

# テーパ付き高層タワーの空力不安定振動に関する数値解析

小野 佳之

## Computational Simulation for Aerodynamic Instability of Tapered High-Rise Tower

Yoshiyuki ONO

### Abstract

Computational Fluid dynamics (CFD) may be an effective tool for estimating wind load such as aerodynamic instability of a structure. In this paper, the CFD method is applied to the problem of aerodynamic instability of a high-rise tower. First, a numerical model is constructed, and is then validated for estimation of response characteristics through comparison with experimental data. Next, a physical mechanism of vortex-induced oscillation of a tapered high-rise tower is discussed by use of a flow visualization technique.

### 概 要

高層タワーの空力不安定振動などの耐風安全性に関する風荷重の評価において、数値流体計算は構造物の形状や振動モード、質量比の再現が容易に行えるという利点があるため、今後有効な要素技術になるものと期待されている。また、数値計算結果のアニメーションは、例えば振動を招く風の流れ特性の把握や、振動を抑制する対策の検討を進める上で有効なツールとなると考えられる。本報では、高層タワーの空力不安定振動を評価するための流体計算手法を構築したこと、基本問題としてロッキング振動モードを有する三次元円柱の渦励振を取り上げ、本手法の予測精度を検証したこと、曲げモードが卓越したテーパ付き高層タワーの渦励振に関して、流体計算の利点である流れの可視化に基づき、振動現象を考察した結果について記す。

### 1. はじめに

高層構造物は、上空の強い風の影響を受けると、場合によっては風揺れの問題が発生する。通常、風振動に対しては、風洞実験により静止した縮尺模型に作用する風外力を求め、別途応答解析を行うことで耐風安全性の評価が行われている。しかし、通信用タワーなどの超高層構造物のケースでは、構造物自身の振動と周辺の風の流れが相互に作用し、その結果、大振幅振動へと至る空力不安定振動が生じる恐れがある。このような不安定振動を風洞実験で扱う場合、幾何学的相似則に加え、振動モードや質量比などの振動特性の相似則を満足させた模型製作を行う必要があり、多くの労力と費用を要するという問題がある。それに対し数値シミュレーションでは構造物の形状やその動特性の再現が容易である。特に、流体計算は、近年、計算機性能が飛躍的に向上していることから、今後、風洞実験に代わって構造物の風荷重を

評価するための有効な要素技術になるものと期待されている。流体計算では構造物の振動と風の流れを同時にアニメーションなどで表示することも可能であり、風振動をもたらす物理現象の把握にも有効となる。ただし、空力不安定振動問題への流体計算の適用のほとんどは、一様な気流の中で二次元物体が流れと平行に振動するケースに限られているのが現状である。

本研究では構造物の耐風設計に際して、合理的に風荷重を評価することが可能な数値シミュレーション技術の開発を目指している。前報<sup>1)</sup>では、その第一段階として、接近流に乱れを持たせた流体計算手法を構築し、二次元基本断面構造物の空力不安定振動の評価に適用した結果について報告した。本報では、同計算手法を三次元構造物の空力不安定振動問題に展開した上で、まず、基本問題としてロッキング振動モードを有する円柱構造物の渦励振問題に適用し、本手法の予測精度を検証する。次に、曲げモードを有するテーパ

付き高層タワーの渦励振を再現し、風揺れをもたらす物理現象について考察する。

## 2. 流れと構造物振動の連成解析手法

### 2.1 流体解析手法

流体の支配方程式は非圧縮性のNavier・Stokes方程式と連続の式である。計算アルゴリズムは、フラクショナル・ステップ法に基づく。時間積分は、クランク・ニコルソン法を用いた。空間微分は二次精度の中心差分とし、対流項には高次精度の補間法を用いた。さらに、対流項には数値不安定性を除去する為に小さな数値粘性 $=0.2$  (UTOPIAの1/5)を加えた。また、乱流モデルはダイナミックSGSモデルを用いた。なお、計算手法の詳細は前報<sup>1)</sup>に記した。

一方、本報で扱う三次元物体まわりの流れ解析では、前報で扱った二次元物体の場合とは異なり自由端上方領域が存在するため格子生成が必ずしも容易ではない。一般には、複数の格子を用いる方法や非構造格子の適用により解決されるが、多くの場合、計算負荷の増加が伴うため、大規模・長時間計算が要求される空力不安定振動問題への展開はほとんど実現されなかった。そこで、以下の方法により単一の格子を用いて三次元円柱まわりに格子を形成した。

