

有限要素法による不整形地盤の斜め入射波解析 (その2)

—P波およびSV波入射の場合—

石川 理都子 高野 真一郎
安井 讓

Finite Element Method for Obliquely Incident Seismic Wave Problems (Part 2)

—Cases of Incident P and SV Waves—

Ritsuko Ishikawa Shin-ichiro Takano
Yuzuru Yasui

Abstract

Formulations for a Finite Element Method effective in analyzing obliquely incident P and SV wave problems of an irregular soil deposit such as an alluvial valley are presented. The validities and usefulness were confirmed through the results of some numerical examples. It is noticed that in comparison with other similar methods, formulations of the proposed method are simple, and the programming stream is smooth and consistent using a Thin Layer Element Method and a Finite Element Method as the main methodologies.

概 要

本研究は、沖積谷などの不整形地盤に実体波が斜め入射する問題を有限要素法で取り扱うための解析式を提案するものであって、(その1)ではSH波入射の場合についてその解析式と計算例を示した。本報では、P波およびSV波の場合の解析式を示すとともに、作成したプログラムの精度を確認し、さらに任意形状の地盤の解析例を示した。この手法は、同様な他の手法に比べて定式化が容易であること、プログラムも薄層要素法と有限要素法を中心として一貫性を持って構成することができるなどの特色を有している。

1. はじめに

成層性や不整形性を有する複雑な地盤の地震応答解析を行なう手法として、有限要素法は非常に有効な離散化手法の一つであるが、地盤に仮想境界を設け、境界から外側の地盤の半無限性を評価できるような境界条件を与える必要がある。この仮想境界において、波動の逸散を適切に評価した力-変位関係と、自由地盤(不整形性を取り除いた均質な地盤)の応答変位および入射波による外力が既知であるならば、任意形状の地盤に地震波が斜め入射する場合についても有限要素法で解析可能であることが一般的に指摘されている¹⁾。

ところで筆者らの知る限りでは、既往の研究で地震波の斜め入射問題に有限要素法を適用し、かつ妥当な成果を収めているものは自由地盤が半無限一様である場合に限られると思われる。この理由の一つに、自由地盤が成層性を有する場合、一般に入射波による外力の算定が困難であり、非常に複雑な計算式となることがあげられる。

前報²⁾ではSH波入射の場合について、成層性や不整形性を有する任意の形状の地盤に実体波が斜め入射する問題を有限要素法で計算するための解析式を示した。この解析

式は、斜め入射の効果を単純なマトリクスの重ね合わせとして離散化したものを用いており、電子計算機のプログラミングに極めて有効で、そのプログラムを用いると、成層性や不整形性を有する地盤に実体波が斜め入射する問題を離散化手法で統一して計算することができる。本報告では、さらにP波およびSV波の場合についての解析式および数値計算例を示すこととする。

2. 解析方法

2.1 運動方程式

有限要素法を用いた解析において地盤の半無限性を表現するためには、一般に、図-1のように解析対象となる地盤を仮想境界に沿って不整形領域(有限要素領域)、側方層領域および下方半無限地盤に分割し、側方にはWaas³⁾の提案した波動伝達境界を、下方にはLysmer⁴⁾らの粘性境界を設ける方法がとられている。このとき、不整形領域での運動方程式は次のように表される。

$$([K] - \omega^2[M] + [R_s] + [R_b])\{U\} = \{P_s\} + \{P_b\} \quad \dots\dots\dots(1)$$

ここに、

- ω : 入射波の円振動数
- {U} : 不整形領域の節点変位ベクトル
- [K] : 不整形領域の剛性マトリクス
- [M] : 不整形領域の質量マトリクス
- [R_s] : 側方境界上での剛性マトリクス
- [R_B] : 底面境界上での剛性マトリクス
- {P_s} : 側方境界に加わる外力
- {P_B} : 底面境界に加わる外力

