

# 大型海洋構造物に作用する波浪流体力解析法に関する研究（その2）

——境界要素法およびハイブリッド型有限要素法による解析法——

藤沢 康雄 武田 寿一 岡田 宏

## Study on Hydrodynamic Wave Loading Analysis Method for Large Offshore Structures (Part 2)

——Boundary Element Method and Hybrid Finite Element Method——

Yasuo Fujisawa Toshikazu Takeda Hiroshi Okada

### Abstract

Large offshore structures such as concrete gravity platforms always require evaluation of their safety since it is impossible for them to avoid extreme or survival conditions. Accurate estimates of hydrodynamic wave loads that act upon these structures is very important for their design, evaluation of safety, and actual use and serviceability. This paper describes a numerical procedure for hydrodynamic wave loading on large offshore structures of any three-dimensional shapes. Theoretical analysis of hydrodynamic wave loading is performed by the Boundary Element Method (B.E.M.) and Hybrid Finite Element Method (H.F.E.M.) in which the boundary value problems are solved numerically by the integral equation method and the eigenfunction expansion method, respectively. The results of these numerical procedures are compared with a model experiment and numerical results of the past studies and the applicability and adequacy of these numerical procedures are clarified.

### 概要

重力式コンクリートプラットフォームなど大型海洋構造物は、台風時、荒天時の回避が不可能なため、厳しい海象・気象条件下でも常にその安全性が要求されている。このような大型海洋構造物に作用する波浪流体力を精度良く推定することは、海洋構造物の設計上および安全性、稼動性を評価する上で極めて重要である。この研究は、大型海洋構造物（3次元任意形状）に作用する波浪流体力の解析法として、速度ポテンシャルの境界値問題を積分定理を用いて境界上の積分方程式として解析する境界要素法および解析プログラムを開発し、また固有関数展開を用いてハイブリッド変分原理により解析するハイブリッド型有限要素法および解析プログラムを用いて、モデル実験結果および既往研究の数値結果を比較、検討して解析手法の適用性と妥当性を明確にしたものである。

### 1. 序

重力式コンクリートプラットフォームなど大型海洋構造物は、通常の船舶と異なり台風時、荒天時の回避が不可能なため、厳しい海象・気象条件下でも常にその安全性が要求されている。このような大型海洋構造物に作用する波浪流体力は、従来の線形波理論のみならず高波高による非線形影響効果およびそれに伴う非線形波力解析法ならびに、複数の大型海洋構造物が隣接して設置された場合の波浪流体力の相互干渉影響などを正確に推定することが、海洋構造物の設計上および安全性、稼動性を評価する上で極めて重要である。この研究は、前報<sup>1)</sup>と同様に3次元任意形状の大型海洋構造物に作用する波浪

流体力の解析手法として、線形回折理論を用いて速度ポテンシャルの境界値問題を、積分定理を用いて境界上の積分方程式として解析する境界要素法と、固有関数展開を用いてハイブリッド変分原理により解析するハイブリッド型有限要素法による両解析法を用いてモデル実験結果および既往研究の数値解析結果と比較・検討し、この解析手法の適用性と妥当性を明らかにしたものである。

境界要素法は、従来微分方程式を解くための解析法で特に、Laplace方程式のような同次微分方程式では、積分方程式は境界上の境界積分方程式に帰着できるので、離散化は境界だけについて行なえば良いことになる。有限要素法による解析法は、Baiにより無限遠における散乱波の挙動を定める放射条件を定式化し無限領域問題を



$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left\{ \frac{\partial \varphi_d^{(m)}}{\partial r} + \left( \frac{1}{2r} + imk \right) \varphi_d^{(m)} \right\} = 0 \quad (r \rightarrow \infty) \quad \dots \dots \dots (20)$$

式(18)～式(20)に対して重みつき残差法で表しGreenの第1公式を2回適用すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} & \iint_S \{ \nabla^2 G^{(m)} + (mk)^2 G^{(m)} \} \varphi_d^{(m)} ds \\ &= \int_{\Gamma} \left( \varphi_d^{(m)} \frac{\partial G^{(m)}}{\partial n} - l^{(m)} G^{(m)} \right) d\Gamma \quad \dots \dots \dots (21) \end{aligned}$$