- 1) 側面に関しては前報<sup>1)</sup>の二次元円柱まわりの流れ解析において用いたものと同タイプの格子 (Fig.1(a)) を鉛直方向に積み重ねる (Fig.1(b))。
- 2) 自由端より上方の領域では円内部にもO型格子を用いて格子形成する (Fig. 1(c))。
- 3) 円中心では格子線の端部が集中し特異な処理が必要となるため、円中心を介して向かい合う点の物理量を用いて差分近似を行う。

### 2.2 振動解析手法

精度検証のための解析では、三次元円柱を剛体、風励起振動をロッキング振動と仮定した。一方、テーパー付きタワーの解析では、一次振動を曲げモード型と仮定して、モード解析法を採用した。

2.2.1 ロッキング振動解析 ロッキング振動の支配方程式は以下の通りである。

$$\ddot{\theta} + 2h\left(\frac{2\pi}{Vr}\right)\dot{\theta} + \left(\frac{2\pi}{Vr}\right)^2\theta = \frac{D}{H} \frac{C_{MX}}{2\gamma} \quad (1)$$

ここに、 $\theta$  は転倒角、 $h$  は減衰定数、 $Vr = Uf/D$  は無次元風速であり、 $\gamma = I/\rho D^2 H^3$  は質量比。 $\rho$ は構造物の密度、 $I$  は質量慣性モーメント、 $C_{MX}$  は風力による転倒モーメント係数、 $D$ 、 $H$  は円柱の直径、高さである。

転倒角は時間ステップ毎に流体計算から求めた $C_{MX}$ を(1)式に代入して算出する。

2.2.2 モード解析手法 解析対象とするタワーを $n$ 質

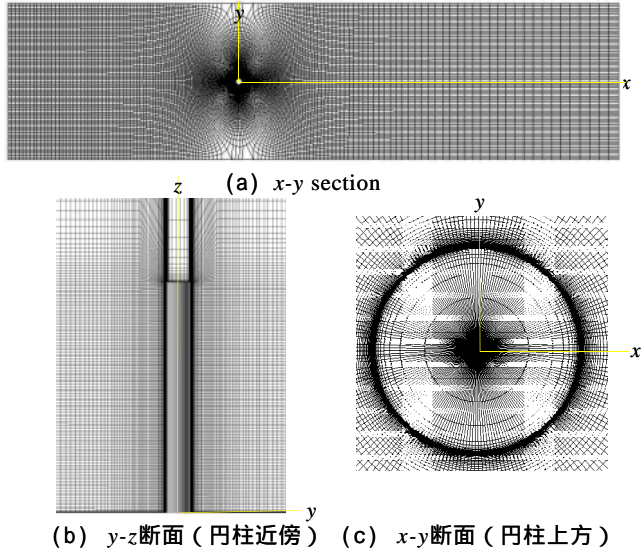


Fig. 1 本計算で用いる計算格子  
Computational Mesh in the Present Simulation

点モデルで近似し、モード解析を行う。すなわち、構造物の変位を $\{y\} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ 、 $s$ 次の振動モードを $\{\mu_s\}$ 、一般化変位を $\{y_s\}$ とすると、変位は $\{y\} = \sum_{s=1}^n \{y_s\} \mu_s$ となる。なお、 $s$ 次の一般化変位 $y_s$ の支配方程式は以下になる。

$$\ddot{y}_s(\tau) + 2h\left(\frac{2\pi}{Vr}\right)_s \dot{y}_s(\tau) + \left(\frac{2\pi}{Vr}\right)_s^2 y_s(\tau) = \frac{\rho D^2}{2} \frac{\sum_{k=1}^n \mu_k \Delta H_k C_F(\tau)}{\sum_{k=1}^n m_k \mu_k^2} \quad (2)$$

ここに $y_s = y/D$ 、 $h$ は $s$ 次の一般化減衰であり、 $Vr = (2\pi U/s\omega D)$ は無次元風速、 $s$ は $s$ 次の固有円振動数である。また、 $m_k$ は質点 $k$ の質量、 $\Delta H_k$ は質点 $k$ の高さ幅、 $C_F(\tau)$ は質点 $k$ の空気力係数である。