であり, [K], [M]は仮想仕事の原理から得られる各要素マトリクスを重ね合わせることによって求められる。また, 仮想境界上の剛性マトリクス[R_s], [R_B]は, 表-1のような境界上の各節点に関するサブマトリクスを重ね合わせたものを用いて次のように表される。

$$[R_s] = i[A][V][E][V]^{-1} + [B] \quad \dots\dots\dots (2a)$$

$$[R_B]_j = L_j \begin{bmatrix} R_0 & O \\ O & R_0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (2b)$$

ただし, [E], [V]はそれぞれ成層自由地盤における表面波の固有値と固有モードを表し, また,

- h_j : 第j層の層厚
- G_j : 第j層のせん断剛性

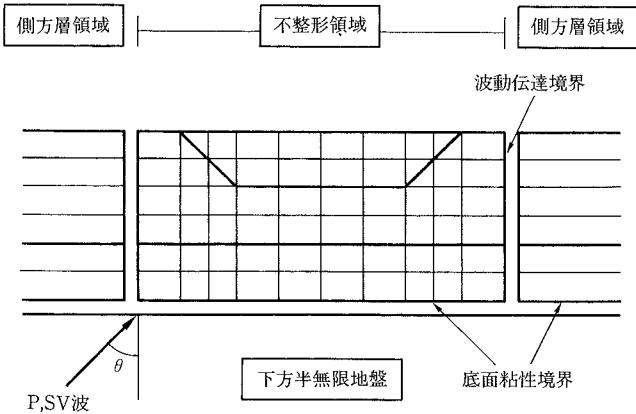


図-1 解析地盤の領域分割

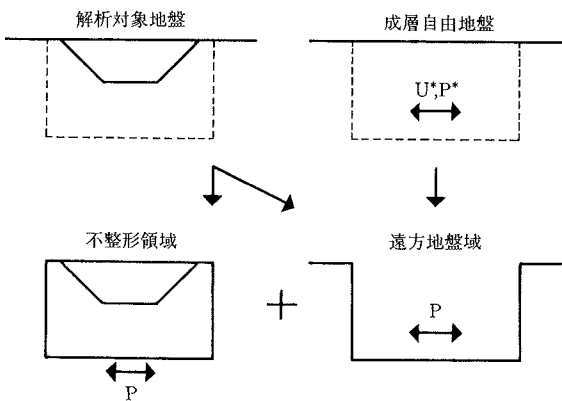


図-2 サブストラクチャー法

- λ_j : 第j層のラメの定数
 - ρ_j : 第j層の単位体積質量
 - L_j : 底面粘性境界に接する要素の半幅
- とする。また, 表-1の中に上式で用いていないものが含まれているが, 後の外力項の算定において必要となるものをまとめて示したものである。

2.2 境界面に作用する外力

次に, 仮想境界に働く外力を求めるための定式化を以下に示す。ここで説明の都合上以下の記号を定義しておく。

- i : $\sqrt{-1}$
- k : $\omega \sin \theta_p / V_p$ (P波入射)
- : $\omega \sin \theta_s / V_s$ (SV波入射)

表-1 境界上の節点に関するサブマトリクス

$$[A]_j = \frac{h_j}{6} \begin{bmatrix} 2(\lambda_j + 2G_j) & 0 & \lambda_j + 2G_j & 0 \\ 0 & 2G_j & 0 & G_j \\ \lambda_j + 2G_j & 0 & 2(\lambda_j + 2G_j) & 0 \\ 0 & G_j & 0 & 2G_j \end{bmatrix}$$

$$[B]_j = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \lambda_j & 0 & -\lambda_j \\ G_j & 0 & -G_j & 0 \\ 0 & \lambda_j & 0 & -\lambda_j \\ G_j & 0 & -G_j & 0 \end{bmatrix}$$

$$[C]_j = \frac{1}{h_j} \begin{bmatrix} G_j & 0 & -G_j & 0 \\ 0 & \lambda_j + 2G_j & 0 & -(\lambda_j + 2G_j) \\ -G_j & 0 & G_j & 0 \\ 0 & -(\lambda_j + 2G_j) & 0 & \lambda_j + 2G_j \end{bmatrix}$$

$$-\frac{\omega^2 \rho_j h_j}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_0 = i\omega\rho \begin{bmatrix} V_s & O \\ O & V_p \end{bmatrix}$$

$$D_0 = \frac{-i\omega\rho V_s}{\cos(\theta_p - \theta_s)} \begin{bmatrix} \cos\theta_p & -\sin\theta_p \\ \sin\theta_p & \frac{V_p}{V_s}\cos\theta_s \end{bmatrix} - 2i\omega\rho V_s \sin\theta_s \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

