

# 実体波が斜め入射する場合の 成層自由地盤の応答変位の計算方法とその応用

安井 讓                      高野 真一郎                      宮本 明倫  
栗本 修                      (本社 電子計算センター)                      (本社 原子力本部技術部)  
武田 寿一

## A Method to Calculate the Response of Layered Half-space Subjected to Obliquely Incident Body Waves and its Application

Yuzuru Yasui                      Shin-ichiro Takano                      Akinori Miyamoto  
Osamu Kurimoto                      Toshikazu Takeda

### Abstract

Methods by Haskell-Thomson and Chen et al. are frequently used to calculate the response of layered half-space soil subjected to obliquely incident body waves. In this paper the authors propose an alternative for the above methods. Loads by dashpot effects and external load effects of input waves at the interface between layered and lower half-space soil are added in this method to the load-displacement equation matrix which is derived through the Thin Layer Element Method. The displacement field is obtained by solving the linear equation directly. This method is sophisticated and comprehensive in formulations, and matrix operations are easy. The displacement field obtained is utilized in the substructure analysis method for soil-structure interaction problems. Numerical examples on effective input motions of foundations in case of obliquely incident SH waves are presented to illustrate the use of the method.

### 概 要

成層自由地盤に実体波が斜め入射するときの地盤の応答変位を計算する手法として Haskell-Thomson による手法とか Chen, et al.による手法がよく知られているが、本論文ではこれらの手法とは異なる簡便な計算方法を提案する。この手法は、実体波が斜め入射するときの成層地盤最下面に働く応力、即ち斜め入射に対するダッシュポット効果と入射波の外力効果に相当する力を求め、これを薄層要素法により離散化して構成した変位と力の関係式に適用することにより直接的に成層地盤の変位場を求める方法である。この手法は、マトリクス操作が簡単で物理的にも理解しやすいものとなっている。本論文ではこの解析手法の定式化について述べるとともに、サブストラクチャー法への応用方法について触れ、さらに SH 波が斜め入射する場合の基礎の有効入力動についての計算例を示す。

### 1. はじめに

成層自由地盤に実体波が斜め入射するときの地盤の応答変位を計算する手法として、Haskell-Thomson<sup>1),2)</sup>による手法がよく知られている。Haskell-Thomson は各層地盤の上下端の変位・応力を伝達マトリクスを用いて関係付け、これを層ごとにつなげ合わせ、境界条件を適用することにより、半無限層と自由地盤との間の変位関係を求めている。

本論文では、上記の手法とは異なる新しい手法を提案する。この手法では、成層地盤を深さ方向に薄層分割して離散化表示した各境界面での変位と力との間を関係付ける剛性マトリクスを用いる。次に、実体波が斜め入射するときの、成層地盤の最下層の下面に働く応力を評価す

る。この応力は斜め入射に対応するダッシュポット効果と入射波の外力効果とみなすことができる。この応力を上記の剛性マトリクスに導入して成層地盤の変位場を算定する。この手法は、Chen, et al.<sup>3)</sup>らの薄層要素法を用いる同種の手法と比較して、半無限層内の反射波の成分を求めることなく入射波のみから直接計算することができるという利点を有している。このためマトリクスの操作が簡単で、物理的にも理解しやすい手法となっている。この手法を用いて計算された成層自由地盤の応答変位は地盤と構造物の動的相互作用解析に応用することができる。本論文ではサブストラクチャー法に適用し SH 波が斜め入射するときの基礎有効入力動を算定した結果を示す。

## 2. 解析手法

### 2.1. 半無限層に働く応力についての定式化

図-1のように半無限層を持つ成層地盤を考える。半無限層における変位ベクトル  $U$  と応力ベクトル  $S$  を次のように定義する。

$$U = \{u_x, u_y, iu_z\} \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$S = \{\tau_{xz}, \tau_{yz}, i\sigma_z\} \quad \dots\dots\dots(2)$$

