

地盤内における熱挙動の解析 (その1)

——時間依存性ポテンシャル問題への境界要素法の適用および
温度・熱流に関する地盤内応答係数の算出に関する考察——

安江 進

Analysis of Underground Heat Movement (Part 1)

——Application of BEM for Time-dependent Potential Problem
and Study on Ground Response Factors on Temperature and Heat Flux——

Susumu Yasue

Abstract

Heat movement under the ground is a complex phenomenon determined by water movement and conductivity. It is a difficult matter to predict this movement precisely. This paper reports on heat movement analysis under the ground using BEM (Boundary Element Method) based on conductivity only. The reason why BEM was adopted is that the objects of analysis in this study are heat exchanges between basement wall and ground surface, between buried pipes under the ground and ground surface, between buried pipes under the ground, buried pipes in floor slab and floor surface, so it is not necessary to examine temperature distribution in the region. This report deals mainly with the theoretical process of BEM for the abovementioned objects of analysis. The next report will deal with detailed calculation results for various kinds of actual problems concerning the abovementioned matters.

概 要

地盤内の熱挙動は水分移動と熱伝導によって決定される複雑な現象であり、その挙動を正確に予測することは難しい。本報ではその挙動を決定する主要因である熱伝導を取り上げ、その支配方程式である熱拡散方程式に境界要素法を適用して、地盤内における熱挙動について解析を試みた。境界要素法を採用した理由は、解析の対象として地下室内壁と地表面との間の熱授受、地中埋設コイルと地表面との間の熱授受、地中埋設コイル相互間の熱授受、床スラブ内埋設コイルと床表面との間の熱授受などを考えており、境界と境界との間の熱授受が問題となっているため、領域内温度分布の計算をしないで済む境界要素法がその解析に最も適していると判断したからである。本報では、上述した解析対象についての境界要素法による解析方法を中心に述べたが、次報においては具体的な解析対象を上げその詳しい試算例について報告する予定である。

1. はじめに

地盤内の熱挙動は水分移動と熱伝導によって決定される複雑な現象であり、その挙動を正確に予測することは難しい。本報ではその挙動を決定する主要因である熱伝導を取り上げ、その支配方程式である熱拡散方程式に境界要素法を適用して、地盤内における熱挙動について解析を試みた。

2. 支配方程式

熱伝導によって支配される二次元場における熱挙動は次に示す熱拡散方程式により表わされる。

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} - a \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

但し、 θ : 温度 [°C] a : 熱拡散率 [m²/hour]
 τ : 時間 [hour] x, y : 二次元座標 [m]

3. 境界積分方程式の誘導

(1)式を空間、時間にわたって積分し、重みつき残差法を適用すれば次式が誘導される。

$$\int_{t_0}^t \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - a \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \right\} \theta^* d\Omega d\tau = 0 \dots\dots\dots(2)$$

θ^* は基本解とよばれるもので次式の解である。

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial \tau} + a \left(\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial y^2} \right) + \delta(x-x', y-y', \tau-t') = 0 \dots(3)$$

ここで、 $\delta(x-x', y-y', \tau-t')$: デルタ関数

(3)式の解は、

$$\theta^* = -\frac{1}{4\pi a(\tau-t')} \exp \left\{ \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{4a(\tau-t')} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

(4)式を(2)式に代入し、グリーンの発散定理を適用して整理すれば次のようになる。

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \int_{\Omega} \theta(x, y, \tau) \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} + aV \right\} \theta^*(x-x', y-y', \tau-t') d\Omega d\tau \\ &= a \int_{t_0}^t \int_{\Gamma} \theta(x, y, \tau) \frac{\partial}{\partial n} \theta^*(x-x', y-y', \tau-t') d\Gamma d\tau \\ &+ a \int_{t_0}^t \int_{\Gamma} \theta^*(x-x', y-y', \tau-t') \frac{\partial}{\partial n} \theta(x, y, \tau) d\Gamma d\tau \\ &+ \int_{\Omega} \theta(x, y, t) \theta^*(x-x', y-y', t-t) d\Omega \\ &- \int_{\Omega} \theta(x, y, t_0) \theta^*(x-x', y-y', t_0-t) d\Omega \dots\dots\dots(5) \end{aligned}$$