### 2.3 連成解析

流れと構造物振動の連成解析は、上述した流体解析と振動解析を用いて、以下の手順で行う。

- 1) 流体計算を行い構造物に作用する風外力を求める。
- 2) 振動方程式に風外力を入力し振動変位を求める。
- 3) 構造物を振動変分移動させ、計算格子を再形成する。
- 4) 構造物表面の境界条件、格子の移動速度を設定する。
- 5) 1.に戻る。

## 3 境界層乱流の生成方法

構造物に作用する自然風は十分に発達した乱れを含む流れとなっており、その特性により構造物に作用する風圧力特性が変化する。したがって、風荷重の評価を行う際には、自然風の影響を計算に取り込む必要がある。本報では、自然風を模擬した流入変動風の生成に片岡の方法<sup>2)</sup>を採用した。ターゲットとする平均風速の鉛直分布は、「建築物荷重指針・同解説」<sup>3)</sup>の地表面粗度区分

とした。

Fig. 2(a), (b)に抽出断面における平均風速の鉛直分布をターゲットとしたプロファイルとともに示す。対数則域内および粘性底層では若干変化しているものの、設定した平均風速のプロファイルはほぼ維持されている。Fig. 2(c)に抽出断面における主流方向の乱れ強さの鉛直分布を示す。風洞実験結果<sup>4)</sup>に比べて若干変動が小さいが、分布の性状はほぼ対応している。Fig.2(d)に抽出断面の $y=0, z/D=10D$ の高さにおける変動風速のパワースペクトル密度の分布を示す。計算結果では格子解像度の影響から高周波成分でのパワーの低下が見られる。ただし、それ以外の周波数ではカルマン型のパワースペクトル密度の分布と対応している。

#### 4. 三次元円柱の渦励振に関する数値解析

ここでは、本計算手法を一樣流中および境界層乱流中の三次元円柱の渦励振問題に適用し、渦励振応答の予測精度を確認しておく。ところで、振動する円柱まわりの流れ特性に関しては、また、円筒形高層タワーの渦励振現象を考察することを前提に、三次元円柱構造物がロッキング振動したときの、構造物に作用する空気力特性および流れの構造について明らかにしておく。

##### 4.1 解析モデルおよび境界条件

解析モデルは、河井らの振動実験<sup>5)</sup>の設定条件を参考に、円柱のアスペクト比( $H/D$ )を10とし、スクルートン数( $2m/\rho D^2 \cdot 2\pi h$ )を2、質量比( $m(z)/\rho D^2$ )を108と設定した。境界条件は円柱表面ならびに床面上ではN o - slip条件、側面および上方ではFree-slip条件(法線方向速度0、他の成分は勾配0)を与えた。流入条件は一樣流のケースは、 $u$ (主流方向) $=U$ 、 $v$ (主流直角方向) $=0$ 、 $w$ (スパン方向) $=0$ 、境界層乱流のケースは3.で作成したものを与えた。流出境界条件は移流型の境界条件を用いた。代表長さを流れを円柱の直径 $D$ 、代表風速を $U$ としたときのレイノルズ数( $Re=UD/\nu$ )を20,000とした。本計算における無次元時間刻みは0.001である。格子点数は、円柱の周方向に201、半径方向に170、鉛直方向に140とした。

##### 4.2 本計算手法の渦励振応答の予測精度の検証

4.2.1 振動応答の実験結果との比較 Fig. 3(a)に一樣流中の円柱頂部の応答振幅の本計算結果を河井らの実験結果<sup>5)</sup>とともに示す。横軸は無次元風速 $V_r$ 、縦軸は河井らの実験結果に対応させ振動振幅のrms値としている。若干の差は見られるものの、無次元風速( $V_r$ )が5付近から励振が開始され、 $V_r=6$ 付近で増大し、その後風速の増加に伴い応答が減少する性状が本計算により捉えられている。本計算結果では振動変位と揚力係数 $C_L$ とが同期したのは $V_r=5$ と $V_r=6$ の2ケースである。