半無限層での波動を平面波と仮定すると  $U, S$  は次のように表される。

$$\begin{Bmatrix} U \\ S \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{U} \\ \bar{S} \end{Bmatrix} \exp i(\omega t - kx - ly) \quad \dots\dots\dots(3)$$

ここで、 $\omega$  は円振動数を表し、 $k, l$  はそれぞれ  $x$  方向、 $y$  方向の波数を表す。以下では簡単のため、波動は  $x-z$  面に伝播するものとして  $l=0$  とする。また、 $\bar{U}, \bar{S}$  は  $z$  のみの関数であり次のように表される。

$$\bar{U} = \{\bar{u}_x, \bar{u}_y, i\bar{u}_z\} \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$\bar{S} = \{\bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}, i\bar{\sigma}_z\} \quad \dots\dots\dots(5)$$

Kausel and Roesset<sup>4)</sup>によると、半無限層と成層地盤の境界面の変位ベクトル  $\bar{U}|_{z=0}$  と応力ベクトル  $\bar{S}|_{z=0}$  の間には剛性マトリクス  $K$  を介して次の関係がある。

$$\bar{S}|_{z=0} = K \bar{U}|_{z=0} \quad \dots\dots\dots(6)$$

ここで、剛性マトリクス  $K$  は下降波(逸散波)成分に対して次のように表される。まず、 $P$  波、 $SV$  波の場合は、 $x, z$  方向成分のみを取り出して、

$$K_1 = 2kG \left( \frac{1-s^2}{2(1-rs)} \begin{bmatrix} r & 1 \\ 1 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \quad \dots\dots\dots(7)$$

一方、 $SH$  波の場合は、 $y$  方向成分のみを取り出して、

$$K_1 = ksG \quad \dots\dots\dots(8)$$

ここに、

$$r = \sqrt{1 - (\omega/kV_p)^2} \quad \dots\dots\dots(9)$$

$$s = \sqrt{1 - (\omega/kV_s)^2} \quad \dots\dots\dots(10)$$

また、 $G$  は半無限層の剪断弾性係数、 $V_s, V_p$  はそれぞれ半無限層の  $S$  波速度、 $P$  波速度を表す。

一方、上昇波(入射波)成分に対しては  $r, s$  の符号が逆になり、従って剛性マトリクス  $K$  は次のようになる。 $P$  波、 $SV$  波の場合は、

$$K_0 = 2kG \left( \frac{1-s^2}{2(1-rs)} \begin{bmatrix} -r & 1 \\ 1 & -s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \quad \dots\dots\dots(11)$$

$SH$  波の場合は、

$$K_0 = -ksG \quad \dots\dots\dots(12)$$

これらの剛性マトリクスを用いることにより、応力ベクトル  $\bar{S}|_{z=0}$  は、入射波による変位成分  $\bar{U}_0|_{z=0}$  と反射波及び成層地盤からの透過波による変位成分  $\bar{U}_1|_{z=0}$  によって次のように表される。

$$\begin{aligned} \bar{S}|_{z=0} &= K_0 \bar{U}_0|_{z=0} + K_1 \bar{U}_1|_{z=0} \\ &= -(K_1 - K_0) \bar{U}_0|_{z=0} \\ &\quad + K_1 (\bar{U}_1|_{z=0} + \bar{U}_0|_{z=0}) \end{aligned}$$

半無限層での全変位を  $\bar{U}$  と表すと、上式は次のようにも書ける。

$$\bar{S}|_{z=0} = -F + K_1 \bar{U}|_{z=0} \quad \dots\dots(13.a)$$

$$F = (K_1 - K_0) \bar{U}_0|_{z=0} \quad \dots\dots(13.b)$$

ここで、 $F$  は入射波のみに依存する項である。入射平面波が与えられると、 $F$  は次のように求められる。入射  $P$  波、 $SV$  波は、次のようなポテンシャル関数を用いて表現される。

$$\begin{Bmatrix} \phi \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha \exp(krz) \\ \gamma \exp(ksz) \end{Bmatrix} \exp i(\omega t - kx) \quad \dots\dots(14)$$