デルタ関数の性質から、

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \int_{\Omega} \theta(x, y, \tau) \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} + aV \right\} \theta^*(x-x', y-y', \tau-t') d\Omega d\tau \\ &= C\theta(x', y', t') \dots\dots\dots(6) \end{aligned}$$

但し、 C : 定数 (境界上 $C = -\frac{1}{2}$, 内点 $C = -1$)

$\tau = t$ とすると、同じくデルタ関数の性質から、

$$\theta^*(x-x', y-y', t-t) = \theta^*(x-x', y-y', 0) = 0 \dots(7)$$

(6), (7)式を(5)式に代入し、(5)式を $t=t'$ において展開すれば、

$$\begin{aligned} & C\theta(x', y', t) \\ &= a \int_{t_0}^t \int_{\Gamma} \theta(x, y, \tau) q^*(x-x', y-y', \tau-t) d\Gamma d\tau \\ &- a \int_{t_0}^t \int_{\Gamma} \theta^*(x-x', y-y', \tau-t) q(x, y, \tau) d\Gamma d\tau \\ &- \int_{\Omega} \theta(x, y, t_0) \theta^*(x-x', y-y', t_0-t) d\Omega \dots\dots\dots(8) \end{aligned}$$

但し、 $\frac{\partial \theta}{\partial n} = q, \frac{\partial \theta^*}{\partial n} = q^*$ とする。

4. 境界積分方程式の離散化および応答係数の誘導

(8)式中に存在する三つの積分に関し離散化を行なうた

め、時間帯 (t_0, t) を時間間隔 Δt によって n 分割し、 $t_{k-1} < \tau \leq t_k$ において θ, q を一定とする。また、境界および領域もそれぞれ m_1, m_2 の要素に分割し、要素内では θ, q を一定と仮定すれば、

$$\begin{aligned} & a \int_{t_0}^{t_n} \int_{\Gamma_j} \theta(x, y, \tau) q^*(x-x', y-y', \tau-t_n) d\tau d\Gamma \\ &= \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{k=1}^n \theta(x_j, y_j, t_k) \left\{ a \int_{t_{k-1}}^{t_k} q^*(x-x', y-y', \right. \\ & \quad \left. t_k-t_n) d\tau d\Gamma \right\} \dots\dots\dots(9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & a \int_{t_0}^{t_n} \int_{\Gamma_j} q(x, y, \tau) \theta^*(x-x', y-y', \tau-t_n) d\tau d\Gamma \\ &= \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{k=1}^n q(x, y, t_k) \left\{ a \int_{t_{k-1}}^{t_k} \theta^*(x-x', y-y', \right. \\ & \quad \left. t_k-t_n) d\tau d\Gamma \right\} \dots\dots\dots(10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \theta(x, y, t_0) \theta^*(x-x', y-y', t_0-t_n) d\Omega \\ &= \sum_{s=1}^{m_2} \theta(x_s, y_s, t_0) \int_{\Omega} \theta^*(x-x', y-y', t_0-t_n) d\Omega \dots(11) \end{aligned}$$

次に、

$$\Phi_{\theta, ij, n-k} = a \int_{\Gamma_j} \int_{t_{k-1}}^{t_k} q^*(x-x', y-y', t_k-t_n) d\tau d\Gamma \dots\dots\dots(12)$$

$$\Phi_{q, ij, n-k} = a \int_{\Gamma_j} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \theta^*(x-x', y-y', t_k-t_n) d\tau d\Gamma \dots\dots\dots(13)$$

$$\Phi_{R, is} = \int_{\Omega} \theta^*(x-x', y-y', t_0-t_n) d\Omega \dots\dots\dots(14)$$

