

# 飽和多孔質成層地盤の3次元薄層法による点加振解

高野 真一郎 安井 謙

## Point Load Solutions on Layered Fluid-Filled Poroelastic Soil by Thin Layered Element Method

Shin-ichiro Takano Yuzuru Yasui

### Abstract

Solutions for point loads on layered fluid-filled poroelastic soil are derived by the thin layered element method using the formulation for the transmitting boundary. To verify this method, the derived ground motions due to point load excitations and compliances of circular foundation on fluid-filled poroelastic half-space are compared to those of previous studies. This paper discusses the effect of layered fluid-filled poroelastic soil on impedances of plate foundation, as well as the effect of permeability.

### 概要

臨海部の軟弱地盤に建つ建築構造物の動特性を把握するためには、基礎構造物と地下水を有する地盤との動的相互作用の効果を明らかにすることが耐震工学上重要な課題となる。動的相互作用解析では点加振解を求めることが基本となるが、これまでの点加振解の誘導に関する研究は地下水を含まない弾性地盤のものがほとんどであった。そこで、本論文では飽和多孔質成層地盤における点加振解を誘導し、得られた解による計算値と既往の結果とを比較してその妥当性を確かめるとともに、地表面基礎のインピーダンスを算定し、間隙水が存在および透水係数が基礎の動特性に及ぼす影響について考察した。

### 1. はじめに

臨海部等の軟弱地盤は地下水を有する場合が多く、軟弱地盤に建つ建築構造物の動特性を把握するためには、基礎構造物と地下水を有する地盤との動的相互作用の効果を明らかにすることが耐震工学上重要な課題となる。

地下水を含む地盤の動力学特性を把握するためには、土粒子骨格の間隙を満たす水(間隙水)の影響を考慮できる複合体としての地盤モデルが必要である。このような複合体の基本的な解析モデルはBiot<sup>1)</sup>によって最初に示され、その後の飽和多孔質地盤の動特性に関する解析的研究の多くはBiotによるモデルを採用している<sup>2)~7)</sup>。

Biotのモデルを用いた動的解析に関する研究は大きく2つに分類できる。一つは有限要素モデルに対して逐次非線形応答計算を行う液状化解析に代表される研究<sup>2)</sup>である。もう一つは地盤あるいは基礎・地盤系の周波数特性に着目した動的相互作用解析に代表される研究であり、この場合土粒子骨格は一般に有孔弾性体として扱われる。後者の解析は自由地盤の応答と基礎のインピーダンスおよび基礎入力動を求めることに帰着され、後者はさらに地盤の点加振解を求めることに帰結する。

点加振解の誘導についての既往の研究は弾性地盤のもの

がほとんどであり、飽和多孔質地盤では、半無限地盤においてHalpern等<sup>3)</sup>の研究や庄等<sup>4)</sup>の研究、さらに時間領域におけるChen<sup>5)</sup>の研究が見られるのみである。

こうした背景のもと、動的相互作用解析の基本となる点加振解を、飽和多孔質成層地盤において誘導・定式化することは有用と考えられる。そこで、本論文ではBougacha等<sup>6)</sup>が波動伝達境界の構築に用いた定式化を加振問題に拡張し、下方地盤の半無限性を考慮した3次元薄層要素法による点加振解を誘導するとともに、得られた解による計算値と既往の結果とを比較し対応することを確認する。

### 2. 点加振解の誘導

Bougacha等<sup>6)</sup>は円筒座標系  $(r, \theta, z)$  における飽和多孔質地盤の応力・変位構成式および運動方程式を周波数領域で表し、間隙水の変位を運動方程式から消去できることを示した。これにより、運動方程式は間隙水の変位成分のない以下の4つの方程式系となる。

$$\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + \frac{1}{G} \left( \frac{N}{R} + \frac{iab}{F} \right) \frac{\partial s}{\partial r} = \frac{M}{G} u \dots \dots \dots (1)$$

$$\nabla^2 v - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + \frac{1}{G} \left( \frac{N}{R} + \frac{i\omega b}{F} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial r} = \frac{M}{G} v \dots (2)$$

$$\nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \frac{1}{G} \left( \frac{N}{R} + \frac{i\omega b}{F} \right) \frac{\partial s}{\partial z} = \frac{M}{G} w \dots (3)$$

$$\frac{1}{F} \nabla^2 s + \left( \frac{N}{R} + \frac{i\omega b}{F} \right) \varepsilon = \frac{1}{R} s \dots (4)$$

ここで、 $u(r, \theta, z)$ 、 $v(r, \theta, z)$  および  $w(r, \theta, z)$  は各々土粒子骨格の  $r$ 、 $\theta$  および  $z$  方向の変位を表す。 $s(r, \theta, z)$  は間隙水が負担する応力であり間隙水圧  $p(r, \theta, z)$  と間隙率  $n$  により以下のようになる。

$$s = -np \dots (5)$$

また、 $\nabla^2$  および  $\varepsilon$  は各々ラプラシアンおよび土粒子骨格の体積ひずみであり次のように表される。

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \dots (6)$$

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} \dots (7)$$

$\lambda$ 、 $G$  および  $\nu$  は各々土粒子骨格のLameの定数、せん断弾性係数およびポアソン比、 $b$  は浸透力を表す減衰係数である。 $N$  および  $R$  はBougacha等に従い間隙水の体積弾性係数  $\beta$  を用いて次のように表される。

$$R = n\beta \dots (8)$$

$$N = (1-n)\beta \dots (9)$$

さらに、 $F$  および  $M$  は以下のように表される。

$$F = i\omega b - \omega^2 \rho_{22} \dots (10)$$

$$M = i\omega b - \rho_{11} \omega^2 + \frac{b^2 \omega^2}{F} \dots (11)$$

ここで、 $\omega$  は円振動数である。 $\rho_{11}$  および  $\rho_{22}$  は各々土粒子本体の質量  $\rho$  および間隙水の質量  $\rho_f$  を用いて次のように表される。

$$\rho_{11} = (1-n)\rho \dots (12)$$

$$\rho_{22} = n\rho_f \dots (13)$$

消去した間隙水の  $r$  および  $z$  方向の変位成分  $U_f(r, \theta, z)$  および  $W_f(r, \theta, z)$  は以下のように表される。

$$U_f = \frac{1}{F} \left( \frac{\partial s}{\partial r} + i\omega b u \right) \dots (14)$$

$$W_f = \frac{1}{F} \left( \frac{\partial s}{\partial z} + i\omega b w \right) \dots (15)$$