ここで、 $\alpha, \gamma$  は振幅を表す定数である。このポテンシャル関数による変位成分  $U_0$  は、次のように表される。

$$U_0 = \begin{Bmatrix} u_{0x} \\ iu_{0z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & -\partial/\partial z \\ i\partial/\partial z & i\partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \\ \psi \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(15)$$

(15)式に(14)式を代入することにより次を得る。

$$\begin{aligned} U_0 &= \begin{Bmatrix} u_{0x} \\ iu_{0z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -ik & -ks \\ ikr & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \exp(krz) \\ \gamma \exp(ksz) \end{Bmatrix} \\ &\quad \cdot \exp i(\omega t - kx) \quad \dots\dots\dots(16) \end{aligned}$$

従って、

$$\bar{U}_0 = \begin{Bmatrix} \bar{u}_{0x} \\ i\bar{u}_{0z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -ik & -ks \\ ikr & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \exp(krz) \\ \gamma \exp(ksz) \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots(17)$$

上式を用いると  $P$  波、 $SV$  波の場合の  $F$  は(13.b)式より

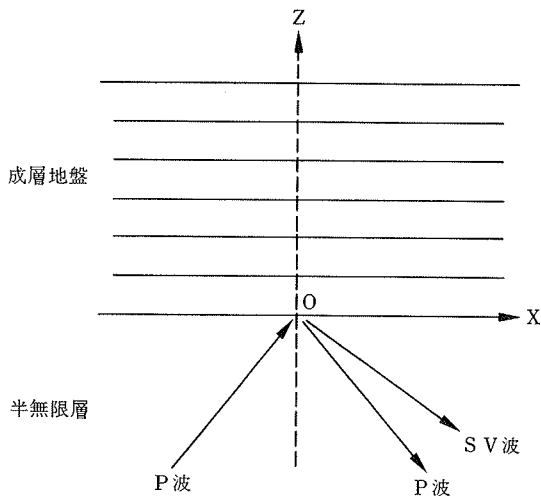


図-1 モデル図

次のように求められる。

$$F = 2k^2 G \frac{1-s^2}{1-rs} \begin{bmatrix} -ir & -rs \\ irs & s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots(18)$$

一方、入射 SH 波の変位成分  $U_0$  は、次のように表される。

$$U_0 = u_{0y} = \beta \exp(ksz) \exp i(\omega t - kx) \quad \dots\dots\dots(19)$$

ここで、 $\beta$  は振幅を表す定数である。従って、

$$\bar{U}_0 = \bar{u}_{0y} = \beta \exp(ksz) \quad \dots\dots\dots(20)$$

これより、SH 波の場合の  $F$  が次のように得られる。

$$F = 2ksG \cdot \beta \quad \dots\dots\dots(21)$$

2.2. 斜め入射による成層地盤の変位の計算方法

成層地盤が薄層法によって  $n$  個の薄層に離散化されているとき、各薄層間における節点変位  $\{\bar{U}\}$  と節点力  $\{\bar{P}\}$  の間の関係は次のように表される<sup>4)</sup>。

$$(Ak^2 + Bk + G - \omega^2 M) \{\bar{U}\} = \{\bar{P}\} \quad \dots\dots\dots(22)$$

ここで、

$$\{\bar{U}\} = \begin{Bmatrix} \bar{U}_1 \\ \vdots \\ \bar{U}_{n+1} \end{Bmatrix} \quad \{\bar{P}\} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \vdots \\ \bar{P}_{n+1} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots(23)$$

$\bar{U}_j, \bar{P}_j$  は各々第  $j$  薄層境界における節点変位及び節点力を表すベクトルであり、次のような成分を持つ。

$$U_j = \begin{Bmatrix} \bar{U}_x^j \\ \bar{U}_y^j \\ i \bar{U}_z^j \end{Bmatrix} \quad P_j = \begin{Bmatrix} \bar{P}_x^j \\ \bar{P}_y^j \\ i \bar{P}_z^j \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots(24)$$

