

地盤内の浸透・拡散現象の予測手法に関する研究（その1）

——開発プログラムの妥当性について——

西田 憲司 上野 孝之
西林 清茂

Study on Prediction Method for Advection and Diffusion of Pollutants in Ground Water (Part 1)

——Validity of Original Development Program——

Kenji Nishida Takayuki Ueno
Kiyoshige Nishibayashi

Abstract

Groundwater pollution has drawn attention as an environmental problem in recent years. For utilization of underground space it is necessary to predict the state of groundwater pollution. In this prediction it is necessary to simultaneously solve equations of seepage flow and advection-diffusion because pollutants in ground water are moved about by seepage flow and diffusion. The original development program of the authors for solving the equations was formulated under certain hypothetical conditions. This program was examined through experimentation and simulation analyses. In examination, the results of column experimentation by the authors and the two-dimensional vertical model experiments with salt water previously conducted by Bruch were used. As a result of examination it was shown to be possible for movement of salt to be simulated with the original program confirming that the program is appropriate and effective.

概 要

近年、環境問題の1つとして地下水汚染がクローズアップされており、地下空間利用などに際しては、汚染状況を予測する技術が必要となる。地下水中の汚染物質は、浸透流および拡散によって移動することから、汚染状況を予測するためには浸透流支配式と浸透・拡散支配式を同時に解く必要があり、これに対応できる独自の解析プログラムの開発を進めてきた。プログラム作成においては仮定条件を設定しているため、その妥当性を実験とシミュレーション解析によって検討した。検討にあたっては、塩水を用いた鉛直カラム実験結果とBruchが既に行った2次元鉛直モデル実験結果を対象とした。検討の結果、1、2次元問題に関して、開発プログラムは塩化ナトリウムの移動現象をよくシミュレートでき、その妥当性が確認できた。

1. はじめに

建設分野においては、放射性廃棄物の地下処分、工場跡地利用、そして大規模地下空間利用計画など、地下水環境問題は重要度を増す一方である。このような設計に際しては、環境保全の立場から事前に汚染の状況を把握、将来予測する調査・解析技術が必要不可欠となる。汚染の原因となる地下水中の汚染物質は、「地下水流れによる移動」と「拡散による移動」が複合して拡がることから、その濃度分布や時間変化を把握、予測するためには、浸透流支配方程式および拡散支配方程式を連成して解く必要があり、これに対応できる解析プログラムの開発を進

めてきた。

この報告では、はじめに浸透流支配方程式、拡散支配方程式および仮定条件を述べ、両方程式の有限要素法による空間、時間離散化手法を述べた。次に、地盤内を移動する物質として、土粒子に吸着しない保存系物質である塩化ナトリウムを用いた1次元鉛直カラム実験とそのシミュレーション解析を実施し、両者の結果から仮定条件を含む解析プログラムの妥当性を検討した。さらに、Bruchが過去に実施した2次元鉛直モデル実験¹⁾をシミュレーション解析して、同プログラムの2次元問題への適用性を検証した。

2. 基礎理論と解析方法

2.1 基礎理論²⁾

飽和地盤内の浸透流支配方程式は式(1)で表される。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial h}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial h}{\partial z}\right) = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad \dots\dots\dots(1)$$

ここに、h：全水頭[L]，k：透水係数[L/T]，S_s：比貯留係数 [1/T]。

また浸透・拡散現象の支配式は式(2)で表される。

$$\frac{\partial(\rho\theta R_d C)}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho D_{xx} \frac{\partial C}{\partial x} + \rho D_{xy} \frac{\partial C}{\partial y} + \rho D_{xz} \frac{\partial C}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho D_{yx} \frac{\partial C}{\partial x} + \rho D_{yy} \frac{\partial C}{\partial y} + \rho D_{yz} \frac{\partial C}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho D_{zx} \frac{\partial C}{\partial x} + \rho D_{zy} \frac{\partial C}{\partial y} + \rho D_{zz} \frac{\partial C}{\partial z}\right) \right\} - \left\{ \frac{\partial(\rho u_x C)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y C)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z C)}{\partial z} \right\} - \lambda \rho \theta R_d C \quad \dots\dots\dots(2)$$