Fig. 1のように弾性半無限層上の厚さ  $H$  の飽和多孔質成層地盤を  $N$  層の薄層に分割し、各々の薄層内では材料特性が同様であり、薄層接触面 ( $z = z_j, 2 \leq j \leq N$ ) で以下の連続条件が成り立つものとする。まず、土粒子骨格の変位の連続性を仮定する。

$$u(r, \theta, z_j^-) = u(r, \theta, z_j^+) \dots (16)$$

$$v(r, \theta, z_j^-) = v(r, \theta, z_j^+) \dots (17)$$

$$w(r, \theta, z_j^-) = w(r, \theta, z_j^+) \dots (18)$$

ここで、 $z_j^-$  および  $z_j^+$  は各々薄層境界面  $z = z_j$  に接する上部

層および下部層の値であることを示すものとする。さらに、間隙水の流入出量の連続性を仮定することにより次式が成立する。

$$n_{j-1}(W_f(r, \theta, z_j^-) - w(r, \theta, z_j^-)) = n_j(W_f(r, \theta, z_j^+) - w(r, \theta, z_j^+)) \dots (19)$$

さらに加振力が作用しない場合、接触面での全応力の連続性と間隙水圧の連続性が成り立つ。

$$\tau_{rz}|_{z_j^-} = \tau_{rz}|_{z_j^+} \dots (20)$$

$$\tau_{\theta z}|_{z_j^-} = \tau_{\theta z}|_{z_j^+} \dots (21)$$

$$\sigma_z|_{z_j^-} - n_{j-1}p(r, \theta, z_j^-) = \sigma_z|_{z_j^+} - n_j p(r, \theta, z_j^+) \dots (22)$$

$$p(r, \theta, z_j^-) = p(r, \theta, z_j^+) \dots (23)$$

ここで、 $\tau_{rz}$ 、 $\tau_{\theta z}$  および  $\sigma_z$  は単位面積あたりの有効応力を表す。

また、地表面では全応力と間隙水圧がゼロとなる。

$$\tau_{rz}|_{z=0} = 0 \dots (24)$$

$$\tau_{\theta z}|_{z=0} = 0 \dots (25)$$

$$\sigma_z|_{z=0} - n_1 p(r, \theta, 0) = 0 \dots (26)$$

$$p(r, \theta, 0) = 0 \dots (27)$$

一方、弾性半無限層との接触面では間隙水の流入出がないものとする、次の式が成立する。

$$n_N(W_f(r, \theta, H) - w(r, \theta, H)) = 0 \dots (28)$$

また、弾性半無限層の応力と飽和多孔質層の全応力が接触面で連続するものと仮定すると、最下面の境界条件が次のように表される。

$$\begin{cases} \tau_{rz} \\ \tau_{\theta z} \\ \sigma_z - n_N p \end{cases}_{z=H^-} = \begin{cases} \tau_{rz} \\ \tau_{\theta z} \\ \sigma_z \end{cases}_{z=H^+} \dots (29)$$

ここで、左辺は飽和多孔質層の全応力、右辺は弾性半無限

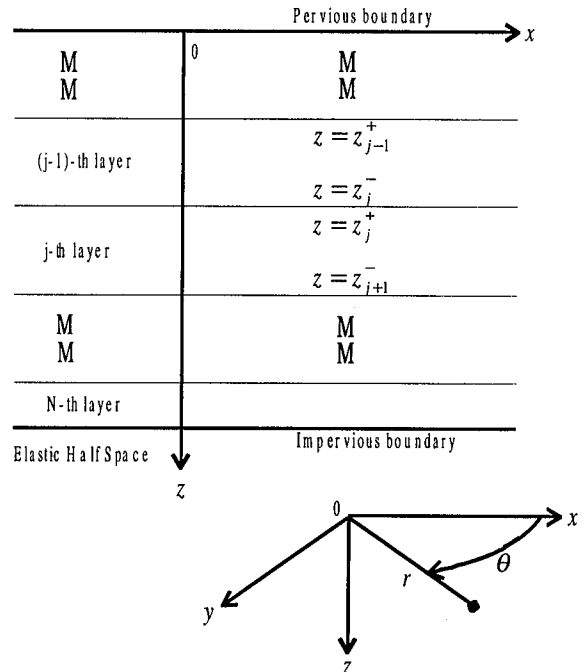


Fig. 1 座標系と薄層要素モデル  
Coordinate System and Thin Layered Element Model

層の応力を表す。

各々の薄層で構成方程式(1)~(4)を満足し、連続条件(16)~(23)式および境界条件(24)~(29)式が成立するような2種類の振動モードを次の変数分離形で求める。まずRayleighモードに関し、

$$u(r, \theta, z) = kU(z)J'_\mu(kr) \begin{bmatrix} \cos(\mu\theta) \\ \sin(\mu\theta) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (30)$$

$$v(r, \theta, z) = \frac{\mu}{r}U(z)J_\mu(kr) \begin{bmatrix} -\sin(\mu\theta) \\ \cos(\mu\theta) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (31)$$

$$w(r, \theta, z) = kW(z)J_\mu(kr) \begin{bmatrix} \cos(\mu\theta) \\ \sin(\mu\theta) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (32)$$

$$p(r, \theta, z) = kP(z)J_\mu(kr) \begin{bmatrix} \cos(\mu\theta) \\ \sin(\mu\theta) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (33)$$

とし、Loveモードに関し、

$$u(r, \theta, z) = \frac{\mu}{r}V(z)J_\mu(kr) \begin{bmatrix} \cos(\mu\theta) \\ \sin(\mu\theta) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (34)$$

$$v(r, \theta, z) = kV(z)J'_\mu(kr) \begin{bmatrix} -\sin(\mu\theta) \\ \cos(\mu\theta) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (35)$$

$$w(r, \theta, z) = 0 \dots\dots\dots (36)$$

$$p(r, \theta, z) = 0 \dots\dots\dots (37)$$

とする。ここで、 $k$  および  $\mu$  は各々波数およびフーリエ係数 ( $\mu=0, 1, 2, \dots$ ) である。 $J_\mu$  は  $\mu$  次のベッセル関数であり、プライム(')は引数に関する微分を表す。また、 $\theta$  に関する項の括弧 [ ] の上部は対称(symmetric)モードの振動に使用され、下部は逆対称(anti-symmetric)モードに使用される。Rayleighモードの振動形はBougacha等のもとの係数が異なっているが、これは後に示す薄層要素剛性マトリクスを対称行列として求めるためである。

これらの振動モード形を構成方程式(1)~(4)に代入することにより、第j薄層( $j=1, \dots, N$ )に対しz座標に関する次の2組の常微分方程式系が得られる。すなわちRayleighモードに関し、

$$k^2(\lambda + 2G)_j U - k(\lambda + G)_j \frac{dW}{dz} + kn_j \left( \frac{N_j}{R_j} + \frac{i\omega b_j}{F_j} \right) P - G_j \frac{d^2U}{dz^2} + M_j U = 0 \dots\dots\dots (38)$$

$$k^2 G_j W + k(\lambda + G)_j \frac{dU}{dz} - (\lambda + 2G)_j \frac{d^2W}{dz^2} + n_j \left( \frac{N_j}{R_j} + \frac{i\omega b_j}{F_j} \right) \frac{dP}{dz} + M_j W = 0 \dots\dots\dots (39)$$

$$-k^2 \frac{n_j}{F_j} P + k \left( \frac{N_j}{R_j} + \frac{i\omega b_j}{F_j} \right) U - \frac{n_j}{R_j} P + \frac{n_j}{F_j} \frac{d^2P}{dz^2} - \left( \frac{N_j}{R_j} + \frac{i\omega b_j}{F_j} \right) \frac{dW}{dz} = 0 \dots\dots\dots (40)$$