$j = 1, \dots, n+1$

また、 $A, B, G, M$  は各薄層における係数マトリクス  $A_j, B_j, G_j, M_j$  を重ね合わせたものである。これらの係数マトリクスは、表-1 のように与えられる。

(13)式で与えられる応力  $\bar{S}$  を、成層地盤の最下面に働く

節点力  $\bar{P}_{n+1}$  として与え、 $\bar{U}_0|_{z=0} = \bar{U}_{n+1}$  とすることにより、成層地盤に実体波が斜め入射する状態をモデル化することができる。すなわち、

$$\bar{P}_{n+1} = -\bar{S} = F - K_1 \bar{U}_{n+1} \quad \dots\dots\dots(25)$$

$$\bar{P} \phi = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

従って、(22)式は次のように表される。

$$(Ak^2 + Bk + G - \omega^2 M) \begin{Bmatrix} \bar{U}_1 \\ \vdots \\ \bar{U}_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ F - K_1 \bar{U}_{n+1} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots(26)$$

ここで、右辺の変位に依存する項を左辺に移行することにより次式が得られる。

$$(Ak^2 + Bk + G - \omega^2 M + K^W) \begin{Bmatrix} \bar{U}_1 \\ \vdots \\ \bar{U}_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ F \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots(27)$$

ここで  $K^W$  は、マトリクス  $K_1$  を全体マトリクスに拡張したものを表す。鉛直入射すなわち  $k=0$  の場合、(7)式 ~ (10)式及び  $G = \rho V_s^2$  であることを用いると、マトリクス  $K_1$  は次のように表される。

$$K_1 = \begin{bmatrix} i\omega\rho V_s & 0 & 0 \\ 0 & i\omega\rho V_s & 0 \\ 0 & 0 & i\omega\rho V_p \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(28)$$

従って鉛直入射の場合には、(27)式の  $K^W$  はダッシュポットの効果を表している。この意味で、斜め入射の場合の  $K^W$  は、斜め入射に対応するダッシュポット効果とみな

$A_j = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2(\lambda+2G) & \cdot & \cdot & (\lambda+2G) & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2G & \cdot & \cdot & G & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2G & \cdot & \cdot & G \\ (\lambda+2G) & \cdot & \cdot & 2(\lambda+2G) & \cdot & \cdot \\ \cdot & G & \cdot & \cdot & 2G & \cdot \\ \cdot & \cdot & G & \cdot & \cdot & 2G \end{bmatrix}$	$B_j = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \lambda-G & \cdot & \cdot & -(\lambda+G) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda-G & \cdot & \cdot & \lambda+G & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \lambda+G & \cdot & \cdot & -(\lambda-G) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -(\lambda+G) & \cdot & \cdot & -(\lambda-G) & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$
$G_j = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} G & \cdot & \cdot & -G & \cdot & \cdot \\ \cdot & G & \cdot & \cdot & -G & \cdot \\ \cdot & \cdot & \lambda+2G & \cdot & \cdot & -(\lambda+2G) \\ -G & \cdot & \cdot & G & \cdot & \cdot \\ \cdot & -G & \cdot & \cdot & G & \cdot \\ \cdot & \cdot & -(\lambda+2G) & \cdot & \cdot & \lambda+2G \end{bmatrix}$	$M_j = \frac{\rho h}{6} \begin{bmatrix} 2 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 2 \end{bmatrix}$