(12), (13), (14)式を用いて、(8)式を境界上において展開すれば、(但し、 $x'=x_i, y'=y_i$ とする。)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \theta(x_i, y_i, t_n) \\ &= \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{k=1}^n \theta(x_j, y_j, t_k) \Phi_{q, ij, n-k} + \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{k=1}^n q(x_j, y_j, \\ & \quad t_k) \Phi_{\theta, ij, n-k} + \sum_{s=1}^{m_2} \theta(x_s, y_s, t_0) \Phi_{R, is} \dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

(15)式は、次のように変形できる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \theta(x_i, y_i, t_n) \\ &= \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{k=0}^{n-1} \theta(x_j, y_j, t_{n-k}) \Phi_{q, ij, k} + \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{k=0}^{n-1} q(x_j, y_j, \\ & \quad t_{n-k}) \Phi_{\theta, ij, k} + \sum_{s=1}^{m_2} \theta(x_s, y_s, t_0) \Phi_{R, is} \dots\dots\dots(16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{m_1} \theta(x_j, y_j, t_n) \Phi'_{q, ij, 0} + \sum_{j=1}^{m_1} q(x_j, y_j, t_n) \Phi'_{\theta, ij, 0} \\ &= \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{k=1}^{n-1} \theta(x_j, y_j, t_{n-k}) \Phi_{q, ij, k} + \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{k=1}^{n-1} q(x_j, y_j, t_{n-k}) \\ & \quad \Phi_{\theta, ij, k} + \sum_{s=1}^{m_2} \theta(x_s, y_s, t_0) \Phi_{R, is} \dots\dots\dots(17) \end{aligned}$$

但し、

$$\begin{aligned} \Phi'_{q, ij, 0} &= -\Phi_{q, ij, 0} \quad (i \neq j \text{ の時}) \\ &= \frac{1}{2} - \Phi_{q, ij, 0} \quad (i = j \text{ の時}) \end{aligned}$$

これをマトリックス表示すれば、

$$\begin{aligned} [\Phi'_q]_0^B [\theta]_n^B + [\Phi'_\theta]_0^B [q]_n^B \\ = \sum_{k=1}^{n-1} [\Phi_q]_k^B [\theta]_{n-k}^B + \sum_{k=1}^{n-1} [\Phi_\theta]_k^B [q]_{n-k}^B + [\Phi_\theta]_n^R [\theta]_0^R \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(18)$$

但し、添字の B は境界要素，R は領域要素を示す。

(18)式を全境界において展開すれば次式が導かれる。

$$\begin{aligned} [\Phi'_q]_0^B [\theta]_n^B + [\Phi'_\theta]_0^B [q]_n^B \\ = \sum_{k=1}^{n-1} [\Phi_q]_k^B [\theta]_{n-k}^B + \sum_{k=1}^{n-1} [\Phi_\theta]_k^B [q]_{n-k}^B \\ + [\Phi_\theta]_n^R [\theta]_0^R \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(19)$$

(19)式は、過去の境界上の未知の温度および熱流が判っていれば、 t_n 時の温度および熱流が得られることを示している。境界上の未知の温度 θ および熱流 q を右辺に移せば、

$$\begin{aligned} [\theta]_n^B = \sum_{k=1}^{n-1} [\dot{\Phi}]_0^{-1} [\Phi_q]_k^B [\theta]_{n-k}^B \\ + \sum_{k=1}^{n-1} [\dot{\Phi}]_0^{-1} [\Phi_\theta]_k^B [q]_{n-k}^B + [\dot{\Phi}]_0^{-1} [\Phi_\theta]_n^R [\theta]_0^R \\ = \sum_{k=1}^{n-1} [\tilde{\Phi}_q]_k^B [\theta]_{n-k}^B + \sum_{k=1}^{n-1} [\tilde{\Phi}_\theta]_k^B [q]_{n-k}^B \\ + [\tilde{\Phi}_\theta]_n^R [\theta]_0^R \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(20)$$