が得られ、Loveモードに関し、

$$k^2 G_j V - G_j \frac{d^2V}{dz^2} + M_j V = 0 \dots\dots\dots (41)$$

が得られる。ここで、物性値等の下添字jは第j薄層の値で

あることを示す。同様に、連続条件および境界条件(16)~(29)式もz座標に関する関係式で表現される。

第j薄層( $j=1, \dots, N$ )の上端および下端の変位および間隙水圧の値を各々  $U_j^+, V_j^+, W_j^+, P_j^+$  および  $U_{j+1}^-, V_{j+1}^-, W_{j+1}^-, P_{j+1}^-$  とし、薄層内では各変位および間隙水圧が線形に変化すると仮定し、有限要素法の定式化を用いて離散化すると、2つの常微分方程式系より波数kに関する次の2組のマトリクス方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} k^2 \mathbf{A}_j^R + k \mathbf{B}_j^R + \mathbf{C}_j^R \\ \mathbf{P}_{j+1}^- \\ \mathbf{W}_{j+1}^- \\ \mathbf{U}_{j+1}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Psi_j^+ \\ -F_j^{z,+} \\ -F_j^{r,+} \\ \Psi_{j+1}^- \\ F_{j+1}^{z,-} \\ F_{j+1}^{r,-} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (42)$$

$$\begin{bmatrix} k^2 \mathbf{A}_j^L + \mathbf{C}_j^L \\ \mathbf{V}_{j+1}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_j^{\theta,+} \\ F_{j+1}^{\theta,-} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (43)$$

ここで、 $-F_j^{r,+}$ ,  $-F_j^{\theta,+}$  および  $-F_j^{z,+}$  は各々第j薄層から第j薄層境界面にはたらく  $r$ ,  $\theta$  および  $z$  方向の全応力を表し、各々(20)~(22)式に示した全応力  $\tau_{rz}^l, \tau_{\theta z}^l$  および  $\sigma_z^l - np(r, \theta, z_j^+)$  のz座標に関する離散化表現となっている。同様に  $F_{j+1}^{r,-}$ ,  $F_{j+1}^{\theta,-}$  および  $F_{j+1}^{z,-}$  は各々第j薄層から第j+1薄層境界面にはたらく  $r$ ,  $\theta$  および  $z$  方向の全応力を表す。 $\Psi_j^+$  は第j薄層境界面より流入・流出する第j薄層の間隙水の流量に関する変数であり、(19)式に示した変数  $n_j(W_j(r, \theta, z_j^+) - w(r, \theta, z_j^+))$  のz座標に関する離散化表現になっている。同様に  $\Psi_{j+1}^-$  は第j+1薄層境界面より流入・流出する第j薄層の間隙水の流量に関する変数である。対称マトリクス  $\mathbf{A}_j^R$ ,  $\mathbf{B}_j^R$ ,  $\mathbf{C}_j^R$ ,  $\mathbf{A}_j^L$  および  $\mathbf{C}_j^L$  の各係数をTable1に示す。ここで  $h$  は薄層の厚さを表す。また、薄層番号を表す下添字jは省略した。

(42)および(43)式を1つのマトリクスにまとめた薄層要素ごとの剛性マトリクスを  $\mathbf{A}_j$ ,  $\mathbf{B}_j$  および  $\mathbf{C}_j$  とし、さらに各薄層要素の剛性マトリクスを重ねあわせ、自由地表面での透水性境界を仮定し間隙水圧がゼロとなる条件を用いると、全成層地盤に関する剛性マトリクスが以下のように得られる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{W}_2 \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{P}_{N+1} \\ \mathbf{W}_{N+1} \\ \mathbf{U}_{N+1} \\ \mathbf{V}_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^z \\ \mathbf{F}_1^r \\ \mathbf{F}_1^\theta \\ \mathbf{\Psi}_2 \\ \mathbf{F}_2^z \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{\Psi}_{N+1} \\ \mathbf{F}_{N+1}^z \\ \mathbf{F}_{N+1}^r \\ \mathbf{F}_{N+1}^\theta \end{bmatrix} \dots\dots\dots (44)$$

ここで、マトリクス  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  および  $\mathbf{C}$  は各薄層の要素剛性マトリクス  $\mathbf{A}_j$ ,  $\mathbf{B}_j$  および  $\mathbf{C}_j$  を重ねあわせたものである。また、変位の連続条件(16)式~(18)式および間隙水圧

の連続条件(23)式を次の形で用いている。

$$\begin{aligned} U_j &= U_j^+ = U_j^- \\ V_j &= V_j^+ = V_j^- \\ W_j &= W_j^+ = W_j^- \quad (1 \leq j \leq N+1) \dots\dots\dots (45) \\ P_j &= P_j^+ = P_j^- \end{aligned}$$

さらに、地表面での間隙水圧の境界条件(27)式から  $P_1 = P_1^+ = 0$  となるため、 $P_1$  および  $\Psi_1$  に関する行と列を削除している。(42)式の左辺のベクトルを  $P, W, U$  の順としているのはこの操作を簡単にするためである。また、右辺の各項は次のように表される。

$$\begin{aligned} F_1^X &= -F_1^{X,+} \\ F_j^X &= -F_j^{X,+} + F_j^{X,-} \quad (2 \leq j \leq N; X = r, \theta, z) \\ F_{N+1}^X &= F_{N+1}^{X,-} \\ \Psi_1 &= -\Psi_1^+ \\ \Psi_j &= -\Psi_j^+ + \Psi_j^- \quad (2 \leq j \leq N) \\ \Psi_{N+1} &= \Psi_{N+1}^- \end{aligned} \dots\dots\dots (46)$$

薄層境界面の応力の連続条件(20)～(22)式および地表面での境界条件(24)～(26)式から、加振力が作用しない境界面では  $F_j^X$  ( $X = r, \theta, z; j = 1, \dots, N$ ) がゼロとなる。半無限層との境界面では境界条件(29)式の  $z$  座標に関する離散化表現である次式を(44)式に代入する。ただし、応力の表示順  $r, \theta, z$  を(44)式にあわせて変更している。

$$\begin{Bmatrix} F_{N+1}^z \\ F_{N+1}^r \\ F_{N+1}^\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{N+1}^{z,-} \\ F_{N+1}^{r,-} \\ F_{N+1}^{\theta,-} \end{Bmatrix} = -\mathbf{K}_b(k) \begin{Bmatrix} W_{N+1} \\ U_{N+1} \\ V_{N+1} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (47)$$