$h$  : 薄層厚  
 $\rho$  : 単位体積質量  
 $G$  : せん断弾性係数  
 $\lambda$  : ラメの定数

表-1 各薄層の係数マトリクス

すことができる。 $\{U\}$  は、(27)式のマトリクス方程式を解くことにより計算される。実際の変位は、平面波を仮定すると次のようになる。

$$\{U\} = \{\bar{U}\} \exp i(\omega t - kx) \quad \dots\dots\dots(29)$$

### 3. サブストラクチャー法への応用方法

#### 3.1. インピーダンス・マトリクスの計算

切欠きのある地盤の動的剛性マトリクス  $K_g$  を次のように求めることにする<sup>9)</sup>。

$$K_g = K_g^f - K_g^e \quad \dots\dots\dots(30)$$

ここで、 $K_g^f$  は点加振薄層法によって計算された切欠きのない地盤の動的剛性マトリクスであり、 $K_g^e$  は有限要素法により計算された地盤の切欠き部分の動的剛性マトリクスである。剛基礎の6×6インピーダンス・マトリクス  $K_I$  は、 $K_g$  を用いて次のように計算される。

$$K_I = N^T K_g N \quad \dots\dots\dots(31)$$

ここで、 $N$  は各節点と運動の基準点を関係付けるマトリクスを表す。また、 $N^T$  はマトリクス  $N$  の転置マトリクスを表す。

#### 3.2. 基礎有効入力の計算

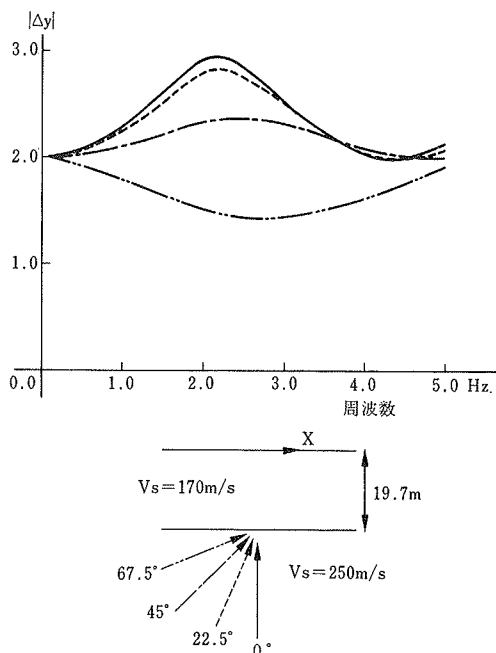
基礎有効入力ベクトル  $\{U^*\}$  は、次の6成分によって表される<sup>9)</sup>。

$$\{U^*\} = \{\Delta_x^* \Delta_y^* \Delta_z^* \phi_x^* \phi_y^* \phi_z^*\} \quad \dots\dots\dots(32)$$

