

開口を有する基礎の動的ばねについて (その2)

——水平・回転振動——

渡 辺 清 治 安 井 讓
栗 本 修

Dynamic Ground Stiffness of Rigid Foundation with Internal Hole (Part 2)

——Horizontal and Rocking Vibrations——

Seiji Watanabe Yuzuru Yasui
Osamu Kurimoto

Abstract

In Part 1, the dynamic ground stiffness of a rigid foundation with an internal hole was considered with regard to vertical vibrations. It was found that depending on the size of the hole peaks and troughs are produced in stiffness and damping factor at specific frequencies. In Part 2, the stiffness was considered concerning horizontal and rocking vibrations. As a result, it was learned that the properties are similar to those with vertical vibrations in case of rocking vibrations, but different in case of horizontal vibrations. In other words, with horizontal vibrations, the size of the hole is larger, the stiffness is greater, and the damping is smaller, while with the rocking vibrations properties appearing to have an extremum as specific frequencies are indicated due to the influence of the hole. Based on the above, it may be said that the response of the rigid foundation with internal hole may be different from that of a foundation without a hole depending on the principal mode of vibration.

概 要

開口を有する基礎の動的ばねについて、(その1)では上下振動の場合を扱い、開口の大小により特定の振動数ではね、減衰にピークまたは谷を生ずることがわかった。(その2)では水平、回転振動の場合を検討した。その結果、回転振動の場合、その特性は上下振動と類似した傾向を示すこと、水平振動では上下振動とは異なった様相を呈すること等がわかった。すなわち、水平振動では開口が大きくなるとともにばねは大きく減衰は小さくなるように連続的に変化するのに対し、回転振動では開口の影響で特定の振動数で極値を有するような性質を示す。このことにより、開口を有する基礎では卓越する振動形によりその応答がかなり異なるといえる。

1. まえがき

地盤と構造物の動的相互作用問題を扱う場合に動的ばねの算定は重要となる。本報告では動的ばねの算定の次の方法を用いている。まず、基礎盤をFEM的にメッシュ分割し、各要素に点加振解を適用して基礎盤全体の柔性行列を求め、その逆行列として剛性行列を定義し、任意の変位分布に対し動的ばねを求めるものである。この方法によれば基礎下に応力分布を仮定する必要がなく剛基礎の変位分布を矛盾なく評価することができる。

前報⁵⁾で任意形状基礎、特に開口を有する基礎の上下

振動の場合を扱い、Wong, Lucoによる類似の研究¹⁾との比較により結果の妥当性を検討するとともに開口を有する基礎の動的地盤ばねの特性を把握した。これに続いて、(その2)ではWong等が扱っていない水平・回転振動の場合を検討した。

2. 水平加振時の振動アドミッタンス

2.1. 水平点加振理論解による振動アドミッタンス

半無限弾性体上に水平方向の調和外力 $Q \cdot e^{i\omega t}$ が作用するときの地盤上の任意点の水平変位、すなわち、振動アドミッタンスは次式で与えられる²⁾。

$$\begin{aligned} \ddot{u} = & \frac{Q \cdot e^{i\omega t}}{4\pi G} \cdot \frac{1}{r} \left[\{-a \cdot {}_nH_1 + (1-\nu) + e^{-ia}\} \right. \\ & + \cos 2\theta \left\{ a \cdot {}_nH_2 - (1-\nu) \right. \\ & \left. \left. + \frac{2}{a} (\sin a + i(\cos a - 1)) - e^{-ia} \right\} \right] \dots\dots\dots(1) \end{aligned}$$

ただし, ${}_nH_1 = \int_0^\infty \left\{ \frac{\zeta \sqrt{\zeta^2 - 1}}{F(\zeta)} + (1-\nu) \right\} J_0(\zeta a) d\zeta \dots\dots\dots(2)$

${}_nH_2 = \int_0^\infty \left\{ \frac{\zeta \sqrt{\zeta^2 - 1}}{F(\zeta)} + (1-\nu) \right\} J_2(\zeta a) d\zeta \dots\dots\dots(3)$