すなわち、任意の時刻における未知の境界上の温度もしくは熱流は、過去の境界条件および領域内の温度分布の初期値に上記より求めた時系列応答係数マトリックス $[\tilde{\Phi}_\theta]_k^B$, $[\tilde{\Phi}_q]_k^B$, $[\tilde{\Phi}_\theta]_n^R$ を乗ずることにより求められる。

5. 温度および熱流に関する応答係数の算出

境界要素としては、図-1, 2 に示すような線形要素および円形要素が考えられる。(12), (13)式に示された係数を線形要素および円形要素について求めると次のようになる。

5.1. 線形要素の場合 (図-1 参照のこと)

$$\Phi_{q, ij, k} = \frac{1}{4\pi} \int_{r_j} \int_{z_1}^{z_2} \frac{e^{-z}}{z} dz d\Gamma \quad \dots\dots\dots(21)$$

$$\Phi_{\theta, ij, k} = \frac{1}{2\pi} \int_{r_j} \frac{D}{d} (e^{-z_2} - e^{-z_1}) dz d\Gamma \quad \dots\dots\dots(22)$$

但し、 $z_1 = d^2/4ak \Delta t$, $z_2 = d^2/4a(k+1) \Delta t$

5.2. 円形要素の場合 (図-2 参照のこと)

$$\Phi_{q, ij, k} = \frac{R}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{e^{-z}}{z} dz d\omega \quad \dots\dots\dots(23)$$

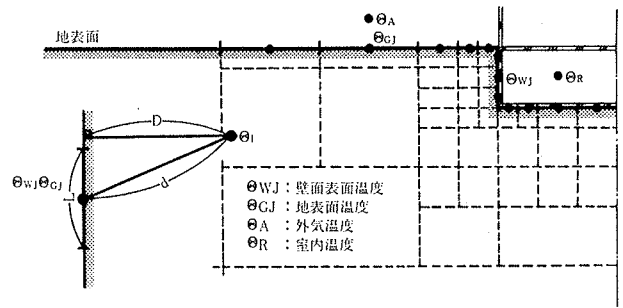


図-1 線形要素の線積分

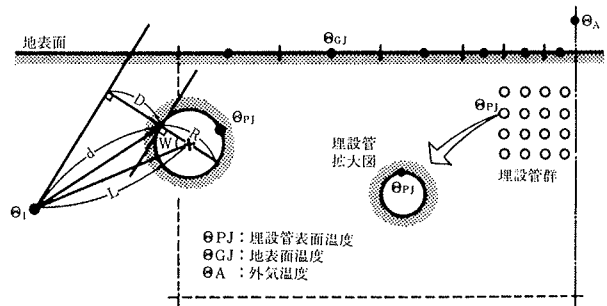


図-2 円形要素の線積分

$$\Phi_{\theta, ij, k} = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R}{d} (e^{-z_2} - e^{-z_1}) dz d\omega \quad \dots\dots\dots(24)$$

但し、 $D = L \cos \omega - \frac{R}{2}$

$$d^2 = \frac{R^2}{4} + L^2 - RL \cos \omega$$

6. 試算例

以上の理論を踏まえ、図-3 に示した簡略なモデルについて試算を行なった。すなわち、図-3 に示した肉厚 50cm のコンクリート壁体で内側表面が 100℃、外側表面が 20℃ に保たれている条件下における初期値が 20℃ で均一なコンクリート内温度分布の経時変化について上記算法を用いて試算を行なった。その結果を図-4, 5, 6, 7 に示す。なお、計算の時間間隔 Δt として 1 時間をとっている。