ここで、 $\mathbf{K}_b(k)$  は弾性半無限層境界面に働く応力と変位の関係を表す剛性マトリクスを波数  $k$  で級数展開し2次までの項を採用したもの(2次のparaxial boundary)<sup>8)</sup>である。これを左辺に移項すれば(44)式右辺のマトリクスに半無限層を表す項が付加される。また、外部からの水の流入・流出がない場合には、薄層境界面の間隙水の流入・流出量の連続条件(19)式および弾性半無限層との接触面での境界条件(28)式から、 $\Psi_j$  ( $j = 2, \dots, N+1$ ) はゼロとなる。

点加振や等分布加振の場合にはこれらの加振力を(30)～(37)式と同様の変数分離形で表し、これを(44)式の右辺に代入する。例えば第  $n$  薄層境界面の半径  $R$  の円形領域に大きさ  $q$  の水平方向等分布加振を与えたときの加振力の変数分離形  $\mathbf{F}^H$  は次のように表される。

$$\mathbf{F}^H = \begin{Bmatrix} M \\ \Psi_n \\ F_n^z \\ F_n^r \\ F_n^\theta \\ M \end{Bmatrix} = q \frac{R}{k} J_1(kR) \begin{Bmatrix} \{0\} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (\mu=1) \dots\dots\dots (48)$$

$$\mathbf{F}^H = \{0\} \quad (\mu \neq 1) \dots\dots\dots (49)$$

あるいは第  $n$  薄層境界面の半径  $R$  の円形領域に大きさ  $q$  の上下方向等分布加振を与えたときの加振力の変数分離形

Table 1 各薄層要素マトリクスの係数  
Elements of Thin Layered Element Matrices

$$\mathbf{A}^R = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} -\frac{2}{F}n^2 & 0 & 0 & -\frac{1}{F}n^2 & 0 & 0 \\ & 2G & 0 & 0 & G & 0 \\ & & 2(\lambda+2G) & 0 & 0 & (\lambda+2G) \\ & & & -\frac{2}{F}n^2 & 0 & 0 \\ & & & & 2G & 0 \\ & & & & & 2(\lambda+2G) \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^R = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2Tn & 0 & 0 & Tn \\ & 0 & 3(\lambda-G) & 0 & 0 & 3(\lambda+G) \\ & & 0 & Tn & -3(\lambda+G) & 0 \\ & & & 0 & 0 & 2Tn \\ & & & & 0 & -3(\lambda-G) \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}^R = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R} \frac{h}{3} n^2 & \frac{2R+N}{2R} n & 0 & -\frac{1}{R} \frac{h}{6} n^2 & -\frac{N}{2R} n & 0 \\ & \frac{\lambda+2G}{h} & 0 & \frac{N}{2R} n & -\frac{\lambda+2G}{h} & 0 \\ & & \frac{G}{h} & 0 & 0 & -\frac{G}{h} \\ & & & -\frac{1}{R} \frac{h}{3} n^2 & -\frac{2R+N}{2R} n & 0 \\ & & & & \frac{\lambda+2G}{h} & 0 \\ & & & & & \frac{G}{h} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{F} \frac{1}{h} n^2 & -\frac{i\omega b}{2F} n & 0 & \frac{1}{F} \frac{1}{h} n^2 & -\frac{i\omega b}{2F} n & 0 \\ & \frac{h}{3} M & 0 & \frac{i\omega b}{2F} n & \frac{h}{6} M & 0 \\ & & \frac{h}{3} M & 0 & 0 & \frac{h}{6} M \\ & & & -\frac{1}{F} \frac{1}{h} n^2 & \frac{i\omega b}{2F} n & 0 \\ & & & & \frac{h}{3} M & 0 \\ & & & & & \frac{h}{3} M \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^L = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2G & G \\ \text{symm.} & 2G \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}^L = \begin{bmatrix} \frac{G}{h} & -\frac{G}{h} \\ \text{symm.} & \frac{G}{h} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{h}{3} M & \frac{h}{6} M \\ \text{symm.} & \frac{h}{3} M \end{bmatrix}$$

ここで、 $T = \left( \frac{N}{R} + \frac{i\omega b}{F} \right) h$

$\mathbf{F}^V$  は次のように表される。

$$\mathbf{F}^V = \begin{cases} \begin{Bmatrix} \mathbf{M} \\ \Psi_n \\ F_n^z \\ F_n^r \\ F_n^\theta \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} \\ \end{cases} = q \frac{R}{k} J_1(kR) \begin{cases} \begin{Bmatrix} \{0\} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \{0\} \end{Bmatrix} \\ \end{cases} \quad (\mu=0) \dots \dots \dots (50)$$

$$\mathbf{F}^V = \{0\} \quad (\mu \neq 0) \dots \dots \dots (51)$$

この場合のマトリクス方程式(44)の解は、弾性地盤の薄層要素法と同様にして、固有モードの重ねあわせにより求めることができる。すなわち、(44)式の右辺をゼロベクトルとした場合の波数kに関する固有値問題の解(固有値および固有ベクトル)により、第n薄層境界面に間隙水の流入量  $\Psi_n$  あるいは加振力  $F_n^X$  ( $X=r, \theta, z$ ) を与えたときの第m薄層境界面の変位  $U_m$ ,  $V_m$  および  $W_m$ , あるいは間隙水圧  $P_m$  は次のような対称マトリクスで表される。

$$\begin{Bmatrix} U_m \\ V_m \\ W_m \\ P_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{uu}^{mn} & 0 & f_{uw}^{mn} & f_{up}^{mn} \\ 0 & f_{vv}^{mn} & 0 & 0 \\ f_{wu}^{mn} & 0 & f_{ww}^{mn} & f_{wp}^{mn} \\ f_{pu}^{mn} & 0 & f_{pw}^{mn} & f_{pp}^{mn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_n^r \\ F_n^\theta \\ F_n^z \\ \Psi_n \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (52)$$

ここで、 $m, n=1, \dots, N+1$  であり、

$$f_{\alpha\beta}^{mn} = \sum_{l=1}^{3N+2} \varphi_\alpha^{ml} \varphi_\beta^{nl} \frac{d_{\alpha\beta}}{k^2 - k_l^2} \quad (\alpha, \beta = u, w, p) \dots \dots \dots (53)$$

$$f_{vv}^{mn} = \sum_{l=1}^{N+1} \varphi_v^{ml} \varphi_v^{nl} \frac{d_{vv}}{k^2 - (k_l^L)^2} \dots \dots \dots (54)$$