P波入射の場合

$$F_0 = \frac{2\omega^2 \rho}{\cos(\theta_p - \theta_s)} \begin{Bmatrix} \cos\theta_p \sin\theta_s \\ -\cos\theta_p \cos\theta_s \end{Bmatrix}$$

SV波入射の場合

$$F_0 = \frac{2\omega^2 \rho}{\cos(\theta_p - \theta_s)} \begin{Bmatrix} \cos\theta_s \cos\theta_p \\ \cos\theta_s \sin\theta_p \end{Bmatrix}$$

- x : 境界上の節点の水平座標
- V_p : 下方半無限地盤の P 波伝播速度
- V_s : 下方半無限地盤の S 波伝播速度
- θ_p : P 波の入射角または反射角
- θ_s : SV 波の入射角または反射角
- ρ : 下方半無限地盤の単位体積質量

図-2 に示すサブストラクチャー法の原理を用いると、不整形領域の境界上の節点に作用する外力 $\{P_s\}$, $\{P_B\}$ は、自由地盤の変位 $\{U^*\}$ と表面力 $\{P_s^*\}$, $\{P_B^*\}$ を用いて次のように表される。

$$\{P_s\} = \{P_s^*\} + [R_s]\{U^*\} \quad \dots\dots\dots (3a)$$

$$\{P_B\} = \{P_B^*\} + [R_B]\{U^*\} \quad \dots\dots\dots (3b)$$

また、 P_s^* , P_B^* は次式で表される。

$$\{P_s^*\} = [D_s]\{U^*\} \quad \dots\dots\dots (4a)$$

$$\{P_B^*\} = [D_B]\{U^*\} + \{F_B\} \quad \dots\dots\dots (4b)$$

ここで、単位振幅のポテンシャルをもつ P 波または SV 波が斜め入射するとき、(4)式中の $[D_s]$, $[D_B]$, $\{F_B\}$ は、表-1 のサブマトリクスを用いて以下のように与えられる。

$$[D_s]_j^L = ik[A]_j + [B]_j \quad \dots\dots\dots (5a)$$

$$[D_s]_j^R = -ik[A]_j - [B]_j \quad \dots\dots\dots (5a)$$

$$[D_B]_j = L_j \begin{bmatrix} D_0 & 0 \\ 0 & D_0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (5b)$$

$$\{F_B\}_j = L_j \begin{Bmatrix} F_0 \cdot e^{-ikx_1} \\ F_0 \cdot e^{-ikx_2} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (5c)$$

ただし、添字 L, R はそれぞれ左側と右側の境界を表し、 x_1 , x_2 は底面粘性境界に接する要素の両端の水平座標である。また、SV 波入射の場合には、

$$\sin \theta_s < \frac{V_s}{V_p} \quad \dots\dots\dots (6)$$

が上式の適用条件となる。

2.3 自由地盤の応答変位

(3)~(5)式で用いられている自由地盤の応答変位 $\{U^*\}$ は以下の運動方程式⁹⁾を解くことによって求められる成層地盤の応答変位 $\{U_0^*\}$ に水平方向の位相差 e^{-ikx} を考慮し、全自由度を有するベクトルに拡大することによって得られる。

$$([A]k^2 + i([B]^T - [B])k + [C] - [D_0])\{U_0^*\} = \{F_0\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで、上式中の $[A]$, $[B]$, $[C]$ は表-1 に示した各層間の節点に関するサブマトリクスを重ね合わせることによって与えられる。また、 $[D_0]$, $\{F_0\}$ は底面粘性境界上の節点に関する項を表-1 の値とし、その他の項を 0 としたものである。