有効入力ベクトルは、(30)式の動的剛性マトリクス  $K_g$  と(31)式のインピーダンス・マトリクス  $K_I$  を用いて次のように計算される。

$$\{U^*\} = K_I^{-1} (N^T K_g^{-1} \{U\} - \{T\}) \quad \dots\dots\dots(33)$$

ここで、 $\{T\}$  は切欠きのない自由地盤の基礎・地盤境界面

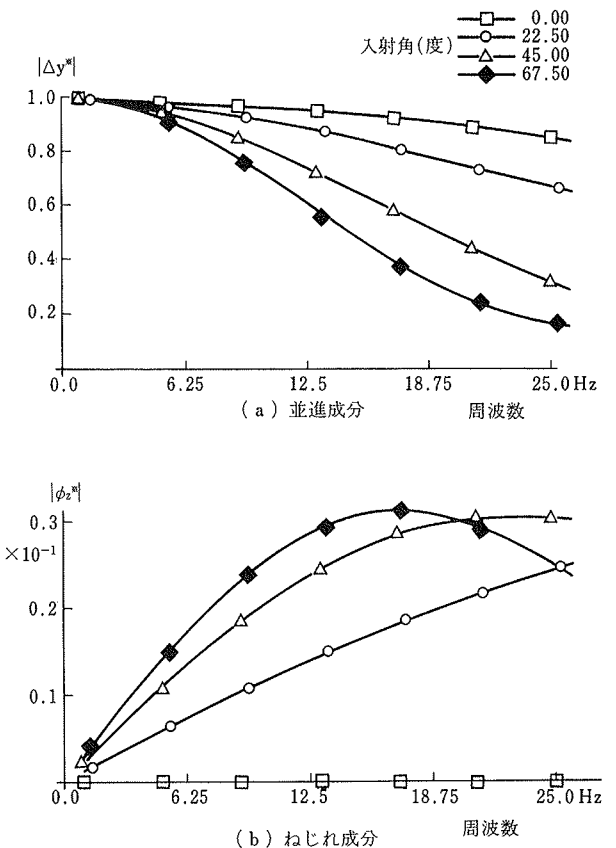


図一 2 地表面の変位振幅

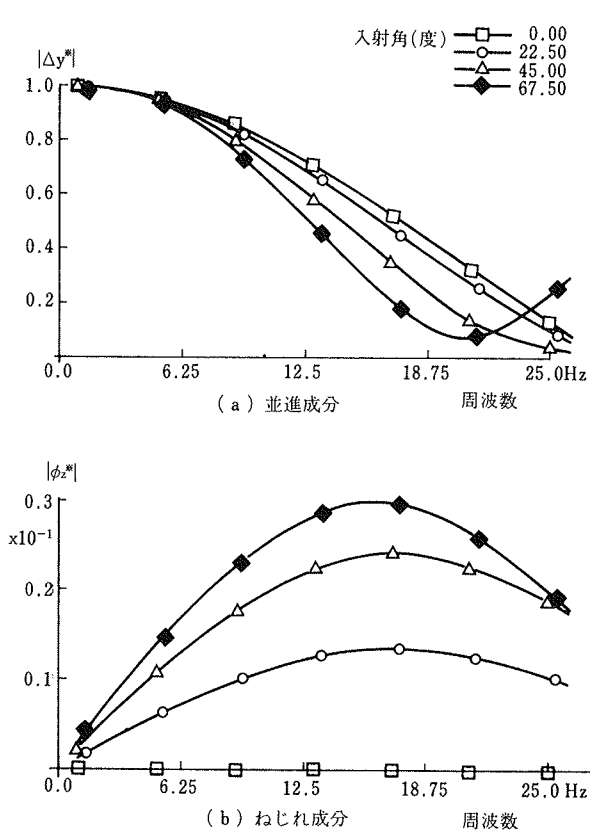
に生ずる合力及び剛モーメントを成分とするベクトルを表し、 $\{U\}$  は切欠きのない自由地盤の変位であり(29)式で与えられる。

### 4. 数値計算例

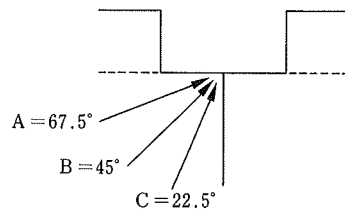
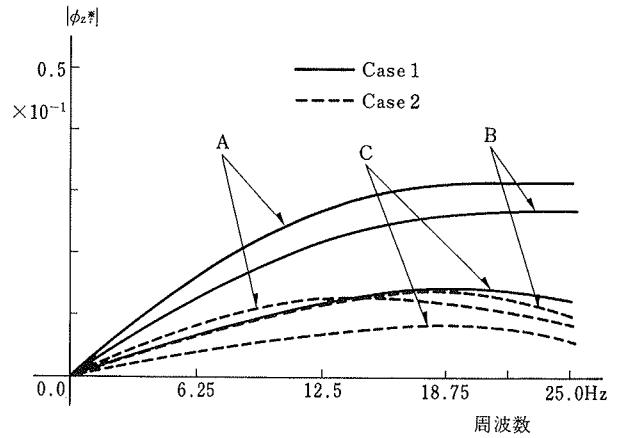
半無限層と表面層より成る2層地盤において、半無限層から振幅1の調和SH波が入射するときの地表面での変位振幅  $|\Delta_y|$  を振動数に対して計算した結果を図一2に示す。鉛直下方からSH波が入射したときの結果は重複反射理論のものと一致しており、本手法の妥当性が確かめられる。図一3に半無限弾性地盤上の正方形表面基礎に振幅0.5の調和SH波が入射するときの(a)y方向並進有効入力動  $|\Delta_y^*|$  と(b)ねじれ有効入力動  $|\Phi_z^*|$  を示す。ここで、地盤のS波速度を1000 m/s、材料減衰を0.5%、基礎の幅を40 mとした。入射角が大きくなるに従って並進有効入力動が減少すること、鉛直入射では見られなかったねじれ動が斜め入射によって引き起こされることが分かる。図一4には、半無限弾性地盤に埋めこまれた正方形基礎に振幅0.5の調和SH波が入射するときの、(a)y方向並進有効入力動  $|\Delta_y^*|$  と、(b)ねじれ有効入力動  $|\Phi_z^*|$  を示す。ここで、地盤の性状、基礎の形状は図一3のものと同じで、埋込深さを10 mとした。表面基礎の場合と比べると、鉛直入射の場合でも振動数が大きくなるに従つ