である。ただし、前述のように  $P_l$  および  $\Psi_l$  に関する行と列は除かれる。また、 $k_l$  ( $l=1, \dots, 3N+2$ ) および  $k_l^L$  ( $l=1, \dots, N+1$ ) は各々RayleighモードおよびLoveモードに対応する複素固有値のうち虚部が負のものであり、 $\varphi_u^{ml}$ ,  $\varphi_w^{ml}$  および  $\varphi_p^{ml}$  は複素固有値  $k_l$  に対応する正規化された固有ベクトルの各々  $U_m$ ,  $W_m$  および  $P_m$  に対応する成分、 $\varphi_v^{ml}$  は複素固有値  $k_l^L$  に対応する正規化された固有ベクトルの  $V_m$  に対応する成分を表す。さらに、式中の  $d_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = p, w, u, v$ ) は以下のように表される。

$$\begin{aligned} d_{uu} &= d_{vv} = d_{ww} = d_{pp} = d_{pw} = d_{wp} = 1 \\ d_{wu} &= d_{pu} = k_l/k \\ d_{uw} &= d_{up} = k/k_l \end{aligned} \dots \dots \dots (55)$$

こうして得られた解  $U_m$ ,  $V_m$ ,  $W_m$  および  $P_m$  を (30) ~ (37) 式に代入し、波数  $k$  およびフーリエ係数  $\mu$  に関し次のようにモード合成を行うことにより加振解が得られる。

$$u(r, \theta, z_m) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \int_0^{\infty} k U_m J'_\mu(kr) \begin{bmatrix} \cos(\mu\theta) \\ \sin(\mu\theta) \end{bmatrix} dk + \sum_{\mu=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\mu}{r} V_m J_\mu(kr) \begin{bmatrix} \cos(\mu\theta) \\ \sin(\mu\theta) \end{bmatrix} dk \dots \dots (56)$$

$$v(r, \theta, z_m) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\mu}{r} U_m J_\mu(kr) \begin{bmatrix} -\sin(\mu\theta) \\ \cos(\mu\theta) \end{bmatrix} dk + \sum_{\mu=0}^{\infty} \int_0^{\infty} k V_m J'_\mu(kr) \begin{bmatrix} -\sin(\mu\theta) \\ \cos(\mu\theta) \end{bmatrix} dk \dots \dots (57)$$

$$w(r, \theta, z_m) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \int_0^{\infty} k W_m J_\mu(kr) \begin{bmatrix} \cos(\mu\theta) \\ \sin(\mu\theta) \end{bmatrix} dk \dots \dots \dots (58)$$

$$p(r, \theta, z_m) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \int_0^{\infty} k P_m J_\mu(kr) \begin{bmatrix} \cos(\mu\theta) \\ \sin(\mu\theta) \end{bmatrix} dk \dots \dots \dots (59)$$

(48) および (49) 式、あるいは (50) および (51) 式を (52) 式に代入して求まる  $U_m$ ,  $V_m$ ,  $W_m$  および  $P_m$  をさらに (56) ~ (59) 式に代入すると等分布加振解を得る。ここで (49) あるいは (51) 式より  $\mu$  に関する和は  $\mu=0$  あるいは  $\mu=1$  のときのみ有効である。また、波数  $k$  に関する無限積分の値が厳密に評価されるため、最終的に得られる等分布加振解は積分のない形式で次のように表される。まず、水平方向等分布加振に対し、

$$u(r, \theta, z_m) = qR \left[ \sum_{l=1}^{3N+2} \varphi_u^{ml} \varphi_u^{nl} \frac{d}{dr} I_{3l} + \sum_{l=1}^{N+1} \varphi_v^{ml} \varphi_v^{nl} \frac{1}{r} I_{3l}^L \right] \cos\theta \dots \dots \dots (60)$$

$$v(r, \theta, z_m) = qR \left[ \sum_{l=1}^{3N+2} \varphi_u^{ml} \varphi_u^{nl} \frac{1}{r} I_{3l} + \sum_{l=1}^{N+1} \varphi_v^{ml} \varphi_v^{nl} \frac{d}{dr} I_{3l}^L \right] (-\sin\theta) \dots \dots \dots (61)$$

$$w(r, \theta, z_m) = qR \sum_{l=1}^{3N+2} \varphi_w^{ml} \varphi_w^{nl} I_{3l} k_l \cos\theta \dots \dots \dots (62)$$

$$p(r, \theta, z_m) = qR \sum_{l=1}^{3N+2} \varphi_p^{ml} \varphi_p^{nl} I_{3l} k_l \cos\theta \dots \dots \dots (63)$$

となる。水平方向等分布加振は  $\mu=1$  の場合に対応し、(56) ~ (59) 式における  $\theta$  の関数は括弧の上部の3角関数を用いている。

次に、上下方向等分布加振に対し、

$$u(r, \theta, z_m) = -qR \sum_{l=1}^{3N+2} \varphi_u^{ml} \varphi_w^{nl} I_{2l} / k_l \dots \dots \dots (64)$$

$$v(r, \theta, z_m) = 0 \dots \dots \dots (65)$$

$$w(r, \theta, z_m) = qR \sum_{l=1}^{3N+2} \varphi_w^{ml} \varphi_w^{nl} I_{1l} \dots \dots \dots (66)$$

$$p(r, \theta, z_m) = qR \sum_{l=1}^{3N+2} \varphi_p^{ml} \varphi_w^{nl} I_{1l} \dots \dots \dots (67)$$

となる。上下方向等分布加振は  $\mu=0$  の場合に対応する。ここで、関数  $I_{1l}$ ,  $I_{2l}$  および  $I_{3l}$  は以下のように表される。

$$I_{1l} = \begin{cases} \frac{\pi}{2ik_l} J_0(k_l r) H_1^{(2)}(k_l R) - \frac{1}{Rk_l^2} & (0 \leq r \leq R) \\ \frac{\pi}{2ik_l} J_1(k_l R) H_0^{(2)}(k_l r) & (R \leq r) \end{cases} \dots \dots (68)$$

$$I_{2l} = \begin{cases} \frac{\pi}{2i} J_1(k_l r) H_1^{(2)}(k_l R) & (0 \leq r \leq R) \\ \frac{\pi}{2i} J_1(k_l R) H_1^{(2)}(k_l r) & (R \leq r) \end{cases} \dots \dots (69)$$

$$I_{3l} = \begin{cases} \frac{\pi}{2ik_l^2} J_1(k_l r) H_1^{(2)}(k_l R) - \frac{r}{2Rk_l^2} & (0 \leq r \leq R) \\ \frac{\pi}{2ik_l^2} J_1(k_l R) H_1^{(2)}(k_l r) - \frac{R}{2rk_l^2} & (R \leq r) \end{cases} \dots \dots (70)$$

ここで、 $H_i^{(2)}$  は第2種  $i$  次のハンケル関数である。また  $I_{3l}^L$  は (70) 式の  $k_l$  を  $k_l^L$  に替えることにより得られる。