3. 手法の妥当性の確認

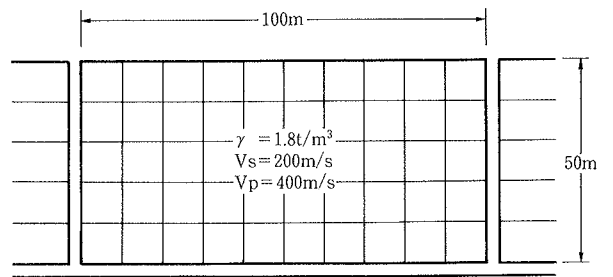
3.1 入射角に関する精度の確認

前章で紹介した手法の解析精度を確認するにあたり、まず図-3 に示すような半無限地盤および平行成層地盤に単位振幅の実体波を斜め入射し、有限要素領域の中央部における地表面の伝達関数を求めた。図-4 と図-5 はその結果を入射角を横軸にとって示したものであり、実線と点線は波動論を用いた理論解、○と△は解析結果を示す。また、(a)は P 波入射、(b)は SV 波入射の場合であるが、(6)式の条件より、SV 波入射については入射角 30° 以内の結果のみを示した。

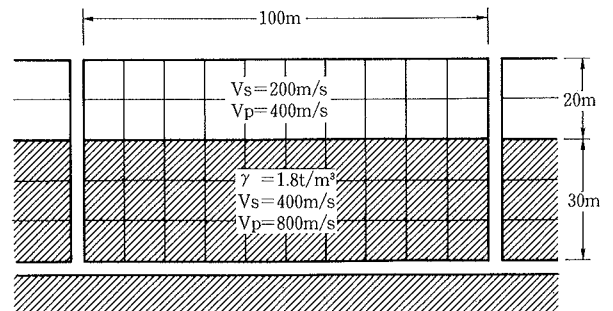
解析結果は半無限地盤、成層地盤のどちらにおいても全ての入射角にわたって理論解と非常によく一致しており、(4)式と(5)式で表わされる境界面における表面力の評価が妥当であることを示している。

3.2 不整形性に関する精度の確認

次に、地盤の不整形性による影響を表現できる事を確認するため、図-6 のような半円形の谷について地表面の伝達関数を求め、鉛直入射の場合と斜め入射 (入射角 30°) の場合について、その分布を図-7 と図-8 に示した。横軸は、各点の水平座標 x を谷の半幅 A で基準化したものであり、実線と点線は Wong⁹⁾による理論解である。また、入射波の振動数は 10Hz とした。



(a) 半無限地盤



(b) 成層地盤

図-3 整形地盤モデル

整形地盤の場合に比べ誤差はやや大きめではあるが、一般にわたり解析結果は Wong の解とよく一致しており、地表面の不整形性による波動の攪乱が正確に表現されていることがわかる。

4. 数値解析例

4.1 解析モデル

最後に、不整形な地盤の応答解析例によって、開発された解析プログラムの有効性を示すこととする。図-9 に示したような半円形の堆積盆地に単位振幅の実体波を入射し、地表面における伝達関数を求めた。ここで、入射角はSV波の場合 0° と 30° 、P波入射の場合 0° 、 30° 、 60° とし、入射波の振動数は 10Hz とした。

4.2 解析結果

図-10 と図-11 に鉛直入射時および斜め入射時の地表面における変位振幅の分布を示す。実線は水平変位、点線は鉛直変位である。鉛直入射の場合、谷の中央部で振幅が大きく増幅されており、斜め入射の場合には振幅の最大値を

示す位置が入射波の進行方向にずれている。また、谷の外側にあたる部分の振幅も、半無限地盤のものとは異なっている。このような現象は1次元の解析では得られないものであり、地盤の不整形性を考慮することの重要性を示すものである。