ここに、C：溶質濃度，ρ：溶液密度 [W/L³]，θ：空隙率，λ：核種の崩壊定数，R_d：遅延係数，u_i：Darcy 流速の i 方向の成分 [L/T]，D_{ij}：分散係数 [L²/T]。なお、「拡散」、「分散」については、地盤内の移流拡散現象に関して議論するとき、時として意味が異なる場合があるので、ここでは次のように定義する。拡散とは、水中にある分子がブラウン運動することによる物質の拡がりであり、その程度を量的に表すものが分子拡散係数 D_m である。一方分散とは、拡散による移動に加え、複雑な幾何学的構造の土粒子間の空隙中の流路を移動して物質が拡がる現象で、その程度は分散係数 D_{ij} で表される。

$$\left. \begin{aligned} D_{xx} &= \{\varepsilon_L \cdot u_x^2 + \varepsilon_T(u_y^2 + u_z^2)\} / |u| + D_m \\ D_{xy} &= (\varepsilon_L - \varepsilon_T) \cdot u_x \cdot u_y / |u| \\ D_{xz} &= (\varepsilon_L - \varepsilon_T) \cdot u_x \cdot u_z / |u| \\ D_{xy} &= D_{yx} \\ D_{yy} &= \{\varepsilon_L \cdot u_y^2 + \varepsilon_T(u_x^2 + u_z^2)\} / |u| + D_m \\ D_{yz} &= (\varepsilon_L - \varepsilon_T) \cdot u_y \cdot u_z / |u| \\ D_{zx} &= D_{xz} \\ D_{zy} &= D_{yz} \\ D_{zz} &= \{\varepsilon_L \cdot u_z^2 + \varepsilon_T(u_x^2 + u_y^2)\} / |u| + D_m \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

ここに、D_m：分子拡散係数[L²/T]，ε_L：流れ方向の分散能 [L]，ε_T：流れと直角方向の分散能 [L]，|u|： $\sqrt{u_1 + u_2 + u_3}$ [L/T]。

式(2)の各項は以下の意味を持つ。

- 左辺：物質濃度の時間変化
- 右辺第1項：分散による物質濃度変化
- 右辺第2項：浸透流による物質濃度変化
- 右辺第3項：核種の崩壊による物質濃度変化

式(1)，(2)を解くため、以下の仮定条件を設定した。

- ① 流れは Darcy 則に従う。

- ② 物質の拡散は Fick の法則に従う。
- ③ 地盤の透水性は等方性である。
- ④ 物質は水溶性である。
- ⑤ 地下水は物質が溶け込んでも密度変化しない。
- ⑥ 地盤の物性値(空隙率，透水係数，比貯留係数)は微小要素内で一定である。
- ⑦ 分散係数は流速の関数として扱う。
- ⑧ 地盤は飽和している。
- ⑨ 地下水の粘性は温度依存性を考慮する。

2.2 支配方程式の空間・時間離散化

浸透流支配方程式(1)をガラーキン有限要素法³⁾で空間離散化すると最終的に式(4)を得る。

$$\{F_0\} = [K]\{h\} + [C]\left\{\frac{\partial h}{\partial t}\right\} \quad \dots\dots\dots(4)$$

ここに、[C]，[K]：n×n 行列 (N は節点総数)，{∂h/∂t}，{h}：n 次未知列ベクトル，{F₀}：n 次既知列ベクトル。ガラーキン法は重み関数を形状関数としており、最も簡単なため広く用いられている方法である。

式(4)を解くために、クランクニルソン法³⁾を用いて時間離散化すると、式(5)を得る。

$$\left[\frac{1}{\Delta t}[C] + \frac{1}{2}[K]\right]\{h\}^{N+1} = \left[\frac{1}{\Delta t}[C] - \frac{1}{2}[K]\right]\{h\}^N + \{F_0\} \quad \dots\dots\dots(5)$$

ここに、N：時刻 t_N。

次に浸透・拡散支配方程式(2)をガラーキンまたは上流有限要素法³⁾で空間離散化すると、両方法とも以下の同一形式の方程式が最終的に得られる。

$$[C_T]\left\{\frac{\partial C}{\partial t}\right\} + [K_T]\{C\} = \{F_T\} \quad \dots\dots\dots(6)$$