次に、三次元円柱の渦励振現象に及ぼす境界層乱流の

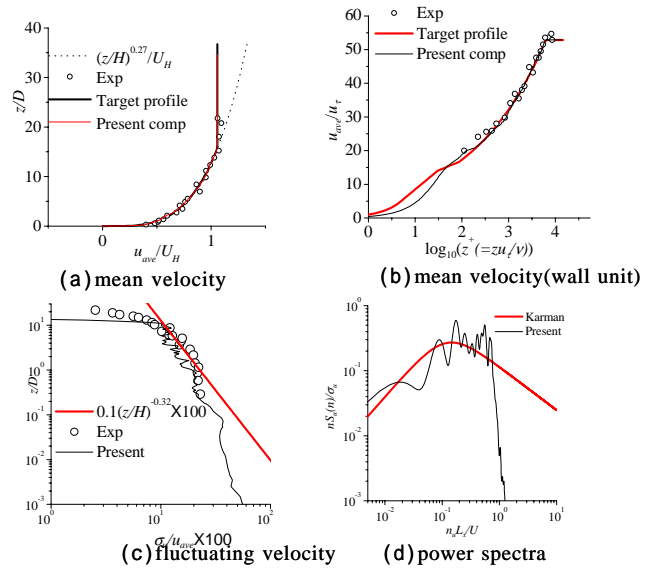


Fig. 2 境界層乱流のターゲットと本計算結果の比較  
Comparison between the Computational Results and the target profile

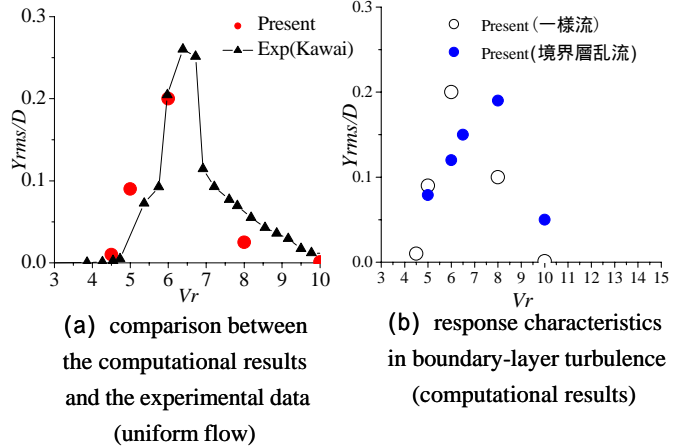


Fig. 3 三次元円柱頂部の振動応答  
Response Amplitude of the Top of a Three-Dimensional Circular Cylinder

影響について考察する。Fig. 3(b)に本計算により得られた一樣流中と境界層乱流中の三次元円柱のロッキング振動応答の比較を示す。発振領域および振動振幅のピークの値には一樣流中の結果とそれほど変化していないが、振幅が最大値を示す風速が境界層乱流中では高風速側にシフトしている。この傾向は、Howellらの実験結果<sup>6)</sup>と同様である。境界層乱流中では、風速勾配の影響を受け、一樣流中( $V_r=5, 6$ )に比べると広い風速域( $V_r=5 \sim 8$ )で同期振動が生じた。しかし、高さレベル毎の非常空空気力特性を見ると、円柱下部では乱れ影響を大きく受け、空気力と振動が同期する現象が生じ難くなった。

##### 4.2.2 ロッキング振動する円柱まわりの流れ

Fig. 4に一樣流中で作用する空気力が振動に同期した風速における円柱後流の渦度の分布を示す。 $V_r=5$ のケースでは上部でも下部でも同様の渦形成となり後流渦の軸

が円柱とほぼ平行になっている。それに対し、 $Vr=6$ のケースでは上部ほど後流域が短くなり、後流渦の軸が上流側に傾いている。この現象の違いは、円柱の渦励振の要因となる渦形成が2つ存在することに起因するものである<sup>7), 8)</sup>。円柱後流に発生するカルマン渦は、振動する振幅や振動数、すなわち加速度が大きいほど、大きく揺れる特性がある。したがって、 $Vr=6$ では振幅が大きい上部ほどせん断層が大きく揺れるため、後流渦が円柱背面に近づき、渦の軸が風上側に傾いた。一方、さらに $Vr$ が小さくなると(振動数が大きくなると)、円柱自身の運動により二次渦が発生する。 $Vr=5$ では二次渦の影響を大きく受け、振幅が大きくなってせん断層の揺れは小さくなる。その結果、ロッキングモードで振動しているにもかかわらず、後流渦の特性が鉛直方向に変化しなかったものと考えられる。なお、境界層乱流中では乱れの影響を受け、カルマン渦による渦励振は同期領域から外れる傾向があるが、二次渦を伴う渦形成は乱れの影響を受け難く、依然として大振幅な渦励振となる<sup>8)</sup>。

### 5. 高層タワーの渦励振問題への適用

本解析手法をより実用的な問題に展開する。対象を都市域(地表面粗度区分 Ⅲ, 境界層厚さ550m)に建つ高さ450mのテーパ付き円筒形高層タワーの渦励振問題とした。

