

宇宙エレベータの力学と大気圏内の風の長期的作用に対する安定性

大塚 清敏 大本 絵利

石川 洋二

(本社エンジニアリング本部)

Dynamics of the Tether of a Space Elevator and Stability against Long-Term Wind Forces

Kiyotoshi Otsuka Eri Omoto

Yoji Ishikawa

Abstract

A numerical simulation model of the dynamics of the tether of a space elevator was developed. The following forces are included as driving forces in the model: gravitational force between the tether and the earth, centrifugal force, Coriolis forces by the motions of the tether and the climber, aerodynamic force in the atmosphere, and frictional drag force from a moving climber. A two-year simulation of the tether motion under the effects of the atmospheric winds, which are provided by the National Centre for Environmental Protection (NCEP) reanalysis, is performed. The results show dynamically stable nature of the tether motions to long-term aerodynamic effects. Some fundamental aspects of the dynamics of the space elevator, including distribution of tether cross section that yields uniform internal stress, are also briefly mentioned.

概 要

宇宙エレベータのテザー(ケーブル)の運動をシミュレートするための数値モデルを開発した。テザーは連続する弾性ばね-質点系で近似される。モデルでは、地球との間の引力、自転と同じ周期での地球の周りの公転運動に起因する遠心力とコリオリ力、テザーの伸縮による内部応力、大気圏内における風からの空気力、テザー上を走行するクライマーからの作用力など、テザーに作用する諸外力が考慮されている。宇宙エレベータの供用期間内では、これら外力に対する力学的な安定性の確保が重要である。本研究では、外力のうち主に大気圏内で持続的に作用する空気力について、建設候補となる赤道上で2年間の気象データを用いたシミュレーションを行った。その結果、風の力学影響の蓄積的な影響はなく、テザーの変位は有限の範囲に留まることが確認された。本論文では、宇宙エレベータの力学の基礎的部分や、クライマー運動の影響についても言及する。

1. はじめに

宇宙エレベータは、地球から宇宙空間に延びるケーブルと、その上を往復走行する車両とからなり、ロケットの代替としての、地球と宇宙との間の人や物資の輸送交通機関である。宇宙エレベータの分野ではケーブルのことをテザー(tether)と称している。テザー上を走行する車両はクライマー(climber)と呼ばれるが、テザーは地上からは上空に向かって延び、地球を出発したクライマーは上に昇って行くことから、こうした呼称が当てられている。宇宙エレベータの全体構成案の一例をFig. 1に示す。全長は約96,000kmあり、下端は地球に固定されている。宇宙側の先端にはテザーの張力を維持するためのカウンターウェイトが取付けてある。張力の付加は所要の質量のクライマーを上昇させる際にテザーが地球上に落下しないようにするためである。高度約36,000kmには静止軌道ステーションが付属する。テザーの地球への接続点はアースポートと呼ばれ、その設置地点は台風がない等の自然環境条件から赤道上が適するとされる。宇宙エレベータは、下端を地球に固定された状態で地球の自転

と同じ角速度で赤道を含む平面内で公転し、接続地点の真上に常に位置するようになっている。

Fig. 1には、宇宙太陽光発電施設、月および火星重力センター、低軌道衛星投入ゲート、他惑星への衛星発射ゲートなどの付属施設も描いてある。それは、次のような宇宙エレベータの利点を活用できるためである。宇宙空間では大気や昼夜の影響を受けない高い設備利用率での太陽光発電が可能であるが、そうした施設の建設・維持を容易にする。惑星探査衛星や通信や地球観測といった低軌道衛星をテザーの途中から発射することで、地上からの打上げに比べ地球の引力圏脱出のエネルギーを大幅に軽減できる。地球と宇宙との間の輸送は現在はロケットによるが、クライマーでの輸送は、燃料を含めた輸送費用がロケットに比べ削減される¹⁾。