図一 3 半無限地盤地表面上基礎の有効入力動



図一4 半無限地盤に埋込まれた基礎の有効入力動



S 波 速 度		
	Case 1	Case 2
表層	1000m/s	1000m/s
半無限層	1000m/s	2000m/s

図一5 埋込み基礎のねじれ有効入力動

て並進有効入力動が減少しているのが分かる。図一5は、埋込基礎に SH 波が斜め入射する問題に関し、地盤が半無限の場合と 2 層地盤の場合について、ねじれ有効入力動  $|\Phi_z^*|$  を比較した結果を示したものである。Case 1 は S 波速度が 1000 m/s の半無限地盤に埋め込まれた正方形基礎による結果であり、Case 2 は、S 波速度が 2000 m/s の半無限層の上に S 波速度 1000 m/s、厚さ 10 m の表層地盤を持つ 2 層地盤に埋め込まれた正方形基礎に対する結果である。Case 1, 2 とも基礎幅を 20 m、埋込深さを 10 m とした。Case 2 の場合、基礎の埋込が比較的硬い半無限層にまで達しているために、ねじれ有効入力動  $|\Phi_z^*|$  の値が小さく抑えられることが分かる。

### 5. 結論

成層地盤に実体波が斜め入射するときの成層地盤内の変位を算定する方法を示し、数値計算によりその妥当性を確かめた。また、本手法の有効性を示すため、成層地盤に SH 波が斜め入射するときの基礎の有効入力動を算定し、その結果を示した。SH 波の斜め入射によって、振動数に依存する有効入力動のねじれ成分が生じること、また、2 層地盤で基礎が比較的硬い半無限層まで達している場合のねじれ有効入力成分は、半無限地盤のものに比べ小さな値をとることなどを確認した。

### 参考文献

- 1) Haskell, N. A. : The dispersion of surface waves on multilayered media, Bull. Seism. Soc. Am. Vol. 43, (1953), pp. 17~34
- 2) Thomson, W. T. : Transmission of elastic waves through a stratified soil medium, J. Appl. Phys. Vol. 21, (1950) pp.89~93
- 3) Chen, J., Lysmer, J., and Seed, H. B. : Analysis of local variations in free field seismic ground motion, EERC Reprot No. EERC-81/03, Univ. of Calif., Berkeley, (1981)
- 4) Kausel, E., and Roesset, J. M. : Stiffness matrix for layered soils, Bull. Seism. Soc. Am. Vol. 71, (1981) pp. 1743~1761
- 5) Waas, G., Riggs, H. R., and Werkle, H. : Displacement solution for dynamic loads in transversely isotropic stratified media, Earthquake Eng. Struct. Dyn. Vol. 13, (1985), pp. 173~193
- 6) 井口 : An approximate analysis of input motions for rigid embedded foundations, 日本建築学会論文報告集, 第315号, (1982), pp. 61~75