点加振解は等分布加振解の半径  $R$  をゼロに近づけたときの極限值として以下のように表される。まず、単位水平点

加振解が以下のように得られる。

$$u(r, \theta, z_m) = \frac{1}{4i} \left[ \sum_{l=1}^{3N+2} \phi_u^{ml} \phi_u^{nl} \frac{d}{dr} H_1^{(2)}(k_l r) / k_l + \sum_{l=1}^{N+1} \phi_v^{ml} \phi_v^{nl} \frac{1}{r} H_1^{(2)}(k_l^L r) / k_l^L \right] \cos \theta \dots (71)$$

$$v(r, \theta, z_m) = \frac{1}{4i} \left[ \sum_{l=1}^{3N+2} \phi_u^{ml} \phi_u^{nl} \frac{1}{r} H_1^{(2)}(k_l r) / k_l + \sum_{l=1}^{N+1} \phi_v^{ml} \phi_v^{nl} \frac{d}{dr} H_1^{(2)}(k_l^L r) / k_l^L \right] (-\sin \theta) \dots (72)$$

$$w(r, \theta, z_m) = \frac{1}{4i} \sum_{l=1}^{3N+2} \phi_w^{ml} \phi_w^{nl} H_1^{(2)}(k_l r) \cos \theta \dots (73)$$

$$p(r, \theta, z_m) = \frac{1}{4i} \sum_{l=1}^{3N+2} \phi_p^{ml} \phi_p^{nl} H_1^{(2)}(k_l r) \cos \theta \dots (74)$$

次に単位上下点加振解が以下のように得られる。

$$u(r, \theta, z_m) = -\frac{1}{4i} \sum_{l=1}^{3N+2} \phi_u^{ml} \phi_w^{nl} H_1^{(2)}(k_l r) \dots (75)$$

$$v(r, \theta, z_m) = 0 \dots (76)$$

$$w(r, \theta, z_m) = \frac{1}{4i} \sum_{l=1}^{3N+2} \phi_w^{ml} \phi_w^{nl} H_0^{(2)}(k_l r) \dots (77)$$

$$p(r, \theta, z_m) = \frac{1}{4i} \sum_{l=1}^{3N+2} \phi_p^{ml} \phi_w^{nl} H_0^{(2)}(k_l r) \dots (78)$$

飽和多孔質層と弾性層が混合した成層地盤の場合、弾性層において(42)および(43)式の薄層要素剛性マトリクスを弾性のもので置き換え、境界面における弾性層の変位および応力と飽和多孔質層の土粒子骨格の変位および全応力の連続性、さらに境界面での非透水性を仮定して全体剛性マトリクスを構成することにより上の定式化が適用できる。この場合、Rayleighモードの固有値の数が弾性薄層数だけ減少するため、(53)~(78)式中の総和の個数もその数だけ減少することになる。

### 3. 既往の数値解との比較

Halpern等<sup>3)</sup>はHelmholtz分解とHankel変換を利用して飽和多孔質半無限地盤地表面に上下方向の点加振を加えたと

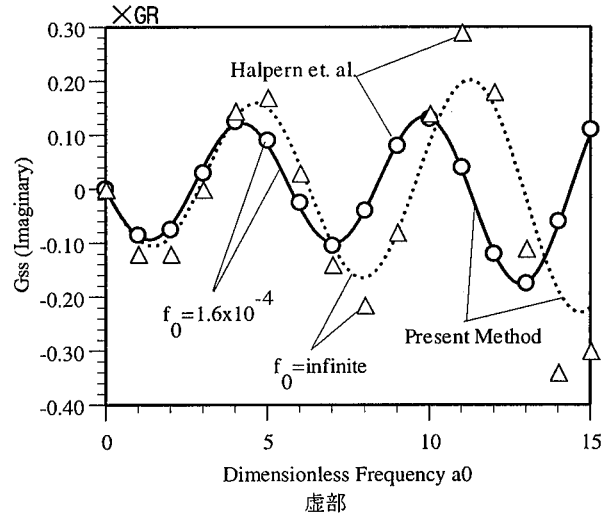
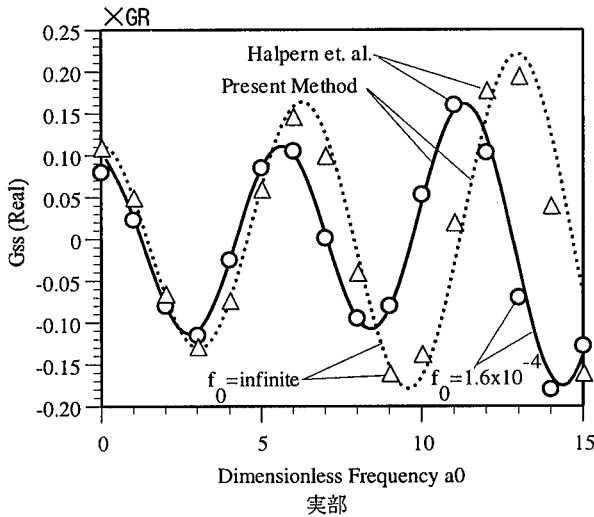


Fig.2 飽和多孔質半無限地盤の上下方向点加振解  
Vertical Point Load Solution of Fluid-filled Poroelastic Halfspace

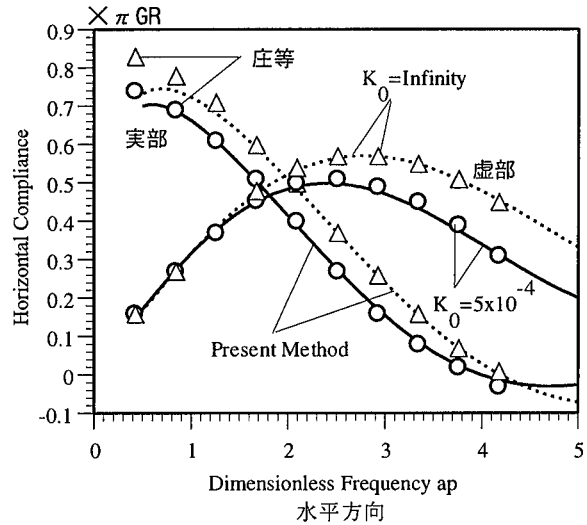
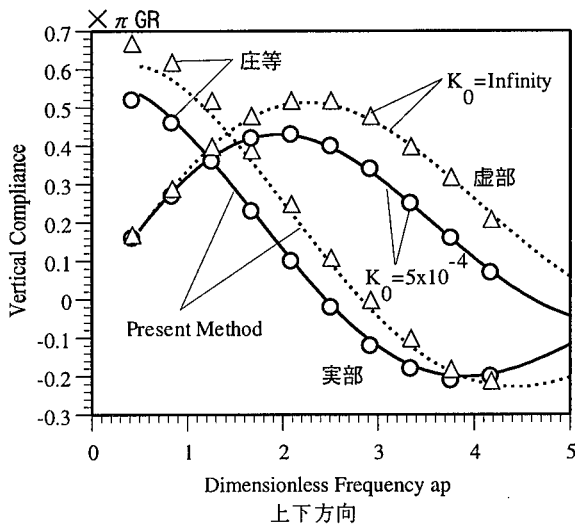