宇宙エレベータの最初の発想は、地上から静止軌道まで達する搭状の構造物を発案したロシアの科学者、コンスタンテン・ツォルコフスキー(1853-1934)に遡る。彼は、建物の高さが増すにつれ、次第に地球自転による遠心力の作用が大きくなって重力へ対抗し、建物は両者の力の釣合いで支えられると考えた。米国のEdwards²⁾は、太陽

や月等の天体の潮汐力との共振しないテザーの長さ(約96,000km)など、基本要件を科学的に初めて示した。高度36,000kmの静止軌道から地球側と宇宙側の両方向に向かってテザーを伸ばすという建設法も併せて示した。

宇宙エレベータのテザーには、現在製造可能な最も強い鋼の強度を大きく超える張力が作用する。それに耐える材料が無かったため、これまで実現不可能とされてきた。しかし、1991年のカーボンナノチューブ(以下CNTと略)の発見により、材料強度の観点からは全くの非現実ではなくなった³⁾。CNTの材料強度を前提に、石川等⁴⁾は、Edwards²⁾、Edwards and Westling⁵⁾の宇宙エレベータ建設計画案について、テザーの挙動の数値解析を含む検証的考察を行い、力学的な立場での建設可能性の定量的な検証を行った。

宇宙エレベータの根幹となる構成要素はテザーである。テザーには後述するように様々な外力が作用するが、そうした外力作用に対して構造が安定に保たれる必要がある。宇宙エレベータのテザーの力学はLang⁶⁾、Cohen and Misra⁷⁾、Williams⁸⁾、Kaithi⁹⁾などの既往の研究がある。このうちCohen and Misra⁷⁾とWilliams and Ockels¹⁰⁾は、それぞれテザーを連続体あるいは剛体紐で結ばれた多質点系で表わしたものをを用い、クライマーの移動がテザーに与える影響を調べている。Lang⁶⁾はテザーをバネで連結された質点系で近似しているが、テザーへのクライマーの運動の影響、ハリケーンの強風を対象に大気圏内の風の空気力学的作用も扱っている。

宇宙エレベータのテザーは、地球との間の万有引力、月、太陽などの天体からの万有引力(潮汐力)、地球の周りの周回運動による遠心力、大気圏内での空気力、クライマーの昇降に起因する力などの力学的な外力を受けながら、それ自体の伸縮、たわみなどの変形を伴う運動をしている。力学的外力の他、太陽放射、赤外放射、空気との間の熱交換など熱的な外力、太陽風の放射圧、何らかの原因で生じたテザー内の電流と地球磁場との間のローレンツ力を含め様々な物理的作用を受ける。

宇宙エレベータの実用化に向けた要件設定においては、これら外力に対する短期的・長期的挙動や、テザーの力学的安定性を定量的に明らかにしておく必要がある。大気圏内では持続的な風的作用を受けるが、その長期的影響は既往の研究では明らかにされていない。材料強度の観点からテザーの素材の候補とされるCNTも、その物理化学的性質は未解明な点が少なくない。それでも、将来の科学技術の進歩において明らかされるべき物性を組み入れることができ、テザーの全体的な挙動解析に供する数値モデルを開発しておくことは有用である。本報ではテザー挙動解析のための数値力学モデルを示し、特に風の長期的影響に関するシミュレーションの結果を示す。