5. まとめ

本報では、成層性や不整形性を有する任意形状の地盤に実体波が斜め入射する問題を、有限要素法で解析するための解析式を示した。また、数値計算によって開発されたプログラムの妥当性を確認した結果、半無限地盤モデル、成層地盤モデル、半円谷モデルのいずれについても非常に高い精度で理論解と一致した。最後に沖積谷モデルについても計算を行ない、プログラムの有効性を示した。

参考文献

- 1) 田村, 他: 三次元有限要素法による構造物-地盤系の入射波解析, 電子計算機利用シンポジウム, p. 133~138, (1986)

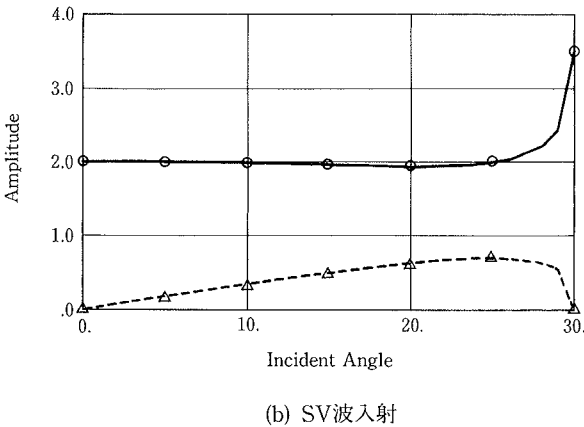
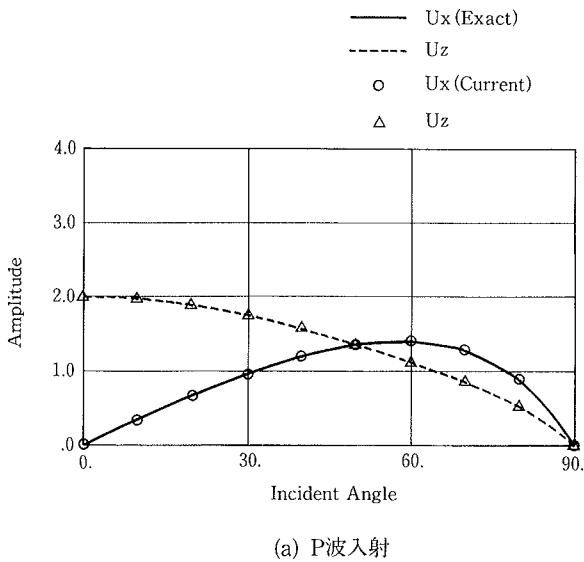


図-4 半無限地盤の伝達関数

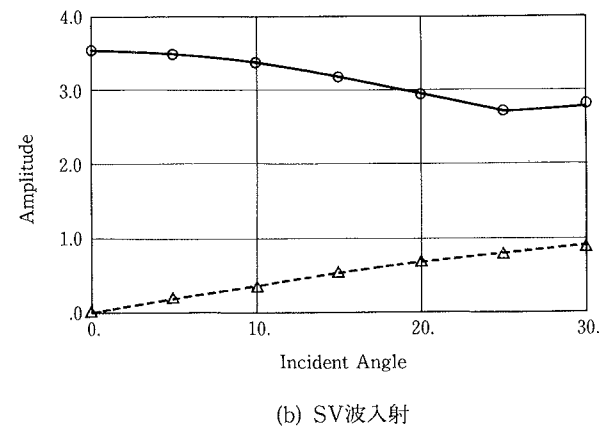
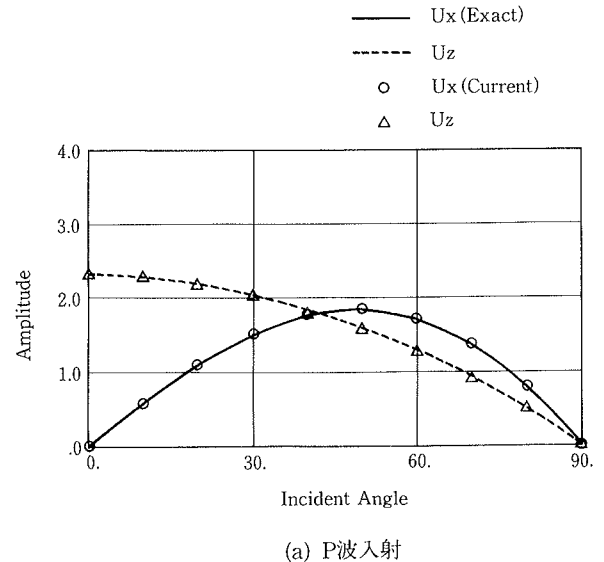