#### 5.1 解析モデル・計算格子

ターゲットとした高層タワーをFig. 5に示す。また、本解析で用いる高層タワーまわりの計算格子をFig. 6に示す。格子点数は、 $201 \times 170 \times 170=5,808,900$ 点である。境界層乱流は3.で作成したものを用いた。レイノルズ数は、代表長さをタワーの頂部の径の長さ $D$ 、代表風速を頂部高さの風速とした場合、約10,000、アスペクト比( $H/D$ )は22.5である。

#### 5.2 応答性状

Fig. 7に高層タワーの頂部の振動軌跡を示す。流れ直交方向の振動応答は、 $Vr=7$ において最大となり、 $Vr=10.5$ 、 $Vr=14$ と無次元風速が増加するにつれて収まっている。流れ方向の応答に関しては、無次元風速の増大に伴い、徐々に平均、変動ともに大きくなる傾向を示している。流れ直交方向の応答変位の本計算結果を山本らの風洞実験結果<sup>9)</sup>とともにFig. 8に示す。通常の場合では風速の増加に伴い応答が緩やかに増加し、ピーク値を示した直後に急減( $Vr=8$ から10で $y_{rms}/D$ が約1/4に減少)した(Fig. 3(b))。一方、高層タワーの応答は、無次元風速が増加して、応答がピーク値を示した後、緩やかに減少する傾向が計算結果( $Vr=7$  10.5で $y_{rms}/D$ が約1/2に減少)、風洞実験結果<sup>9)</sup>とともに認められる。

#### 5.3 渦励振現象に関する考察

今回対象としたタワーはテーパが付加されている。

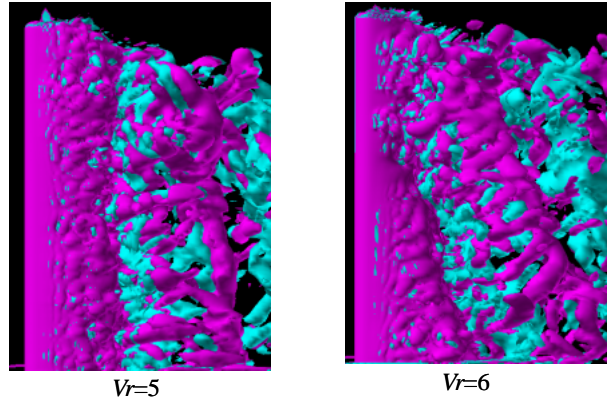


Fig. 4 ロッキング振動時の三次元円柱の後流構造  
Wake Structures around an Oscillating  
Three-Dimensional Circular Cylinder  
with the Rocking Oscillaing Mode

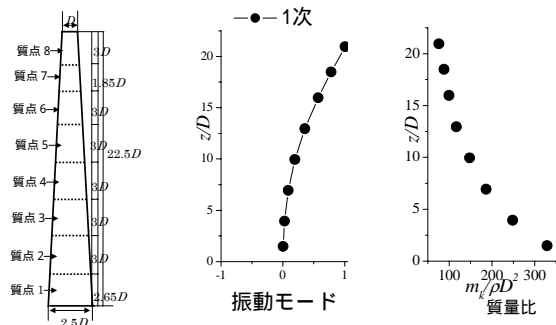


Fig. 5 対象とする高層タワー  
Target Tower

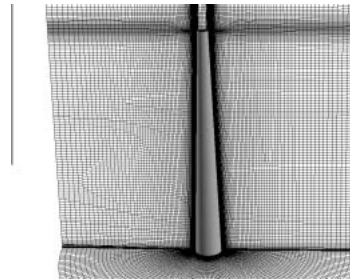


Fig. 6 高層タワーまわりの計算格子  
Computational Mesh around a High-Rise Tower

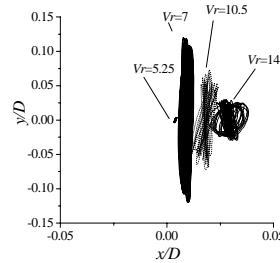


Fig. 7 頂部の変位の軌跡  
Trace of the Displacement of  
the Top of a Tower

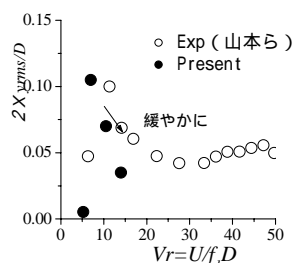


Fig. 8 振動応答の比較  
Comparison between  
the Computational Response  
and Experimental Data