2. 宇宙エレベータの力の釣合いの基礎事項

数値モデルについて述べるに先立って、宇宙エレベータ

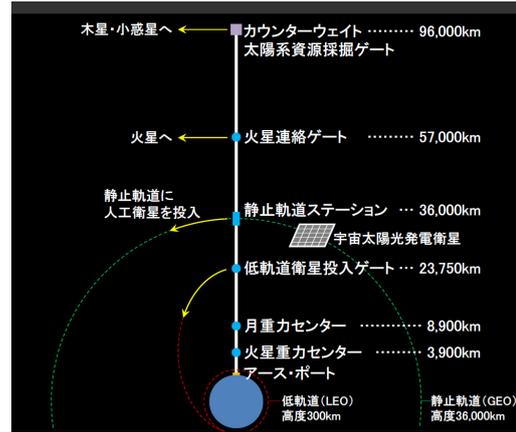


Fig. 1 宇宙エレベータの全体構成¹⁾
Schematic Representation of a Space Elevator

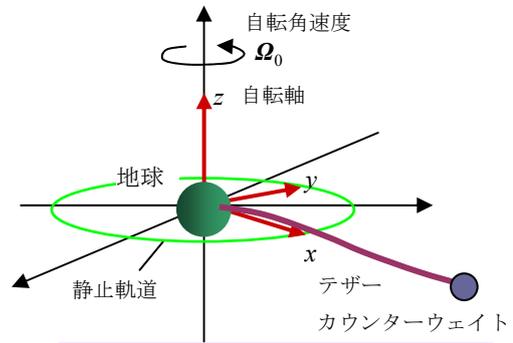


Fig. 2 宇宙エレベータの力学系
Dynamical System of a Space Elevator
の力学の基本的な考え方について紹介する。

2.1 地球の回りを公転する物体の引力・遠心力・重力

質量 m [kg]の物体が、地球の中心から r [m]の距離だけ離れて、同一平面内で地球の周りを一定の角速度 Ω [rad/s]で公転運動(円運動)しているときは、式(1)に示されるように、物体に働く遠心力と物体と地球(平均半径6,371kmの球で近似)との間の万有引力とが釣合っている。

$$G \frac{M_E m}{r^2} = m \Omega^2 r \quad (1)$$

G : 万有引力定数 (6.674×10^{-11} [Nm²/kg²])

M_E : 地球の質量 (5.972×10^{24} [kg])

式(1)の左辺が万有引力、右辺が遠心力である。物体の質量 m は両辺に等しく現れるため落とすことができ、公転軌道の半径は物体の質量によらず、

$$r = \left(\frac{GM_E}{\Omega^2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2)$$

となる。式(2)から公転角速度 Ω が大きいほど r が小さく(地球に近く)、その逆もいえる。

物体の公転角速度 Ω が地球の自転角速度 Ω_0 (7.272×10^{-5} [rad/s])に等しいときは、公転する物体は自転する地球上から見て同じ位置に静止しているように見える。そのような公転軌道を静止軌道という。式(2)の Ω を Ω_0 で

置き換えると静止軌道の半径 r_{GEO} は、

$$r_{GEO} = \left(\frac{GM_E}{\Omega_0^2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3)$$

となる。具体的に数字を求めると地球中心から静止軌道までの距離 r_{GEO} は約42,240kmとなり、地球の半径 R_E を差し引くと地上から35,869kmの高度となる。

地球の周りを地球の自転角速度と同じ角速度で、円軌道上を周回運動を行う単位質量(1kg)の物体を考える。それに働く地球との間の万有引力、および周回運動の遠心力による加速度は、地球の中心($r=0$)からの距離 r に対してFig. 3のように変化する。向きが地球向きである万有引力は負の値、宇宙側に向く遠心力は正の値でそれぞれの加速度が表されている。万有引力と遠心力との和が重力である。 $r=6,371\text{km}$ は地表の位置で、単位質量の物体に働く重力による加速度は約 -9.8m/s^2 となる。引力は地表から宇宙側に遠ざかるにつれ、距離 r の2乗に反比例して弱まってゆき、遠心力は直線的に増加する。引力と遠心力との和である重力がゼロになる位置が式(3)で示される静止軌道の位置($r=r_{GEO}$)となる。地球と同じ速さで地球の周りを円運動する物体に働く重力は、静止軌道よりも近い位置では地球向きに、遠い位置では宇宙向きに作用することになる。このことから、宇宙エレベータの1本の連続したテザーには、静止軌道位置より地球側では地球向きの、宇宙側では宇宙向きの重力が働き、両側に向かって引張られていることになる。