図-5 成層地盤の伝達関数

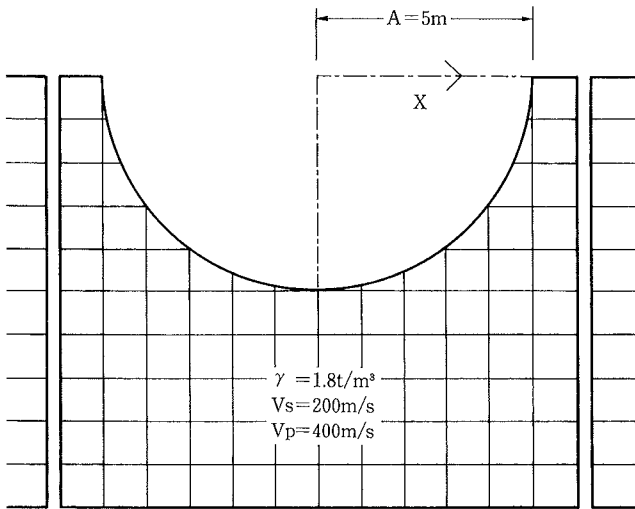


図-6 半円谷解析モデル

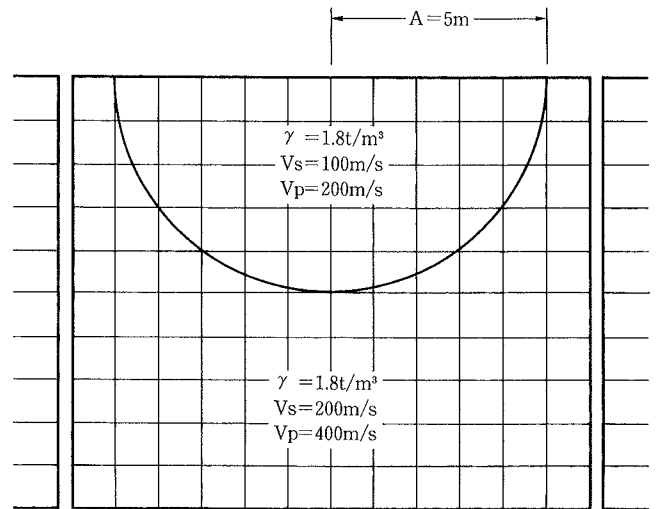
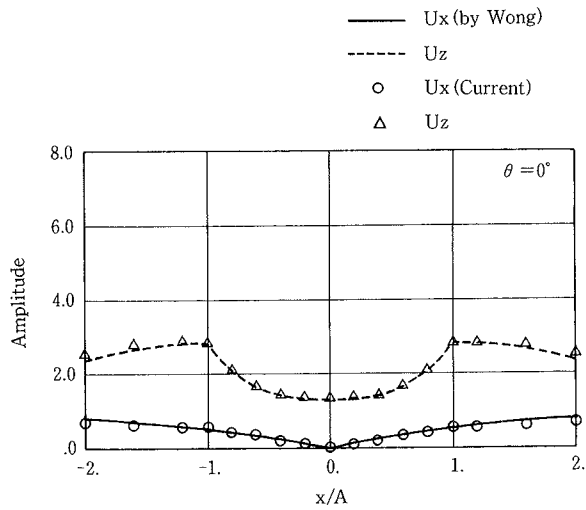
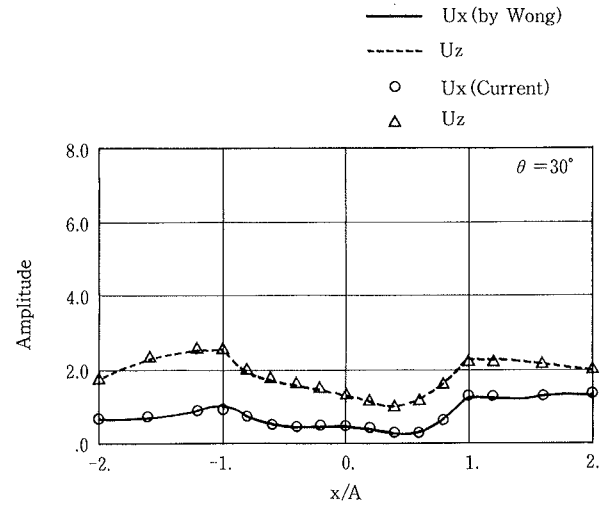