但し、 $\Gamma = \Gamma_s + \Gamma_R$  で、 $\Gamma_s$  上で  $l^{(m)} = -(\partial \varphi_i^{(m)} / \partial n)$ 、 $\Gamma_R$  上で  $l^{(m)} = -\{(1/2r) + imk\} \varphi_d^{(m)}$  となる。領域内の点  $i$  に単位の大きさの特異点があると、Helmholtz 方程式は、Dirac のデルタ関数を用いて次式のように表わせる。

$$\nabla^2 G^{(m)} + (mk) G^{(m)} + \delta_i = 0 \quad \dots \dots \dots (22)$$

上式の基本解を選ぶと、

$$\varphi_i^{(m)} = \int_{\Gamma} \left( l^{(m)} G^{(m)} - \varphi_d^{(m)} \frac{\partial G^{(m)}}{\partial n} \right) d\Gamma \quad \dots \dots \dots (23)$$

また、 $i$  点が境界上にあれば、

$$\frac{1}{2} \varphi_i^{(m)} = \int_{\Gamma} \left( l^{(m)} G^{(m)} - \varphi_d^{(m)} \frac{\partial G^{(m)}}{\partial n} \right) d\Gamma \quad \dots \dots \dots (24)$$

と表わせる。さらに、式(22)の基本解は、

$$G^{(m)} = \frac{1}{4i} H_0^{(2)}(mk r_{ij}) \quad \dots \dots \dots (25)$$

但し、 $r_{ij} = \{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2\}^{1/2}$  となる。これを式(24)に代入して、 $\Gamma_R$  上の積分を考えると最終的に次式の境界積分方程式を得る。

$$\begin{aligned} 2i \varphi_i^{(m)} &= - \int_{r_s} \left[ \frac{\partial \varphi_i^{(m)}}{\partial n} H_0^{(2)}(mk r_{ij}) \right. \\ &\quad \left. + \varphi_d^{(m)} \frac{\partial}{\partial r} \{ H_0^{(2)}(mk r_{ij}) \} \right] d\Gamma \quad \dots \dots \dots (26) \end{aligned}$$

ここに、 $H_0^{(2)}$  は 0 次の第2種ハンケル関数を表わす。

以上より、全速度ポテンシャルが求まれば、高次項を考慮した Bernoulli の定理により各オーダーの変動波圧、波力が得られる。

## 2.2. ハイブリッド型有限要素法 (H.F.E.M.) による解析法

本解析法は、H. Chen & C. Mei によって示された無限遠での放射条件を満足する解析解を有限地点に設けられた仮想境界において、内部の F.E.M. に固有関数展開をハイブリッド変分原理を用いて接続し F.E.M. 領域ができるだけ小さくして解析する手法である<sup>5)</sup>。

**2.2.1. 境界値問題の定式化** 流体は非圧縮、渦無しの完全流体とする。入射波は微小振幅波に基づきすべての現象は調和運動をするものとし、その定常状態を論じる。これらの仮定により流体には、速度ポテンシャルが存在する。境界値問題の座標系を図-2 に示す。

速度ポテンシャルを  $\Phi = \phi e^{-i\omega t}$  とすると時間項独立のポテンシャル  $\phi$  は、次の基礎方程式および境界条件を満

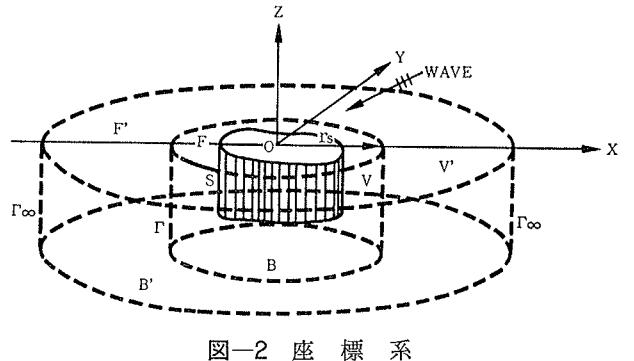


図-2 座標系

足する。

$$\nabla^2 \phi(x, y, z) = 0 \quad (\text{in } V) \quad \dots \dots \dots (27)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \phi = 0 \quad (\text{on } z=0) \quad \dots \dots \dots (28)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (\text{on } S) \quad \dots \dots \dots (29)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (\text{on } B) \quad \dots \dots \dots (30)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left\{ \frac{\partial \phi_d}{\partial r} - ik \phi_d \right\} = 0 \quad (r \rightarrow \infty) \quad \dots \dots \dots (31)$$