ここに、[C_T]，[K_T]：n×n 行列 (N は節点総数)，{∂C/∂t}，{C}：n 次未知列ベクトル，{F_T}：n 次既知列ベクトル。上流法は、流速を考慮した重み関数を用いるため、流体問題に適していると一般に言われる。

式(6)をクランク・ニルソン法³⁾により時間離散化すると、次の離散化式を得る。

$$\left[\frac{1}{\Delta t}[C_T] + \frac{1}{2}[K_T]\right]\{C\}^{N+1} = \left[\frac{1}{\Delta t}[C_T] + \frac{1}{2}[K_T]\right]\{C\}^N + \frac{1}{2}\{F_T\}^{N+1} + \frac{1}{2}\{F_T\}^N \quad \dots\dots\dots(7)$$

ここに、N：時刻 t_N。

以上のことを考慮し、解析プログラムでは図-1に示すフローに従って計算を行う。

3. 開発プログラムによるシミュレーション解析

3.1 1次元問題の検証

3.1.1 鉛直カラム実験概要 実験に使用した鉛直カラム実験装置を、図-2，写真-1に示す。実験方法は、定水位透水試験と同様に円柱供試体に一定流速で真水を通水する。その後、通水している真水を瞬時に塩水に切

り替え、時間経過に伴う供試体内各部の塩分濃度の変化を計測する。塩分濃度測定には電導度計を用い、通水量は排水槽に接続されている流量測定装置を用いて測定した。

実験条件を表-1に示す。実験試料には均質地盤を想定し、2 mm 径のガラスビーズを使用した。塩水と真水の密

度差により生じる密度流を防ぐため、塩水の濃度は低い値 (1.0%) とし、さらに通水方向は鉛直上向きとした。

実験結果を図-3に示す。2箇所の測点における塩分濃度 C (図-3中△, ■印) は、時間の経過とともに徐々に上昇し、最終的に給水槽の濃度とほぼ同じになった。なお、真水から塩水に切り換えたときの時刻を $t=0$ として