テーパがついたタワーは、高さ毎に径の大きさが異なることから、一般に流れの相関性が低くなり、径一定のタワーに比べて作用する風外力が弱まるものと考えられる。しかし、Scruton<sup>10)</sup> や山本らの実験結果<sup>9)</sup> では、テーパ付き円筒形高層タワーにおいて大振幅渦励振が認められており、テーパ付き円筒形タワーの渦励振の物理機構に関しては明らかではない。

そこで、流体計算の利点である層別空気力や流れ場の情報に基づき、テーパ付きタワーの渦励振について考察する。

5.3.1 静止時のケース Fig. 9に本計算による境界層乱流中の高層タワーならびに三次元円柱の高さ $z$ における局所平均抗力係数、局所変動揚力係数および局所ストローハル数の鉛直分布を示す。なお、図中、局所空気力係数は高さ $z$ における平均風速とその高さの径の長さを用いて算出した。高さ $z$ の径の長さを用いて無次元化したテーパ付きタワーと一定径の円柱の局所平均抗力係数は同様な性状を示している。局所ストローハル数に関して見てみると、通常の円柱では $z/D=0.4\sim 0.8$ の範囲でカルマン渦の影響により渦放出周波数が一定となり、高さ $z$ の径で無次元化された局所ストローハル数は下部ほど大きくなる。それに対し、テーパ付きタワーでは、後流で明確なカルマン渦形成が生じていない(Fig. 10)。テーパ付きタワーでは、高さ $z$ の径に支配された渦が形成され、結果として高さ $z$ のストローハル数は0.175付近に点在している。このようにテーパ効果により局所ストローハル数が一定値に集まる傾向はVickeryらの実験結果<sup>11)</sup>と同様である。さらに、本計算結果においてはテーパ効果を大きく受け、高さによっては局所揚力係数の卓越周波数成分が確認できなかった。すなわち、静止時においてはテーパ付加により風外力を弱める効果が認められる。

5.3.2 振動時のケース 大振幅振動が認められた $Vr=7$ および $Vr=10.5$ における流れ直角方向の頂部の変位および各質点(ただし、質点3~8)の揚力係数の時系列波形をFig. 11に示す。 $Vr=7$ のケースでは、上部の質点6~8において高層タワーの変位と揚力係数が同位相で変化しており、同期現象が生じていることが判る。一方、質点3~5では径が大きくなるため渦放出の周期が振動周期に比べて長くなり同期振動から外れている。次に $Vr=10.5$ のケースを見てみると、質点6~8の揚力変動は非常に小さくなっているが、質点3~5では変動揚力の増加が認められる。 $Vr=10.5$ では質点3~5の径を代表長さとしたときに無次元振動数が0.175近傍になる。そのため、同期振動には至っていないものの振動により励起された流れの作用により変動揚力が増加したものと考えられる。

Fig. 12に $Vr=10.5$ および $Vr=7$ における高層タワーまわりの渦度 $\omega_z$ のコンター図を示す。静止時のテーパ付き高層タワーの後流(Fig. 10)には、明確な渦の放出が見られなかったが、 $Vr=10.5$ においてはせん断層の不安定化が著しく円柱の近傍での渦放出が確認される。そして、 $Vr=7$ のケースでは、円柱背後の上部付近で明確な渦の形成が生じている