ここに, G: 地盤のせん断剛性

ν : ポアソン比

a: 無次元振動数 $\left(= \frac{\omega r}{V_s} \right)$

θ : 加振点と受振点を結ぶ直線が加振軸となす角

である。

さて, (1)式から点加振によるアドミッタンスを求めるには(2), (3)式の無限積分を数値積分によって実行する必要がある。しかし, この無限積分をそのまま実行するには多大の計算時間を要し経済的でないこと, および無限区間を有限区間で打ち切ることの誤差が生じること等のため, 無限積分を有限積分に置換する方法が提示されている³⁾。この方法は複素函数論に基づき(2), (3)式を有限区間の積分と特異点まわりの Cauchy の主値との和に置換するものである。この置換によって計算時間の大幅な短縮をはかり, 打ち切り誤差をなくすることができる。以下にその結果のみを示す。

$$\begin{aligned} {}_nH_1 = & -\pi i \frac{\zeta_0 \sqrt{\zeta_0^2 - 1}}{F'(\zeta_0)} \underline{H}_0(-\zeta_0 a) \\ & + \int_r^1 \frac{i\zeta \sqrt{1-\zeta^2} (2\zeta^2 - 1)^2}{G(\zeta)} \underline{H}_0(-\zeta a) d\zeta \\ & + \int_0^r \frac{i\zeta \sqrt{1-\zeta^2}}{F(\zeta)} \underline{H}_0(-\zeta a) d\zeta \dots\dots\dots(4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_nH_2 = & -\pi i \frac{\zeta_0 \sqrt{\zeta_0^2 - 1}}{F'(\zeta_0)} \underline{H}_2(-\zeta_0 a) \\ & + \int_r^1 \frac{i\zeta \sqrt{1-\zeta^2} (2\zeta^2 - 1)^2}{G(\zeta)} \underline{H}_2(-\zeta a) d\zeta \\ & + \int_0^r \frac{i\zeta \sqrt{1-\zeta^2}}{F(\zeta)} \underline{H}_2(-\zeta a) d\zeta \dots\dots\dots(5) \end{aligned}$$

ここに, $\underline{H}_n(x) = J_n(x) - i \cdot Y_n(x)$

$J_n(x)$: n次 Bassel 関数

$Y_n(x)$: n次変形 Neumann 関数

$$\left(= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(n\theta - x \sin \theta) d\theta \right)$$

F(ζ): Rayleigh 関数

$$\left(= (2\zeta^2 - 1)^2 - 4\zeta^2 \sqrt{\zeta^2 - \gamma^2} \sqrt{\zeta^2 - 1} \right)$$

F'(ζ): F(ζ)の導関数

$$\overline{F}(\zeta): (2\zeta^2 - 1)^2 + 4\zeta^2 \sqrt{\gamma^2 - \zeta^2} \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$G(\zeta): (2\zeta^2 - 1)^4 + 16\zeta^4(1 - \zeta^2)(\gamma^2 - \zeta^2)$$

r: 弾性波速度比 $\left(= \frac{V_s}{V_p} \right)$

ζ_0 : Rayleigh Pole (F(ζ)=0の実数解)

2.2. 水平面加振近似解による振動アドミッタンス

円形基礎の中心点変位を用いた振動アドミッタンスは基礎下の応力分布を一様分布と仮定すれば, 田治見⁴⁾により次式のように与えられている。

$$u_{x_0} = \frac{2-\nu}{2\pi G} \cdot \frac{Q \cdot e^{i\omega t}}{R} \left[\frac{\sin \Gamma_2 \cdot j \cdot R}{\Gamma_2 \cdot j \cdot R} - i \frac{1 - \cos \Gamma_2 \cdot j \cdot R}{\Gamma_2 \cdot j \cdot R} \right] \dots\dots\dots(6)$$

ここに, R: 円形基礎半径

j: 波数 $\left(= \frac{\omega}{V_s} \right)$

Γ_2 : ポアソン比に依存する係数

3. 剛基礎下の動的地盤ばね

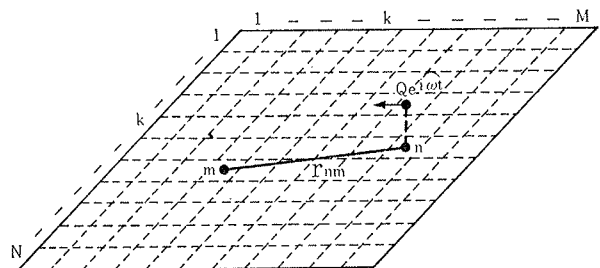
剛基礎下の地盤ばねを求めるために基礎直下地盤を図一のようにメッシュ分割し, 図のn要素の中央加振力とm要素の中央変位とを結ぶ柔性を前節で得られている振動アドミッタンスを用いて基礎盤全体の柔性行列をつくり, その逆行列をとったものが剛性行列となる。