ここに、 $\phi_d$  は散乱波の速度ポテンシャルを表わす。 $k$  は波数を示す。全速度ポテンシャルは  $\phi = \phi_1 + \phi_d$  と表わせる。 $\phi_1$  は入射波の速度ポテンシャルを示す。図-2 に示したように、物体を半径  $r_s$  の仮想円筒状の境界で囲み、仮想境界外部の領域にダッシュを付けて表わす。上記の境界値問題と等価な汎関数は次式のように表わせる。

$$\begin{aligned} J(\phi) &= \iint_V \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 dV - \iint_F \frac{\omega^2}{2g} \phi^2 dF \\ &\quad + \iint_{\Gamma} \left[ \left( \frac{\phi_d'}{2} - \phi_d \right) \frac{\partial \phi'}{\partial r} - \frac{\phi_d'}{2} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right] d\Gamma \quad \dots \dots \dots (32) \end{aligned}$$

式(32)の第1項の積分は有限要素で示された流体の体積積分を表わし、第2項、第3項は自由表面および仮想境界  $\Gamma$  上の表面積分を表わす。仮想境界  $\Gamma$  の外部の全速度ポテンシャル  $\phi'$  と散乱波ポテンシャル  $\phi_d'$  ( $\phi_d' = \phi' - \phi_1$ ) は、次式を満足する。仮想境界  $\Gamma$  上において  $\phi$  と  $\phi'$  が等しければ次のように表わせる。

$$\phi = \phi' \quad (\text{on } \Gamma) \quad \dots \dots \dots (33)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial \phi'}{\partial r} \quad \dots \dots \dots (34)$$

仮想境界  $\Gamma$  の外部流体域  $V'$  において、一定水深とすると散乱波ポテンシャル  $\phi_d'$  は次の固有関数で表わせる。

$$\begin{aligned} \phi_d' &= \phi' - \phi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_{on} \cos n\theta + \beta_{on} \sin n\theta) \cosh k(z+h) \\ &\quad \cdot H_n^{(1)}(kr) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_{mn} \cos n\theta + \beta_{mn} \sin n\theta) \cosh k_m(z+h) \cdot K_n(k_m \cdot r) \quad \dots \dots \dots (35) \end{aligned}$$

ここに  $h$  は外部領域  $V'$  の一定水深を、  $H_n^{(1)}$  は  $n$  次の第 1 種ハンケル関数、  $K_n$  は  $n$  次の第 2 種変形ベッセル関数を表わす。また  $k$ 、  $k_m$  は次の分散関係式の正実根を表わす。

$$\omega^2 = gk \tanh kh \quad \dots \dots \dots (36)$$

$$\omega^2 = -gk_m \tan k_m h \quad \dots \dots \dots (37)$$

式(32)の第 1 変分を考え、 Green の公式を用いると次式のように表わせる。

$$\begin{aligned} \delta J(\phi) = & - \iiint_V V^2 \phi \delta \phi dV + \iint_F \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \phi \right) \delta \phi dF \\ & + \iint_B \frac{\partial \phi}{\partial n} \delta \phi dB + \iint_R \left\{ \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\partial \phi'}{\partial r} \right) \delta \phi \right. \\ & \left. - (\phi - \phi') \cdot \frac{\partial \delta \phi'}{\partial r} \right\} dI' \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (38)$$

この方法では、図-3 に示すような 20 個の外面節点を有するアイソパラメトリック六面体要素と二次の挿入関数を用いた。式(32)の各積分を図-3 の要素で分割し実施すると、最終的に全体マトリックとして次のように表わせる。

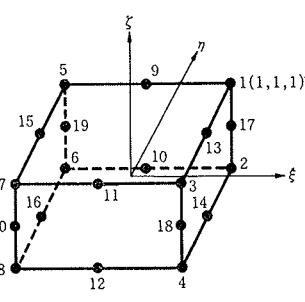


図-3 20節点六面体要素

$$\begin{aligned} J(\{\phi\}, \{\mu\}) = & \frac{1}{2} \{\phi\}^T [K_V] \{\phi\} + \frac{1}{2} \{\phi\}^T [K_F] \{\phi\} \\ & + \frac{1}{2} \{\mu\}^T [K_D] \{\mu\} + \frac{1}{2} \{\mu\}^T [K_c]^T \{\phi\} \\ & + \frac{1}{2} \{\phi\}^T [K_c] \{\mu\} - \{Q_c\}^T \{\mu\} \\ & - \{Q_p\}^T \{\mu\} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (39)$$