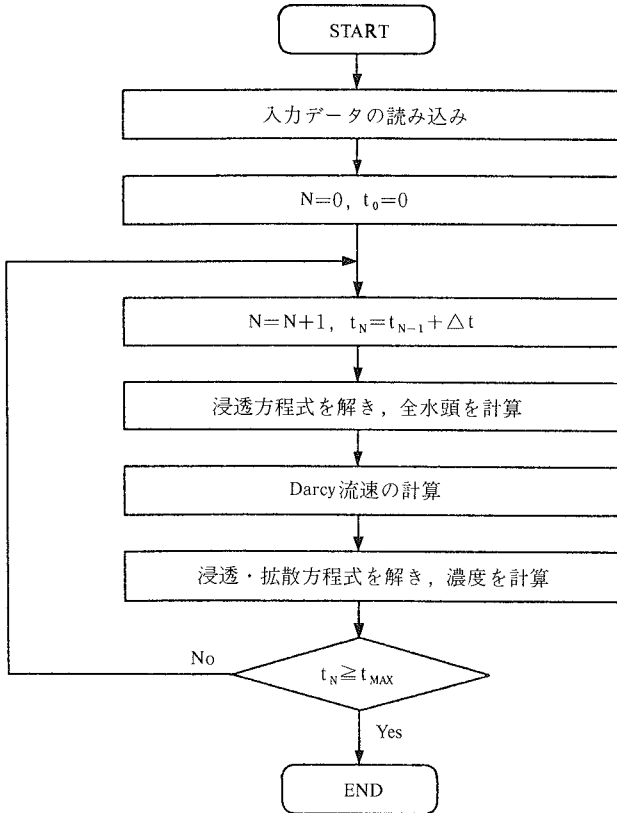


図-1 解析プログラムの基本フロー

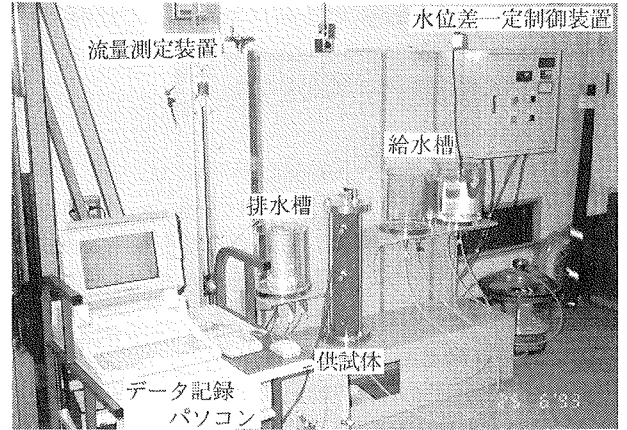


写真-1 1次元鉛直カラム実験装置

表-1 実験条件と実験試料の物理的性質

実験条件	給水槽と排水槽の水位差	10 cm
	給水槽塩水の塩分濃度	1.0%
	通水方向	鉛直上向
	NaCl 濃度測定点	底面から28 cm 底面から48 cm
試料条件	土の種類	2 mm 径ガラスビーズ
	供試体長さ	54.5 cm
	湿潤密度	1.96 g/cm ³
	乾燥密度	1.62 g/cm ³
	空隙率	0.34
	透水係数	1.8 × 10 ⁻¹ cm/sec

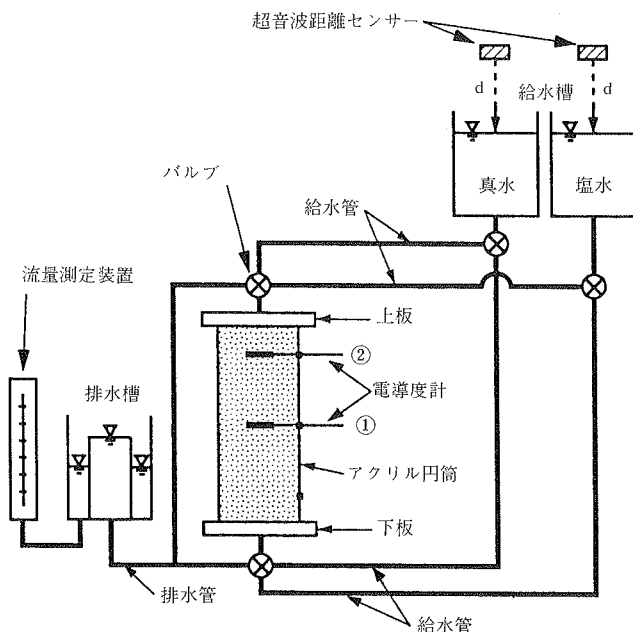


図-2 1次元鉛直カラム実験装置模式図

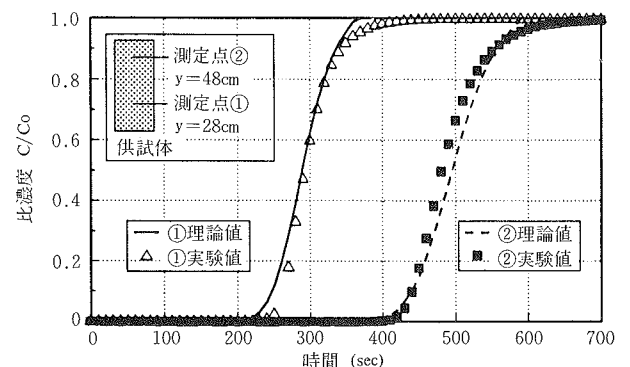


図-3 1次元実験結果と理論値の比較

いる。実験中の流速は、実験中ほとんど変化はなく一定である。この実験結果に基づき、式(8)の Harleman and Rumer による 1次元移流分散問題の理論解⁴⁾から分散係数 D を逆算した。

$$\frac{C}{C_0} = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{erfc} \left(\frac{y-u't}{2\sqrt{Dt/\theta}} \right) + \exp(uy\theta/D) \operatorname{erfc} \left(\frac{y+u't}{2\sqrt{Dt/\theta}} \right) \right\} \dots\dots\dots(8)$$

ここに、erfc(r)：余誤差関数，u'：実流速，y：座標，D：分散係数，t：時刻。図-3に理論値を示す。1次元の分散係数は式(3)を参照して、式(9)となる。

$$D = \epsilon_L u + D_m \dots\dots\dots(9)$$

求めた分散係数 $D=0.00684 \text{ cm}^2/\text{sec}$ は、塩化ナトリウムの分子拡散係数 $D_m=1.26 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{sec}$ ⁵⁾より2オーダー大きいことから、測定点の塩分濃度変化は浸透流による塩化ナトリウムの移動の影響が大きく、分子拡散による影響はほとんどないことを示している。今回の実験では流速が速く、Re数 ($Re=$) 1.92と大きく、Raimondi らが分子拡散が物質の移動に支配的になるのは $Re=10^{-3}$ 以下である⁶⁾という実験的見地に整合する。さらに、図-3の理論値と実験結果はほとんど一致していることから、吸着による濃度変化の遅れはなく保存系物質の挙動をうまく再現できていると同時に、密度流も発生していないことが推察できる。