3.1. 水平ばね

図一のようにメッシュ割りすれば, 水平加振時の柔性行列が(1), (6)式より次のように与えられる。

$$D_{nm} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi G} \cdot \frac{1}{r_{nm}} \left[\{-a \cdot {}_nH_1 + (1-\nu) + e^{-ia}\} \right. \\ \quad \left. + \cos 2\theta \left\{ a \cdot {}_nH_2 - (1-\nu) \right. \right. \\ \quad \left. \left. + \frac{2}{a} (\sin a + i(\cos a - 1)) - e^{-ia} \right\} \right] & (n \neq m) \\ \frac{2-\nu}{2\pi G} \cdot \frac{1}{R_n} \left\{ \frac{\sin \Gamma_2 j R}{\Gamma_2 j R} - i \frac{1 - \cos \Gamma_2 j R}{\Gamma_2 j R} \right\} & (n = m) \end{cases} \dots\dots\dots(7)$$

ここに, r_{nm} : n要素とm要素の中心点間距離



図一 地盤分割図

R_n : 要素の等価円半径

(7)式で表わされる柔性行列の逆行列として剛性行列を定義すれば, 次の力-変位関係式を得る。

$$\{Q_n\} \cdot e^{i\omega t} = [K_{nm}] \cdot \{U_m\} \cdot e^{i\omega t} \dots\dots\dots(8)$$

$$[K_{nm}] = [D_{nm}]^{-1}$$

(8)式において、 $\{U_m\}$ に一様振幅の変位 U_0 を与えれば剛基礎下の地反力が求められる。そこで、地盤ばねは得られた全地反力と一様変位との比として次式のように与えられる。

$$K_H = \frac{\sum_n Q_n}{U_0} \dots\dots\dots(9)$$

さらに、 K_H を静的ばね K_{Hst} を用いて

$$K_H = K_{Hst}(k_H + ia_0c_H) \dots\dots\dots(10)$$

と表わせば、無次元水平ばね係数 k_H 、減衰係数 c_H が求められる。

3.2. 回転ばね

回転ばねは回転軸回りのモーメント M と回転角 θ に与えられ、回転加振時の変位分布を図-2 のようにとり、かつ、 $M = \sum P_n x_n$ を考慮すれば次式となる。

$$K_R = \frac{M}{\theta} = \frac{\sum P_n x_n}{\theta} \dots\dots\dots(11)$$

ここで、 P_n は(その1)で求められた上下加振時の柔性行列より次式のように求められる。

$$\{P_n\} \cdot e^{i\omega t} = [K_{nm}] \{v_m\} \cdot e^{i\omega t} \dots\dots\dots(12)$$

$$[K_{nm}] = [D_{nm}]^{-1}$$

$\{V_m\}$: 三角形変位分布 (図-2 参照)

また、 K_R を静的ばね K_{Rst} を用いて

$$K_R = K_{Rst}(k_R + ia_0c_R) \dots\dots\dots(13)$$

と表わせば、無次元回転ばね係数 k_R 、減衰係数 c_R が求められる。

3.3. 任意形状基礎下の動的地盤ばね

前節までの手法によれば任意形状基礎についても地盤ばねを簡単に求めることができる。すなわち、図-1 のようなメッシュ分割を行えば、任意な二点間の地盤柔性性を求め、(8)式または、(12)式を用いて地反力が得られる。さらに、(9)式または(11)式を用いて地盤ばねが得られることになる。

4. 数値計算例

4.1. 解析モデル

解析モデルは(その1)と同じものとし、基礎盤は図-3 に示す4種類の正方形の場合について比較、検討した。また、地盤定数は次の値を用いた。

G: 30,000 t/m², γ : 1.84 t/m³, V_s : 400 m/s, ν : 1/3

4.2. 静的ばねと hole の大小との関係

まず、表-1 に静的ばね値を示す。ここに、 B は基礎半幅、 b は hole 半幅である。図-4 は静的ばねと hole の大小との関係を示した。表中に()で示した値および図-4 は hole の無い場合を基準として hole の大小によるばねの変化を示してある。図-4 によると hole の影響は小さく、基礎面積比が30%程度に減少しても静的ばね