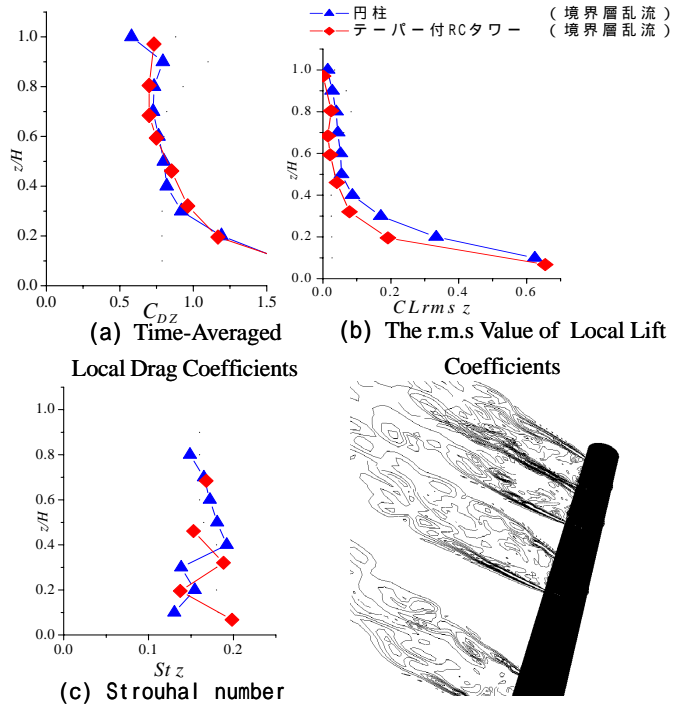


Fig. 9 局所空気力係数の分布  
The Distribution of Aerodynamic Coefficients in the Axial Direction

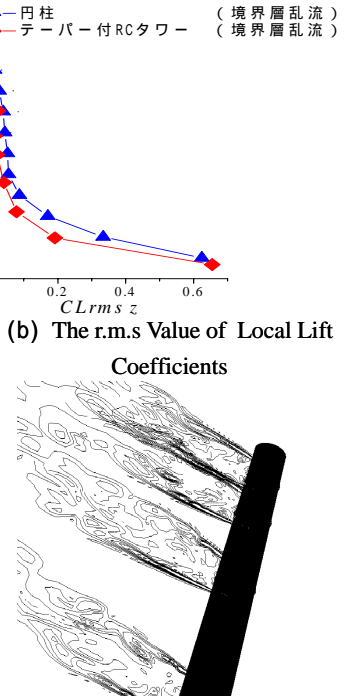


Fig. 10 静止時のタワーまわりの瞬間渦度分布  
Instantaneous Contours of the Vortices Around a Stationary Tower

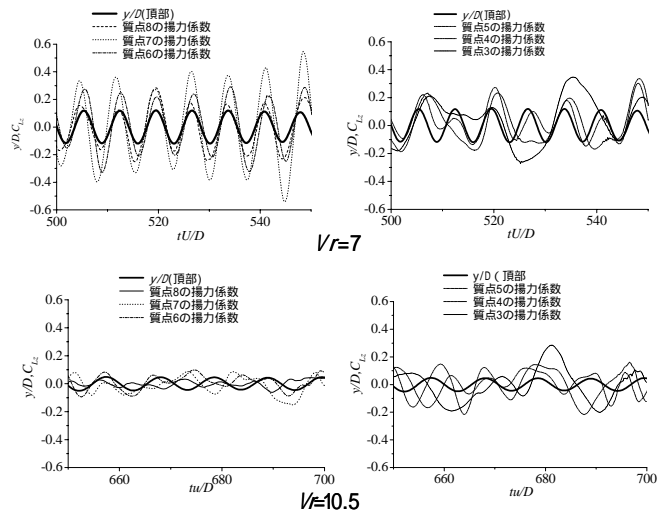


Fig. 11 タワー頂部の変位と局所揚力係数の時刻歴波形  
Time Histories of the Displacement of the Top of the Tower and Local Lift Coefficients

ことが判る。さらに、詳しくみると背面から生じた二次渦が確認できる。すなわち、円筒形タワーにテーパを付加することにより、カルマン渦による変動空気力は抑制されるものの、振動にともなって発生する二次渦の影響を受けたタイプの渦形成が依然として発生し、径一定の円柱の場合と同様に大振幅な渦励振を招いている。この渦形成は、上部で円柱の振動に同期した二次渦と剥離せん断層との作用により生じる。二次渦の振る舞いは円柱上部の運動に支配され、さら

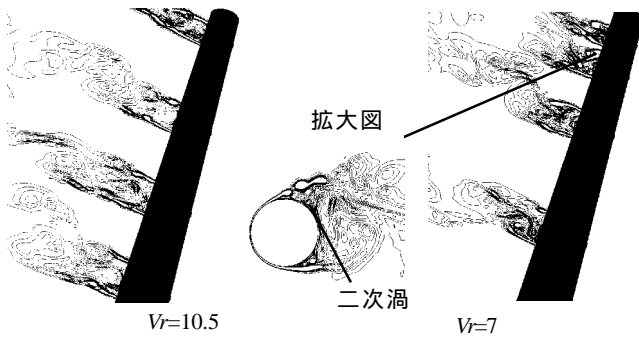


Fig. 12 渦励振時の高層タワーまわりの渦度 (  $z$  ) のコンター図

Instantaneous Contours of the Vortices Around a Oscillating High-Rise Tower

に二次渦の作用を受ける後流渦の形成もテーパー効果を受け難くなったと考えられる。

## 6. まとめ

本報では、三次元構造物の空力不安定振動の評価を行うための数値解析手法を構築し、テーパー付き高層タワーの渦励振問題に適用した。実験結果との比較により解析手法の適用性を検証すると共に、流体解析の利点である流れの可視化から、振動をもたらす現象について考察した。