Fig.3 飽和多孔質半無限地盤の地表面円形基礎の動的コンプライアンス  
Dynamic Compliances of Circular Disc on Fluid-filled Poroelastic Halfspace

きの上下方向の変位解を示している。この解は加振力を全て土粒子骨格が負担したときの土粒子骨格の変位関数  $G_{ss}$  および間隙水の変位関数  $G_{\beta}$ 、さらに加振力を全て間隙水が負担したときの土粒子骨格の変位関数  $G_y$  および間隙水の変位関数  $G_{\beta}$  の4つの関数から構成される。本研究で示した薄層要素法による定式化では、地表面の間隙水圧をゼロとしているため、地表面加振力はすべて土粒子骨格が負担することになり、地表面点加振解は  $G_{ss}$  に相当する。そこで、Halpern等の示した定数を用いて(77)式により地表面上下点加振解を算定し、Halpern等の  $G_{ss}$  と比較した結果をFig. 2に示す。同図の縦軸は  $G_r$  ( $r$  は加振点からの距離、 $G$  は土粒子骨格のせん断弾性係数) を乗じて無次元表示されている。薄層モデルは、地表面からS波の波長程度の深さまでが飽和多孔質地盤であり、その下は同じ地盤物性を持つ間隙水を含まない半無限弾性層とし、2層間の間隙水の流入出はないものとした。無次元透水係数  $f_0 = k\omega/g$  ( $k$  は透水係数、 $\omega$  は角振動数、 $g$  は重力加速度)はHalpern等のものを用い、 $f_0 = 1.6 \times 10^{-4}$  と  $f_0 = \infty$  について比較した。無次元振動数(距離)  $a_0 = \omega r / \sqrt{G/\rho^*}$  ( $\rho^*$  は混合体の質量)が大きくなると  $f_0 = \infty$  の場合の虚部の結果がHalpern等のものより若干小さくなるが、両者はよく対応している。

一方、庄等<sup>4)</sup>はHalpern等と同様の手法を用いて飽和多孔質半無限地盤上の円形基礎の動的コンプライアンスを算定した。円形基礎の動的コンプライアンスは薄層要素法による等分布加振解(60)~(67)式の基礎中央すなわち  $r=0$  での地盤変位から求められるが、これらのうち(66)式の上下方向のコンプライアンスと(60)式の水平方向のコンプライアンスについて庄等の結果と比較したものをFig. 3に示す。同図の縦軸は  $\pi GR$  ( $R$  は基礎の半径) を乗じて無次元表示されている。この場合も、薄層モデルは飽和多孔質層の下に同じ地盤物性を持つ半無限弾成層があるものとする。庄等<sup>4)</sup>による無次元透水係数  $K_0 = kV_s/gR$  の値2ケースについて比較した。ここに、 $V_s$  は土粒子骨格のS波速度である。また、無次元振動数  $a_p = \omega R / \sqrt{G/\rho^*}$  はHalpern等<sup>3)</sup>のものを採用しており庄等のものと若干異なっている。すなわち、庄等の  $a_p$  の定義は  $\rho^*$  を土粒子本体の質量としているため、庄等の  $a_p = 5$  はHalpern等の  $a_p = 4.17$  に相当する。Fig. 3は庄等の結果をHalpern等の  $a_p$  に合わせて表したものである。両者の結果がほぼ一致していることが確認できる。

#### 4. 地表面基礎のインピーダンス

間隙水の存在および透水係数が基礎の動特性に及ぼす影響を調べるため、飽和多孔質成層地盤および弾性成層地盤上の地表面基礎のインピーダンスを比較した結果をFig. 4に示す。

基礎のインピーダンスは、基礎の占める領域を小領域に分割し、各々の小領域における等分布加振解((60)~(67)式)および小領域間の点加振解((71)~(78)式)から小領域間の加振力・変位関係を表す剛性マトリクスを作成し、

変位を規定して各小領域に生ずる反力を集計することにより得られる。

基礎は一辺の長さ30mの正方形とする。地盤モデルとして、透水係数の異なる飽和多孔質地盤2ケース、さらに飽和多孔質地盤の動特性を近似する目的で弾性地盤2ケースを想定した(Table 2)。

飽和多孔質地盤の土粒子骨格のS波速度、ポアソン比および間隙率は各々100m/s、0.3および0.3とし、土粒子本体の単位体積重量は  $2.0 \text{ tf/m}^3$ 、間隙水の体積弾性係数は  $5.83 \times 10^4 \text{ tf/m}^2$  とする。透水係数の大小は、運動方程式中に現れる浸透力を表す減衰係数  $b$  で与えることとし、その値が1000(透水係数が比較的小さいもの)と0(透水係数が無限大のもの)の2種類を採用した。一方、弾性地盤の物性として、CASE1eは混合体としての単位体積重量すなわち  $1.7 \text{ tf/m}^3$  を用い、CASE2eは間隙水がないとしたときの土粒子骨格の単位体積重量すなわち  $1.4 \text{ tf/m}^3$  を用いた。また、せん断弾性係数は土粒子骨格のものと同一とし、S波速度は各々の単位体積重量を用いて決定した。さらに、CASE1eは、間隙水と土粒子骨格の相対運動がない場合の飽和多孔質地盤のP波速度から、またCASE2eは間隙水の存在が土粒子骨格の運動に全く影響を及ぼさなかった場合のP波速度からポアソン比を決定した。半無限弾性基礎のポアソン比および単位体積重量は各々0.4および  $1.9 \text{ tf/m}^3$  とした。本手法の定式化では地表面加振点での間隙水圧がゼロとなっているため、基礎底面を含め地表面は間隙水が自由に流入出できる透水性境界となっている。しかし、Halpern等<sup>3)</sup>は、地盤の現実的な透水係数の範囲では、基礎底面での透水性がインピーダンスの結果にあまり影響を及ぼさないことを示しており、透水性境界としても十分な精度でインピーダンスを算定することが可能と考えられる。

結果を見ると、透水係数の比較的小さい飽和多孔質地盤CASE1pのインピーダンスの算定結果は、弾性地盤CASE1eのものと低周波数域で若干差があるものの全体的によく一致する。また、透水係数の大きい飽和多孔質地盤CASE2pのインピーダンスの算定結果は、弾性地盤CASE2eのものと低周波数域でよく一致しているものの高周波数域ではやや差が大きくなる。これは、透水係数の小さい飽和多孔質地盤では土粒子と間隙水が一体となって運動しており、地表面基礎の動特性は間隙水と土粒子骨格の相対運動がない場合の飽和多孔質地盤のP波速度から算定したポアソン比を持つ弾性地盤で近似できること、また透水係数の大きい飽和多孔質地盤では土粒子の運動が間隙水の影響をあまり受けないため、地表面基礎の動特性は飽和多孔質地盤の土粒子骨