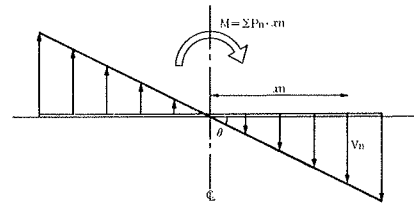


図-2 回転加振時変位分布

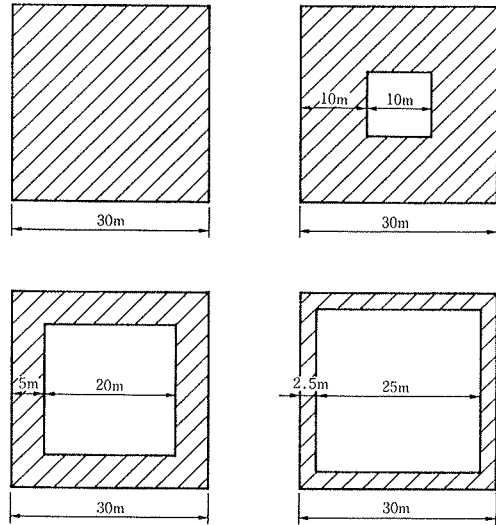


図-3 基礎盤解析モデル

	$\frac{b}{B} = 0$	$\frac{b}{B} = \frac{2}{6}$	$\frac{b}{B} = \frac{4}{6}$	$\frac{b}{B} = \frac{5}{6}$
上下ばね ($\times 10^7 t/m$)	0.3048 (1)	0.3028 (0.9934)	0.2873 (0.9426)	0.2623 (0.8606)
水平ばね ($\times 10^7 t/m$)	0.2440 (1)	0.2425 (0.9939)	0.2306 (0.9450)	0.2115 (0.8668)
回転ばね ($\times 10^9 t \cdot m$)	0.5880 (1)	0.5876 (0.9993)	0.5736 (0.9755)	0.5314 (0.9037)

表-1 静的ばね値

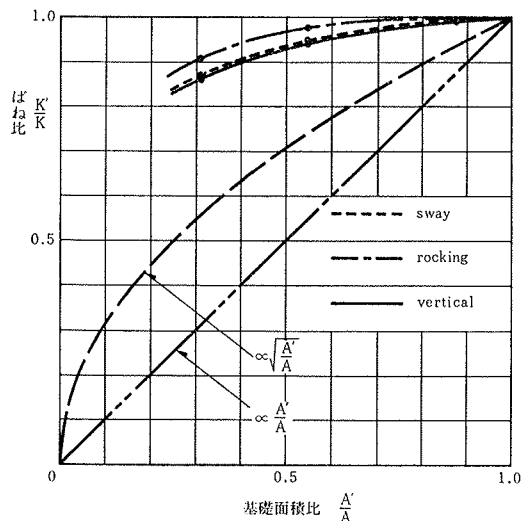


図-4 開口を有する基礎の静的ばね

は上下,水平で85%,回転で90%程度にしか落ちておらず,ばねが面積比やその平方根に比例するとした場合(図中の2点鎖線および長破線)に比べかなり高い値となっている。これは剛基礎では端部で大きな応力が生じる Boussinesq 分布であるため,基礎内部はもともと応力分担が少なく,その部分が hole に置き換わっても基礎盤全体への影響は少ないためと考えられる。また,回転ばねが上下,水平ばねより低下率が小さいのは反力分布が回転軸に関し逆対称の三角形分布に近いためと考えられる。

4.3. 動的ばねと hole の大小との関係

動的ばねと hole の大小との関係を図-5, 6に示す。横軸は無次元振動数, 縦軸は無次元ばね係数, 減衰係数である。

図-5 から水平振動の場合, 振動数が高くなるにつればねは単調増加, 減衰は単調減少の傾向を示すことがわかる。hole の大小による影響は基礎半幅 B と hole 半幅 b との比 b/B が $2/6$ に対しては比較的小さく, 高振動数域ではばねが20%程大きくなるに過ぎないが, b/B が大きくなるとその影響がかなり大きく現われてくる。すなわち, ばねについては $b/B=4/6$ で $a_0=7$ に, $5/6$ で $a_0=6$ に変曲点を有し, そのときの倍率は各々1.6, 1.7である。減衰については低振動数域での値に比べ高振動数域では $b/B=4/6, 5/6$ の各々に対し75%, 60%の値に落ちている。

図-6 から回転振動の場合, hole が大きくなると特定の振動数域で極値をとる傾向があることがわかった。ばねについては $b/B=4/6$ では $a_0=6.5$ に, $5/6$ では $a_0=8$ にピークが生じその倍率は各々 1.45, 1.25 となっている。しかし, $b/B=2/6$ の場合は hole 無しの場合とほとんど差が見られずピークも生じてはいない。減衰については $b/B=4/6$ で $a_0=9$ に, $5/6$ で $a_0=8$ に谷が生じ, その低下の割合は hole 無しの場合の66%, 63%となっている。また, ばねと同様に減衰についても $b/B=2/6$ では hole 無しの場合にほとんど等しくなっている。