3.1.2 1次元実験のシミュレーション解析 開発プログラムを使って鉛直カラム実験をシミュレートするために、図-4に示すような解析モデル、初期条件、境界条件を設定した。実験は1次元であるが、3次元解析プログラムであるため、解析モデルは3次元で作成した。入力した値を表-2に示す。入力すべき分散特性は、実験で求められる分散係数 D に等しくなるような ϵ_L , ϵ_r , D_m を設定する必要がある。ここでは、1次元であることから $\epsilon_r=0$ とし、また塩化ナトリウムの分子拡散係数は $D_m=1.26 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{sec}$ とし、式(9)より ϵ_L を逆算した。

初期条件は全節点の濃度を $C=0$ とした。また境界条件は、塩水の流入する下面の節点を濃度一定 $C=1$ とし、流出面となる上面は物質流出境界 ($\partial C/\partial y=0$) とした。側面は不透水境界である。

式(2)の空間離散化手法としてはガラーキン法を採用して解析した。ガラーキン有限要素法では解が振動することがあり³⁾、その場合、要素分割 Δy 、時間刻み Δt を、ペクレ数 Pe 、クーラン数 Cr が式(10)、(11)の条件を満たすように設定すれば解の振動を抑制できる。そこで、式(10)、(11)を満たすように $\Delta y=0.5 \text{ cm}$ 、 $\Delta t=5 \text{ sec}$ と設定した。

$$Pe = \frac{u\Delta y}{D} \leq 10 \dots\dots\dots(10)$$

$$Cr = \frac{u\Delta t}{\theta\Delta y} \leq 1 \dots\dots\dots(11)$$

解析結果を図-5に示す。解析結果には振動が発生しておらず、実験値とほとんど一致していることから、1次元問題に関しては、この解析プログラムで1次元現象を

うまくシミュレートできると考えられる。

解析モデルが大きい場合や、計算容量に制約がある場合は、式(10)、(11)を満たす Δy 、 Δt を設定できないことも考えられる。その場合は、解の精度はガラーキン有限要素法に比べやや劣るが、式(2)の空間離散化に上流有限要素法を用いることで、解の振動を抑制できる。

3.2 2次元問題の検証

3.2.1 Bruch の 2次元鉛直実験概要^{1),7)} Bruch は 2次元問題の理論解を導いて⁷⁾、実験結果と比較を行っている¹⁾。そこで、解析プログラムの2次元問題への適用として、Bruch による実験のシミュレーション解析を試みた。

Bruch による実験は、図-6に示す平板型の砂のモデル(高さ 1260 cm×幅 60.96 cm×奥行き 12.7 cm)の供試体上端の全面から砂糖水を定常状態になるまで一様に通水し初期状態を作る。次に、砂糖水と同じ密度の塩水を

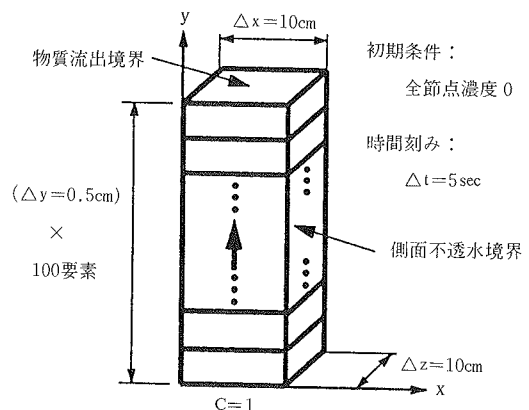


図-4 1次元実験シミュレーション解析モデル

表-2 1次元実験シミュレーション解析入力データ

分散能 ϵ_L	0.21 cm
分散能 ϵ_r	0 cm
分子拡散係数	$1.26 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{sec}$
Darcy 流速	$3.3 \times 10^{-3} \text{ cm}/\text{sec}$

