がよい。この理由については次報で触れることとしたい。なお、(1)



図—5 不均等分割モデルの計算例

式および(2)式による略算値と計算値との比較は既に図—3と図—4に示してあるので参照して頂きたい。

4.2. 不均等分割モデルへの適用性

上に述べた略算式は均等分割モデルの計算結果の検討をもとに誘導されたものであった。ここでは、不均等分割モデルに略算式を適用して求めた相互作用ばねの値を検討してみる。計算例として図—5の不均等4分割モデルを用いた。即ち、基礎構造体の半径aを1とし、分割幅 $2c_i$ ($i=1, 2, 3, 4$)は上から順に0.2, 0.4, 0.6, 0.8とした。従って、層厚Hは2である。また表層地盤のポアソン比 ν は $1/3$ とした。表—6および表—7に計算値と略算値を比較したものを示した。略算値は(1)式と(2)式を用いて計算した値である。これらの表によれば、略算値の計算値に対する誤差は、水平相互作用ばね(表—6)で約10%、回転相互作用ばね(表—7)で約12%である。従って、本報で提案した略算式は、不均等分割モデルに対してもほぼ10%程度の誤差範囲内で適用できるものと考えられる。

5. まとめ

基礎構造体を深さ方向に均等分割して集中質点系でモデル化する場合を想定して、静的な相互作用ばねについての数値計算を行なった。その結果得られた相互作用ばねの性質を利用して、任意の均等分割モデルの静的な相互作用ばねの略算式を提案した。この略算式は、任意の不均等分割モデルに対しても、10%程度の誤差範囲内で適用可能である。

	計算値	略算値	誤差 (%)
${}_0K_{11}^H / \mu \pi a$	3.15	3.46	9.8
${}_0K_{22}^H / \mu \pi a$	6.13	6.12	0.2
${}_0K_{33}^H / \mu \pi a$	6.65	6.39	3.9
${}_0K_{44}^H / \mu \pi a$	9.59	9.39	2.1
$-{}_0K_{12}^H / \mu \pi a$	2.51	2.46	2.0
$-{}_0K_{23}^H / \mu \pi a$	2.62	2.46	6.1
$-{}_0K_{34}^H / \mu \pi a$	2.70	2.46	8.9

表—6 不均等分割モデルの計算結果(水平ばね)

	計算値	略算値	誤差 (%)
${}_0K_{11}^R / \mu \pi a^3$	2.03	2.28	12.3
${}_0K_{22}^R / \mu \pi a^3$	3.95	4.00	1.3
${}_0K_{33}^R / \mu \pi a^3$	4.24	4.15	2.1
${}_0K_{44}^R / \mu \pi a^3$	6.10	6.02	1.3
$-{}_0K_{12}^R / \mu \pi a^3$	1.64	1.64	0
$-{}_0K_{23}^R / \mu \pi a^3$	1.71	1.64	4.1
$-{}_0K_{34}^R / \mu \pi a^3$	1.76	1.64	6.8

表—7 不均等分割モデルの計算結果(回転ばね)

謝 辞

本報告をまとめるにあたり、構造研究室の鈴木哲夫氏より貴重な助言を頂いた。ここに記して謝意を表します。

参考文献

- 1) 安井: 建物—基礎構造体—表層地盤連成系の振動解析に関する研究(その1), 大林組技術研究所報, No. 20, (1980), pp. 25~33
- 2) 安井: 同題(その2), 大林組技術研究所報, No. 21 (1980), pp. 19~26
- 3) 安井: 同題(その3), 大林組技術研究所報, No. 23 (1981), pp. 25~30
- 4) 安井: 同題(その4), 大林組技術研究所報, No. 24 (1982), pp. 62~66