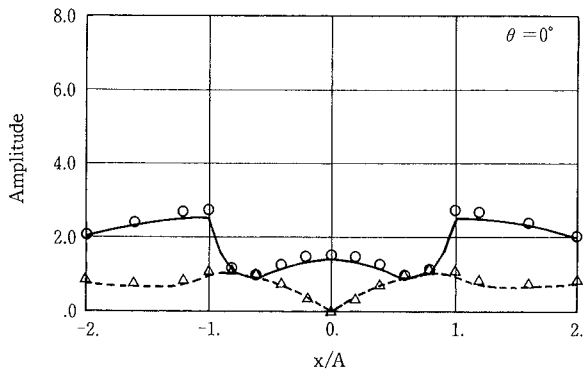
図-9 沖積谷解析モデル



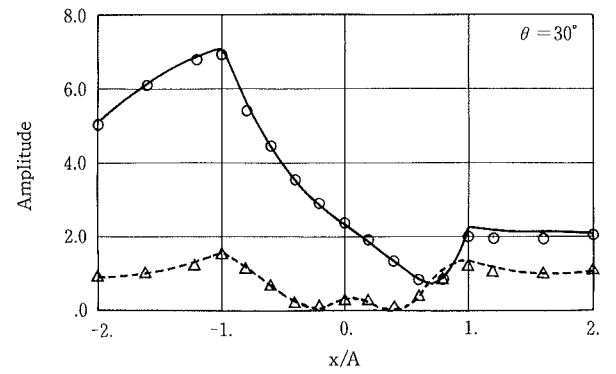
(a) P波入射



(a) P波入射



(b) SV波入射

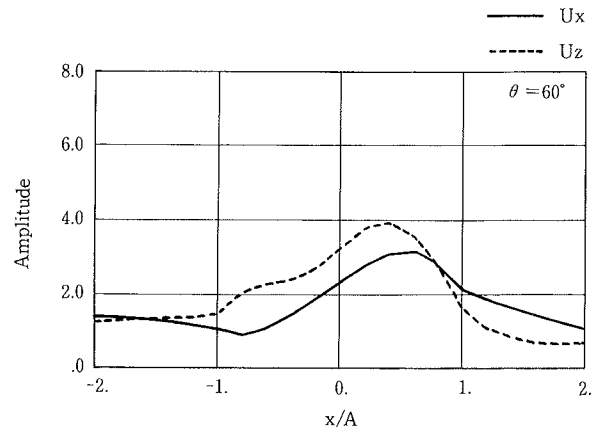


(b) SV波入射

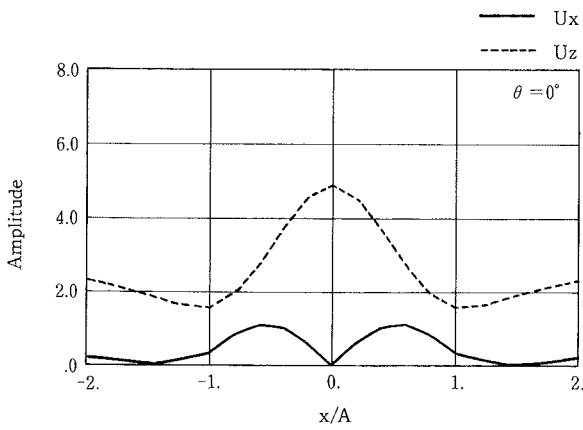
図-7 半円谷の伝達関数 (鉛直入射)