ここに、  $\{\phi\}$  は速度ポテンシャルベクトル、  $[K_V]$ 、  $[K_F]$  は体積積分、自由表面積分のマトリックス、  $[K_c]$ 、  $[K_D]$  は  $J(\phi)$  の積分のマトリックス、  $\{Q_c\}$ 、  $\{Q_p\}$  は  $J(\phi)$  積分のベクトルを、  $\{\mu\}$  は未知係数ベクトルを表わす。最終的には次のような連立一次方程を得る。

$$[K] \{\phi\} = \{Q\} \quad \dots \dots \dots (40)$$

ここに、  $[K]$  は全体マトリックス、  $\{\phi\}$  は未知係数ベクトル、  $\{Q\}$  は全荷重ベクトルを表わす。以上より境界値問題の解が得られれば、 Bernoulli の定理より変動圧力、波力を得られる。

### 3. 解析結果と考察

#### 3.1. 境界要素法 (B.E.M.) の解析結果

3.1.1. 鉛直円柱に作用する波力 鉛直円柱に作用する波力は、 MacCamy & Fuchs により厳密解が示されているので、本解析法の妥当性を検証するため比較した。図-4 にその結果を示す。解析条件は、水深・半径比  $h/a = 1.16$ 、無次元周波数  $kr = 0.2 \sim 3.0$  の範囲とし本解析

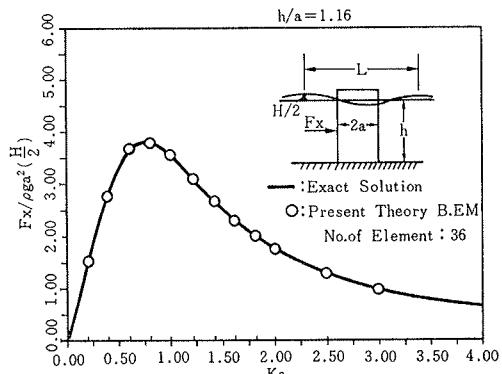


図-4 鉛直円柱に作用する波力 (1 次成分波力)

法の結果を○印で示した。境界要素数は 36 要素に分割し解析した。

この解析結果と厳密解は全周波数で良く一致する。両者の数値結果を比べると長周期側で 1.3% 程度 B. E. M. が大きな値となった。これは要素分割数によるものであるが、計算精度は実用上十分である。

3.1.2. 四角柱状体に作用する波力 四角柱状体に作用する波力は、既往研究論文も少なく実験値もばらつくことが多い。これは四角柱状体に波が入射すると、各頂部で散乱現象が激しく周辺の流場がかなり乱されるためである。図-5 に Hogben らが 3 次元ソース分布法で実施した結果に本解析結果を○印で示す。境界要素数は 40 要素に分割し解析した。解析結果は全周波数で良く一致する。波力ピーク付近で、B.E.M. 結果が若干小さい値となったが、この解析法で十分精度良く推定することができる。

3.1.3. 任意形状柱状体に作用する波力 任意形状柱状体として図-6 に示すような花弁形状体モデルの解析を行なった。花弁形状モデルは浅海型重力式プラットフォームを想定している。実験は 1/100 モデルを 3 次元平面水槽内に設置し、波力を計測した。図-6 に実験結果とこの解析結果を示す。実験条件は  $h/a = 0.5$ 、水深 20 cm 波高 4 cm の線形波理論の範囲のものである。境界要素数はモデル形状を十分表現するため 60 要素分割で解析した。実験値と解析結果は良く一致している。 $Ka = 4.0$  付近で小さなピークを生じているが、これは短周期域での解析モデル形状固有の現象と思われる。

#### 3.2. ハイブリッド型有限要素法 (H.F.E.M.) の解析結果

3.2.1. 鉛直円柱に作用する波力 MacCamy & Fuchs の厳密解と H.F.E.M. 結果を比較した。解析条件は、水深・半径比  $h/a = 1.16$ 、 $Ka = 0.2 \sim 2.0$  の範囲とした。解析モデルの仮想境界は、円柱中心より  $1.8a$  とした。有限要素数は 36 要素 (円周方向 18 分割、深さ方向 2 分割)、節点数 342 点で解析した。図-7 に鉛直円柱に作用する波力を示す。図より本解析結果は、全周波数域で厳