4.4. 基礎下の地反力分布

図-7~10に水平振動による地反力分布を, 図-11~14に回転振動による地反力分布を示す。ただし, 加振振動数は図-7~12では $a_0=10$, 図-13では $a_0=8$, 図-14では $a_0=7$ である。

図-7~10によると, 基礎内部の hole に接する面で応力集中が強ク現われ, 特に加振方向の中央線に近い部分でその傾向が顕著である。また, 基礎外周部に着目するとその分布形としては hole 無しの場合は端部で大きいのに対し, $b/B=5/6$ の場合では一様分布に近い形となっている。

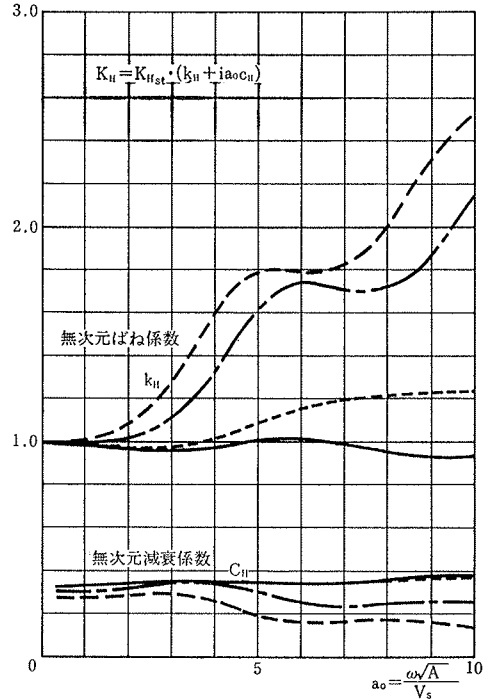
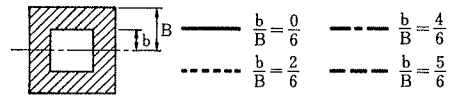


図-5 開口を有する基礎の動的水平ばね

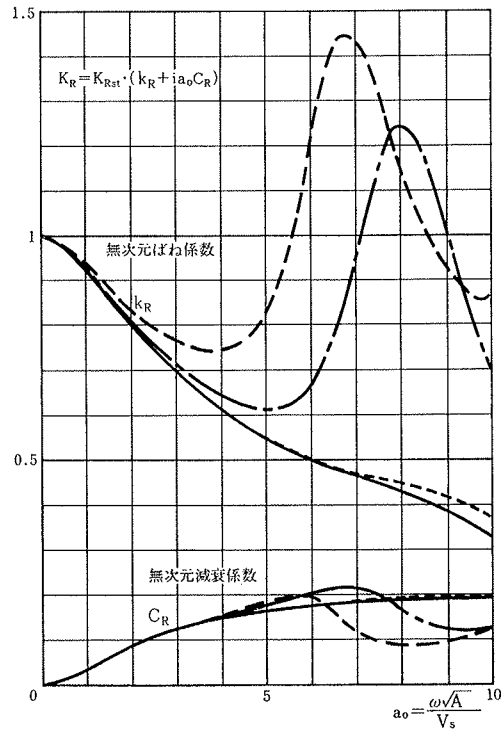
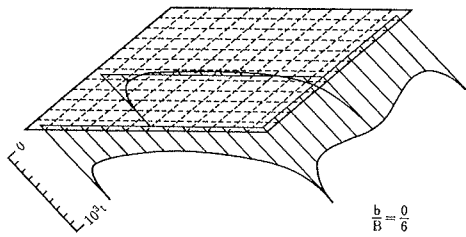
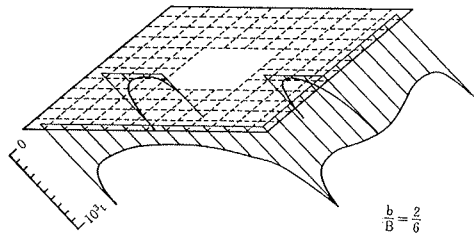