図-8 半円谷の伝達関数 (斜め入射)

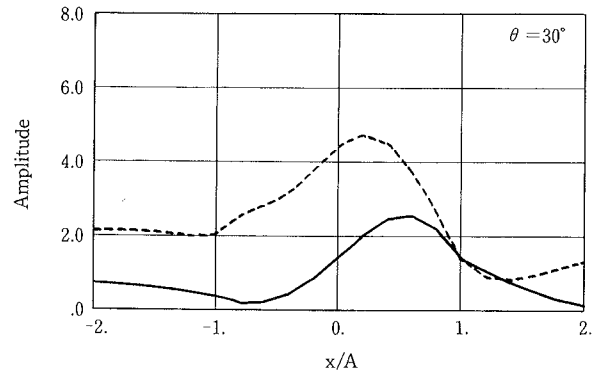
- 2) 安井他：有限要素法による不整形地盤の斜め入射波解析 (その1) —SH 波入射の場合—, 大林組技術研究所報, No. 39, p. 103~106, (1989. 8)
- 3) G. Waas: Analysis Method for Footing Vibrations Through Layered Media, U. S. ARMY Engineering Waterway Experiment Station, Technical Report S-71-14, (1972)
- 4) J. Lysmer, R. L. Kuhlemeyer: Finite Dynamic Model for Infinite Media, ASCE, Vol. 95, No. EM4, p. 859~877, (1969)
- 5) 高野他：実体波が斜め入射する場合の成層自由地盤の応答変位の計算方法とその応用, 大林組技術研究所報, No. 37, p. 80~84, (1988. 8)
- 6) H. G. Wong: Effect of Surface Topography on the Diffraction of P, SV, and Rayleigh Waves, BSSA, Vol. 72, No. 4, p. 1167~1183, (1982)



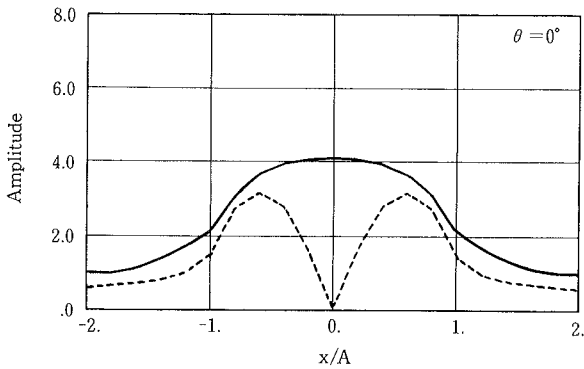
(a) P波入射



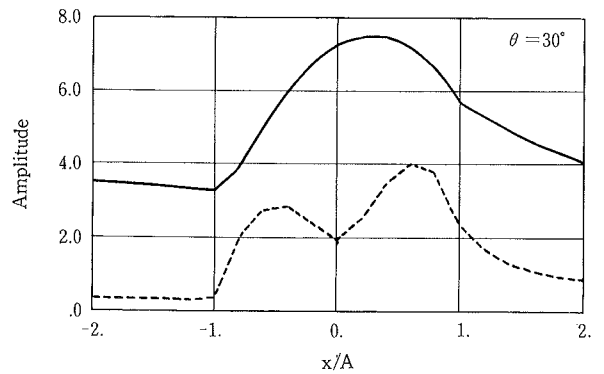
(a) P波入射



(b) P波入射



(b) SV波入射



(c) SV波入射

図-10 沖積谷の伝達関数 (鉛直入射)

図-11 沖積谷の伝達関数 (斜め入射)