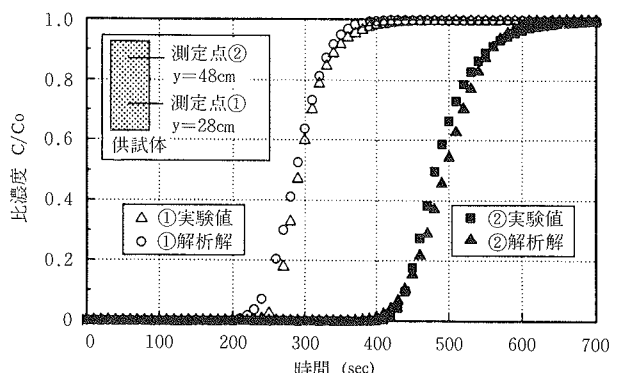


図-5 1次元実験結果と解析解の比較

上端面の中心部(幅=17 cm)から砂糖水と同じ流速で流し、供試体中の塩分濃度の時間変化を測定した。この実験は流れに関して1次元であり、分散に関しては2次元である。なお、塩水と同じ密度となる砂糖水を使用しているのは、前節の1次元実験同様、密度流を防ぐためである。

3.2.2 2次元実験のシミュレーション解析 解析にあたっては、実験モデルが左右対称であることから、図-7のように供試体の右半分を解析モデルとした。なお解析モデルは3次元とし、要素数は1,764(14×126×1)とした。

初期条件は全節点濃度をC=0とした。境界条件はモデル上面のうち、塩水の流入する面の節点濃度をC=1、砂糖水流入面の節点濃度をC=0一定とした。側面は不透水境界である。

入力データを表-3に示す。このうち分散能 ϵ_L 、 ϵ_T は、実験で求められた分散係数 D_{xx}' 、 D_{yy}' (ただし、Bruchが求めた分散係数は、式(3)で定義される分散係数を空隙率 θ で除した値に相当する)に等しくなるように設定した。すなわち、 $u_x = u_z = 0$ cm/sec、分子拡散係数 $D_m = 1.26 \times 10^{-5}$ cm²/sec、式(3)を考慮して、式(12)より ϵ_L 、 ϵ_T を求めた。

$$\theta D_{xx}' = \epsilon_T u_y + D_m, \quad \theta D_{yy}' = \epsilon_L u_y + D_m \quad \dots\dots\dots(12)$$

解析結果として、 $x=0$ cm、 $y=28.895$ cmにおける濃度の時間変化を図-8に示した。図には、Bruchの実験結果と理論解も示した。解析解は理論解とよく一致しており、解析プログラムの多次元問題への適用に対する妥当性が評価できたと考えられる。一方、解析解と実験結果を比較すると、低濃度部で少しずれが見られるものの、全体としてはよく一致していると言える。低濃度部のずれは、物質濃度は理論的には漸変するが、実験では急変しているためである。

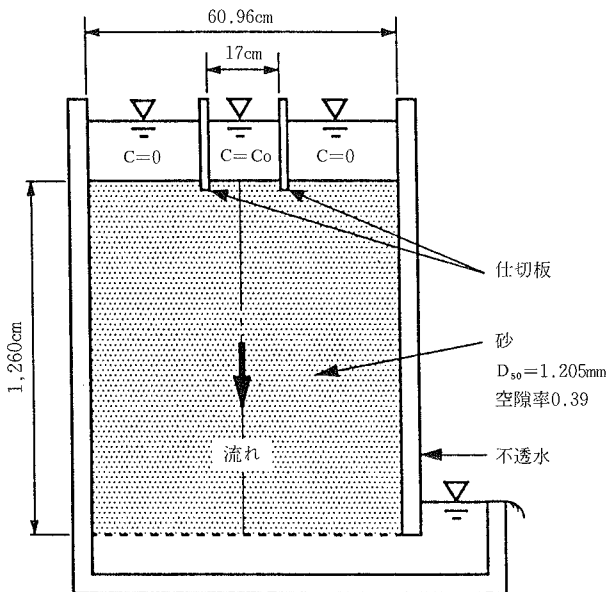


図-6 Bruchの2次元鉛直実験概要

4. おわりに

地下水の汚染状況を把握・予測する手法として、独自の解析プログラムを開発した。実験とシミュレーション解析によって検討した結果、1、2次元問題に関して、開発プログラムは塩化ナトリウムの移動現象をよくシミュレートできることが確認できた。今回は、物質の移動