以下に、得られた知見を示す。

- 1) 片岡の境界層乱流生成法を取り入れたLES解析手法により、都市域に発達する境界層乱流の生成を行った。既往の実験結果との比較から、平均風速や変動風速の再現性に関して良好な結果を得た。
- 2) 三次元円柱の渦励振応答に関して、実験結果との比較により、本計算結果の妥当性を検証した。また、二次元円柱の渦励振をもたらす2つのタイプの渦形成が三次元振動円柱のケースでも認められ、ロッキング振動モードに依存した独特な非正常空気力特性の存在を明らかにした。
- 3) LES手法で構築した解析手法を高層タワーの渦励振問題に適用した。得られた応答は、実験結果同様に、通常の円柱に比べるとピーク値を示した無次元風速以上の風速域で、なだらかに変化する特性を有していた。これは、高層タワーにテーパーを付加している影響であり、風速の変化に応じて風直交方向に振動を励起する渦の発生する高さが増加したものと推測される。
- 4) 静止時の層別空気力および流れ特性に基づいて高層タワーに付加されたテーパー効果に関して考察した結果、テーパーを付けるとカルマン渦の放出が明確には認められず、卓越した渦放出の周波数成分は見られなくなった。すなわち、静止時にはテーパーを付けることにより作用する変動空気力が低減した。
- 5) 一方、連成振動解析結果からは、タワーに振動が生じ

ると、より大きく揺れる円柱上部において振動に伴う二次渦が形成された。二次渦の挙動はタワーの振動に支配されるためテーパー効果を受けず、結果として二次渦を後伴う渦形成を生じさせ、それがテーパー付きタワーの渦励振を招いていた。

以上、本流体計算手法の構造物の空力不安定振動評価に対する適用性および有効性を示した。現在の計算機レベルでは、解析時間を要するという問題点があるが、高層タワーや構造物の形状が変化したときの振動現象の違いの検討などに有効に活用できると考えられる。今後、高層構造物の風振動に限らず、低層構造物の屋根被害の問題など、本手法の適用範囲を拡張し、耐風設計への展開を進めていく予定である。

## 謝辞

本報告は、東京工業大学・大学院総合理工学研究科田村哲郎教授のもとで行った研究の一部をまとめたものです。ご指導いただきました田村教授に、ここに記して謝意を表します。

## 参考文献

- 1) 小野, 構造物の空力不安定振動に関する数値解析, 大林組技術研究所報, No67, pp17-20, 2003
- 2) 片岡, 構造物の流体連成振動の予測に関する数値流体力学的研究, 大阪大学博士論文, 1999
- 3) 建築物荷重指針・同解説, 日本建築学会, 1993
- 4) 佐々木他, 超高層建物の風応答基本特性, 大林組技術研究所報, No60, pp127-130, 2000
- 5) 河井, テーパー付円柱の渦励振, 日本風工学会誌, 第59号, pp49-52, 1994
- 6) Howell他, Vortex Shedding from circular cylinders in turbulent flow, Wind engineering, J.E. Cermale (editor), vol. 1, Pergamon, Oxford, pp619-629, 1980
- 7) 小野他, 振動円柱まわりの渦挙動と空気力特性の関連性 - LESによる物理機構の検討 -, 日本建築学会構造系論文集, 第534号, pp17-24, 2000.8
- 8) 小野他, 一樣乱流中における二次元円柱の渦励振に関するLES解析, 日本建築学会構造系論文集, 第569号, pp23-30, 2003.1
- 9) 山本他, 超々高層RCタワーの全弾性モデルによる風応答特性, 日本建築学会学術講演梗概集, 構造, pp151-152, 2002
- 10) Scruton, C., On the wind-excited Oscillations of Stacks, Towers and Masts, Proc. Int. Conf. Wind Effect on Building and Structures, 1963
- 11) Vickery, B., J., Clark, A., W., Lift or across-wind response of tapered stack, Journal of the Structural division, Proc. of the ASCE, pp1-20, 1972