図-7 は、経過時間 240 時間における壁体内温度分布を示し、計算上すでに定常状態に達している。内点(6), (7)における温度ポテンシャルな一次元の定常状態における軀体内温度分布に比べ 2~3℃ 低くなっており、隅角部における温度低下の傾向が表われている。なお境界上の温度(1), (2), (3)を見ると一次元定常状態における軀体内温度分布に比べ 1℃ 前後低くなっているが、これは軀体内境界の設定条件 $q=0$ が若干妥当でないことに起因するものであり、算法上の誤差ではない。

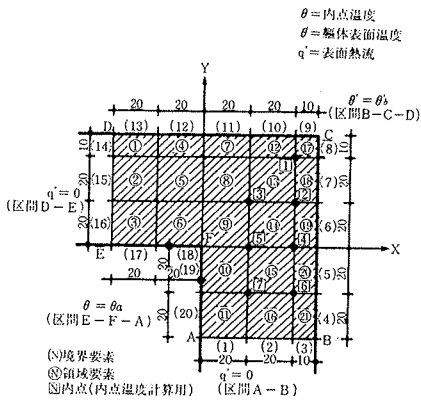


図-3 試算に用いた計算モデル

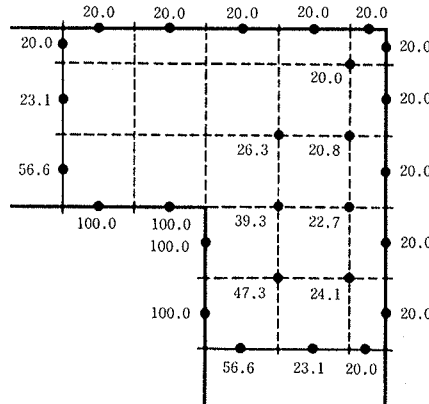


図-4 躯体内温度分布 (12時間経過後)

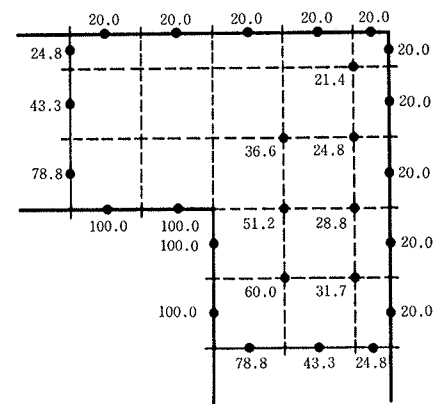


図-5 躯体内温度分布 (30時間経過後)

7. おわりに

本報にて導出した応答係数を用いれば、地中埋設管と地盤との間の熱授受、地下室空間と地盤との間の熱授受など比較的容易に解明できる。次報においては、この応答係数を用いて、上記の大規模温度領域について詳細なる計算を行ないその結果について報告する予定である。

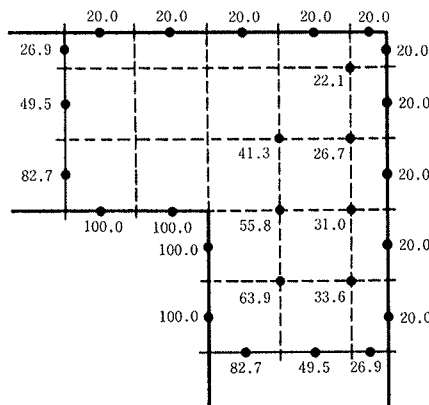


図-6 躯体内温度分布 (60時間経過後)

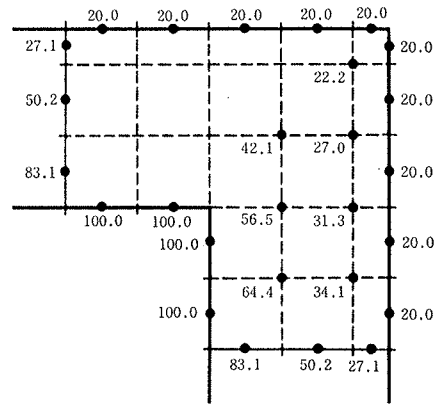


図-7 躯体内温度分布 (240時間経過後)