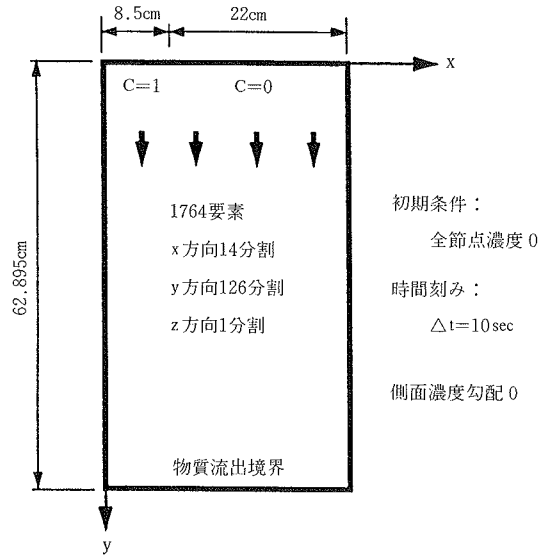


図-7 2次元実験シミュレーション解析モデル

表-3 2次元実験結果とそのシミュレーション解析入力データ

実験結果	実流速 u' (cm/sec)	5.858×10^{-2}
	水平分散係数 D_{xx}' (cm ² /sec)	8.59×10^{-4}
	鉛直分散係数 D_{yy}' (cm ² /sec)	1.186×10^{-2}
入力データ	Darcy 流速 u (cm/sec)	2.28×10^{-2}
	分散能 ϵ_L (cm)	0.20
	分散能 ϵ_T (cm)	0.014
	分子拡散係数 D_m (cm ² /sec)	1.26×10^{-5}

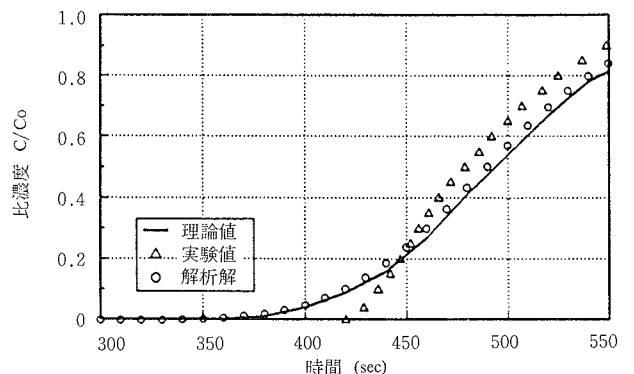


図-8 2次元実験結果・理論値・解析解

に関して浸透流が支配的な場合の検証であり、今後は、分子拡散が支配的な場合の検証も行う予定である。また、このプログラムが密度流も扱えるように改良していく予定である。

参考文献

- 1) Bruch, J. C. : Two-Dimensional Dispersion Experiments in a Porous Medium, Water Resource Reserch, Vol. 6, No. 3, p. 791~800, (1970)
- 2) Gupta, S. K. et al. : A Multi-Dimensional Finite-Element Cood for the Analysis of Coupled Fluid, Energy, and Solute Transport (CFEST), PNL-4260, (1982)
- 3) P. S. ファコーン, 他 (赤井浩一訳監修) : 地下水解析の基礎と応用, 上巻基礎編, 現代工学社, 232p., (1987)
- 4) Harleman, D. R. F. et al. : Longitudinal and Lateral Dispersion in an Isotropic Porous Medium, J. Fluid Mech, Vol. 16, p. 385~394, (1963)
- 5) 水科篤郎, 他 : 輸送現象, 産業図書, 322p., (1981)
- 6) Raimondi, P. et al. : Effect of Pore Structure and Molecular Diffusion on the Mixing of Miscible Liquids Flowing in Porous Media, American Institute of Chemical Engineers Joint Symposium on Fundamental Concepts of Miscible Fluid Displacement (Part 2), p. 6~9, (1959)
- 7) Bruch, J. C. et al. : Two-Dimensional Dispersion, ASCE, SA, Vol. 6, p. 17~39, (1967)