図-6 開口を有する基礎の動的回転ばね

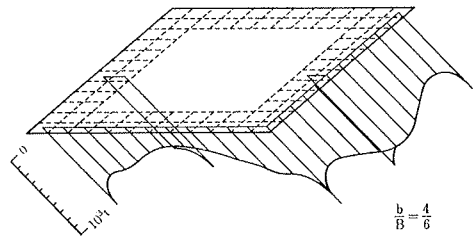
図-11~14によると, $b/B=2/6$ の場合は hole 無しの場合と類似しており hole の影響はほとんど見られない。 $b/B=4/6, 5/6$ の場合には水平振動の場合と同様に加振方向の中央線に近い部分で応力集中が見られるが, 基礎



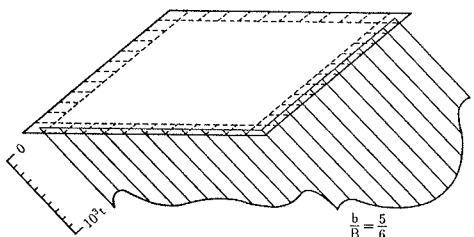
図一7 動的地反力分布（水平振動） $a_0=10$



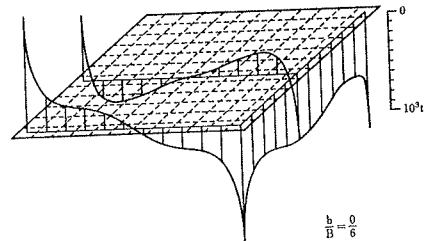
図一8 動的地反力分布（水平振動） $a_0=10$



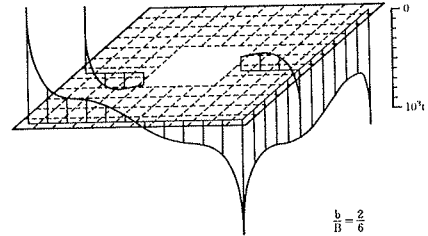
図一9 動的地反力分布（水平振動） $a_0=10$



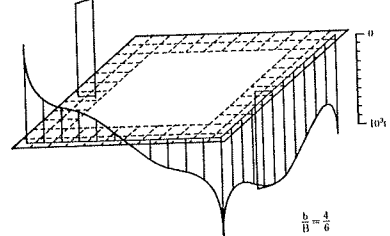
図一10 動的地反力分布（水平振動） $a_0=10$



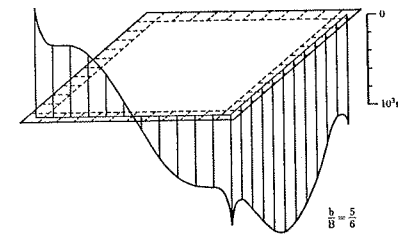
図一11 動的地反力分布（回転振動） $a_0=10$



図一12 動的地反力分布（回転振動） $a_0=10$



図一13 動的地反力分布（回転振動） $a_0=8$



図一14 動的地反力分布（回転振動） $a_0=7$

外周部に着目すると分布形としては hole 無しの場合に比較的類似した形状となっている。

5. まとめ

開口を有する基礎の振動性状をまとめると以下のようである。

- (1) 静的ばねに対しては，上下，水平，回転ばねのいずれの場合も hole の影響は小さい。
- (2) 動的ばねについては，水平ばねが振動数に対して連続的に増加し，回転ばねが特定の振動数で極値を有するという性質に hole の影響が現われている。
- (3) 地反力分布は，水平，回転振動とも高振動数域で基礎内部の hole に面する部分で応力集中を生じる。
- (4) 逸散減衰効果は，卓越する振動形が水平振動の場合には高振動数域で，回転振動の場合には特定の振動数で低下することを考慮する必要がある。

謝辞

本研究は国土館大学講師，堀 直人氏の研究レポート，

電算プログラムによるところが大きい。ここに深謝の意を表します。

参考文献

- 1) Wong, H. L., Luco, J. E.: Dynamic Response of Rigid Footings of Arbitrary Shape, E. E. S. D. Vol. 4, (1976), pp. 579~587
- 2) 田治見 宏: 建築構造学大系1, 地震工学, 建物と地盤の相互作用, 彰国社, (1968), pp. 53~105
- 3) 武藤, 他: Green 関数の離散化手法を用いた建屋と地盤の動的相互作用の研究, 日本建築学会大会学術講演梗概集, (昭和55. 9), pp. 829~830
- 4) 田治見 宏: 耐震理論に関する基礎的研究, 東京大学生産技術研究所報告, Vol. 8, No. 4, (1959)
- 5) 栗本, 他: 開口を有する基礎の動的ばねについて (その1), 大林組技術研究所報, No. 27, (1983), pp. 42~47