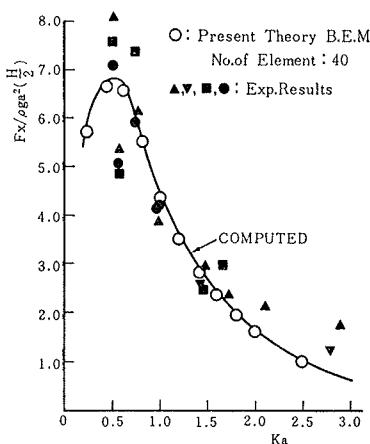


図-5 四角柱状体に作用する波力（1次波力成分）

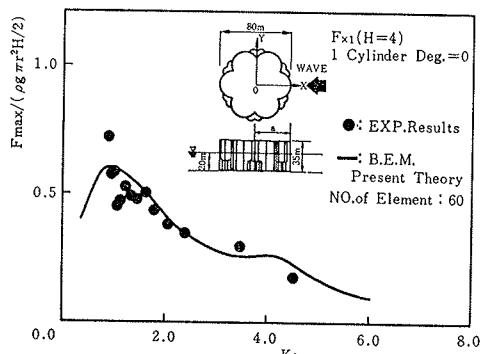


図-6 任意形状柱状体に作用する波力（1次成分波力）

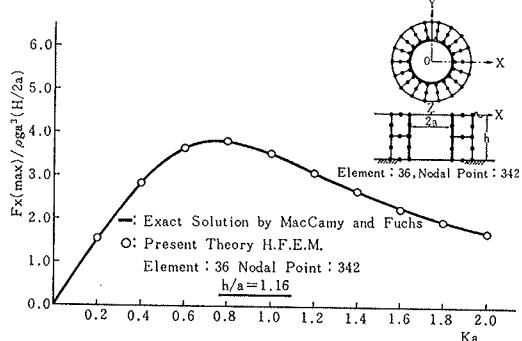


図-7 鉛直円柱に作用する波力

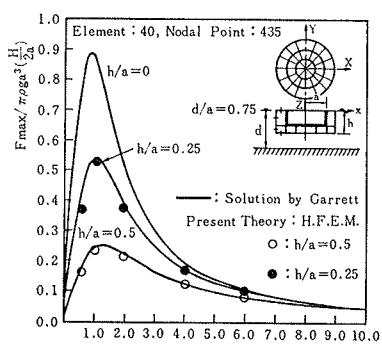


図-8 浮遊式円柱に作用する波力

密解と良く一致する。従って十分な解析精度で波力を推定することができる。

**3.2.2. 浮遊式円柱に作用する波力** 浮遊式円柱に作用する波力は、入射波の散乱による Diffraction force と円柱の運動によって生じる Radiation force が作用するが、この解析では、円柱が流体中に固定されている場合の Diffraction force について、Garrett の解析解<sup>6)</sup>との解析法を比較した。解析条件は、水深・半径比  $h/a = 0.25, 0.5, Ka = 0.5 \sim 6.0$  の範囲とした。解析モデルは、円柱中心より  $1.5a$  のところに仮想境界を設けた。要素分割数は40要素、節点数は435点とした。図-8に、浮遊式円柱に作用する波力を示す。図より、 $h/a = 0.25, 0.5$ とも全周波数域で解析解と良く一致している。従って、この解析法で十分な解析精度で波力を推定することができる。

#### 4. 結論

境界要素法は、柱状体形状の構造物では計算時間も短く、十分な精度で波力を推定でき、またハイブリッド型有限要素法は、仮想境界を設けることにより有限領域を少なくて、波力を精度良く推定できることを確認した。

#### 謝 辞

この研究に際し、モデル実験など御指導して頂いた日本大学理工学部加藤 渉教授、西条 修教授、増田光一講師に心より謝意を表します。

#### 参考文献

- 1) 武田、岡田、藤沢：大型海洋構造物に作用する波浪流体力解析法に関する研究—3次元ソース分布法—，大林組技術研究所報，No. 31, (1985), pp. 36~40
- 2) S. K. Chakrabarti: Nonlinear Wave Force on Vertical Cylinder, Journal of the Hydraulic Division, Proceeding of ASCE, HY11, (1972), pp. 1895~1909
- 3) 鯉登孝、他：海洋構造物に作用する非線形波力、波圧に関する研究、(第1報)～(第4報)，日本建築学会大会学術講演梗概集、(昭和58. 9), pp. 2885~2892
- 4) L. Skjelbria, J. Hendrickson: Fifth Order Gravity Wave Theory, Proceeding of 7-th Conference on Coastal Engineering, Vol. 1, Chapter 10, (1961), pp. 184~196
- 5) H. S. Chen, C. C. Mei: A Hybrid Element Method for Diffraction of Water Waves by Three-Dimensional Bodies, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 12, (1978), pp. 245~266
- 6) C. Garrett: Wave forces on a circular dock, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 46, (1971), pp. 129~139