Table 2 解析ケース  
Cases for Calculation

解析ケース		CASE1p	CASE2p	CASE1e	CASE2e
地盤種別		飽和多孔質	飽和多孔質	弾性	弾性
表層 H=20m	$V_s$ (m/s)	100	100	90.75	100
	$\nu$	0.3	0.3	0.496	0.3
	$b$ (tf*sec/m <sup>4</sup> )	1000	0	-	-
地盤種別		弾性	弾性	弾性	弾性
半無限層	$V_s$ (m/s)	400	400	400	400
	$\nu$	0.4	0.4	0.4	0.4

格と同じポアソン比を用いた弾性地盤によりある程度表現できることを示唆している。飽和多孔質地盤の透水係数がこの2ケースの間にあるときには、ポアソン比も弾性地盤2ケースの間に設定することにより近似できると予測されるが、これについてはより詳細な検討が必要である。

### 5. おわりに

下方地盤の半無限性を考慮した3次元薄層要素法を用いて飽和多孔質地盤における点加振解を誘導した。さらに、本手法による計算値と既往の結果とを比較してその妥当性を確かめるとともに、飽和多孔質成層地盤における地表面基礎のインピーダンスを算定し、間隙水の存在および透水係数が基礎の動特性に及ぼす影響について考察を加えた。

本論文では、点加振解の応用例として地表面基礎のインピーダンスについて解析したが、地中点加振解を用いれば埋込み基礎のインピーダンスと基礎入力動の解析への適用も可能である。また、リング加振解も同様に導くことができ、群杭基礎への拡張も可能と考える。本論文はそうした拡張への第一歩となるものである。

### 謝辞

本研究を実施するに当たり、東京理科大学理工学部建築学科の井口道雄教授にご指導を賜りました。ここに感謝の意を表します。

### 参考文献

- 1) M. A. Biot: Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid, I. Low-Frequency Range, J. of Acous. Soc. of Am. Vol.28, No.2, p.168~178, (1956)
- 2) O. C. Zienkiewicz and T. Shiomi: Dynamic Behavior of Saturated Porous Media, Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech., Vol.8, p.71~96, (1984)
- 3) M. R. Halpern and P. Christiano: Response of Poroelastic Half-space to Steady-state Harmonic Surface Traction, Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech. Vol.10, p.609~632, (1986)
- 4) 庄健介, 北村泰寿: 半無限多孔質飽和弾性体上の円型基礎の動的コンプライアンス, 構造工学論文集, Vol.34A, p.855~864, (1988.3)
- 5) J. Chen: Time Domain Fundamental Solution to Biot's Complete Equations of Dynamic Poroelasticity. Part I: Two-dimensional Solution, Int. J. Solids Struct. Vol.31, No.10, p.1447~1490, (1994)
- 6) S. Bougacha, J. L. Tassoulas and J. M. Roesset: Analysis of Foundations on Fluid-filled Poroelastic Stratum, J. Eng. Mech. ASCE Vol.119, p.1632~1648, (1993)
- 7) 宿里勝信, 小堀鐸二, 立川剛: 複合体理論を適用し

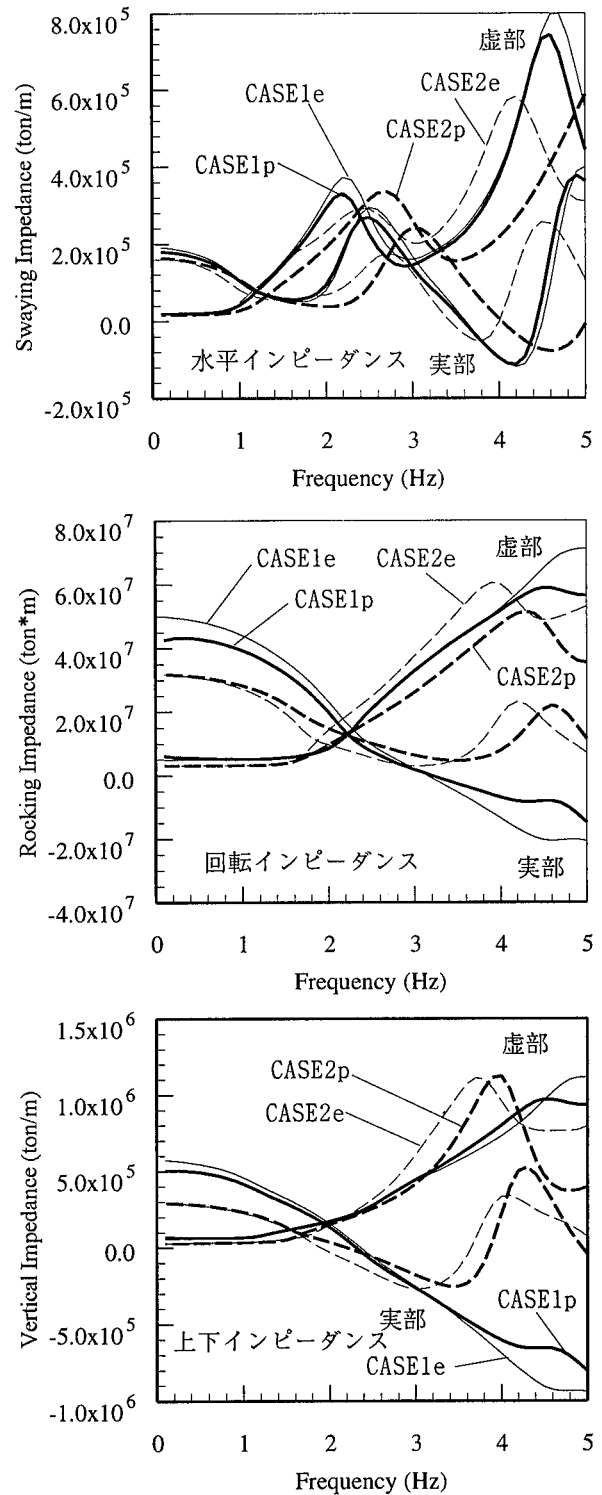


Fig.4 飽和多孔質成層地盤の地表面正方形基礎のインピーダンス  
Impedances of Square Plate on Layered Fluid-filled Poroelastic Halfspace

モデル化した沖積層地盤の地盤骨組と間隙水の動的連成機構の解明について, 日本建築学会論文報告集, 第476号, p.39~48, (1995.10)

- 8) E. Kausel: Physical Interpretation and Stability of Paraxial Boundary Conditions, Bull. Seism. Soc. Am. Vol.82(2), p.898~913, (1992)