2.2 宇宙エレベータの力学的な成立原理の概要

次に宇宙エレベータの最も単純なモデルとして、質量 m [kg]の物体が地球の赤道上の1点との間で、質量のない弾性テザー(ばね定数が k [N/m]、伸びがないときの自然長 L_{00} [m])で結ばれ、テザーが自然長より Δr だけ伸びた状態(張力状態)で地球自転と同じ角速度で公転している場合を考える。 Δr は L_{00} より十分に小さいとする。この場合の力の釣合いは式(4)のようになる。

$$m\Omega_0^2(R_E + L_{00} + \Delta r) = \frac{GM_E m}{(R_E + L_{00} + \Delta r)^2} + k\Delta r \quad (4)$$

式(4)は Δr の3次の代数方程式となるが、解の存在は次のように示される。Fig. 3のように、静止軌道 $r=R_E+L_{00}=r_{GEO}$ を境に式(4)の左辺は右辺第1項より大きくなる。 Δr に対する $r=r_{GEO}$ の周りのテイラー展開から、

$$m\Omega_0^2(r_{GEO} + \Delta r) - G \frac{M_E m}{(r_{GEO} + \Delta r)^2} \approx 3r_{GEO}\Omega_0^2 \cdot \frac{\Delta r}{r_{GEO}} \quad (5)$$

となり、 Δr の正負がそのまま式(5)左辺の第1項、第2項の大小関係になるからである。静止軌道より遠いところに質量 m があると式(4)の右辺第2項は正であり得、 $k\Delta r > 0$ なる張力(地球側に引張る)状態での釣合いが実現する。したがって、与えられた Δr に対し k を適当に選ぶと(4)が成立するようにできる。静止軌道より遠い位置では物体を張力で地球側に引張ることで、地球と同じ角速度で地球の周りを周回する解が存在することになる。同様に静止軌道より内側にある物体には、宇宙側に引上げる力を付

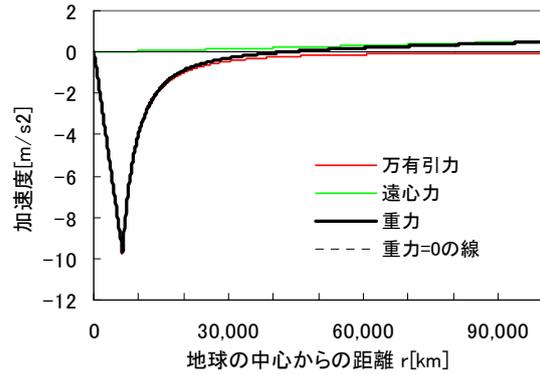


Fig. 3 引力・遠心力・重力による加速度の分布
Distributions of Attractive, Centrifugal and Gravitational Accelerations as Functions of Distance r

加すると、地球と同じ回転速度での周回が可能となる。これが最も根本的な宇宙エレベータの力学的な成立原理である。

2.3 引張応力一定の力学平衡の理論解

これまでは弾性テザーには質量がないと仮定したが、実際にテザーは質量をもち、テザー自身にも地球との間の万有引力と遠心力による重力などが実体力として働く。実体力(body force)とは質量に作用する力のことで、質量とは無関係に物体内部の面や表面に作用する応力(stress, 張力や圧力, せん断力など)と対比される。宇宙エレベータのテザーはFig. 1にあるカウンターウェイトによって、2.2節で述べたように付加的な張力が与えられ、伸び変形をした状態にある。しかも、Fig. 3で示されるように重力の大きさは、静止軌道を境に地球および宇宙に向かって漸増する。重力がこのように一様ではないため、テザーに働く張力は静止軌道の位置で最大となり、両端部に向かって減少する分布となる。

このような、地球からの距離によって変化する重力(=引力+遠心力)、カウンターウェイトによる付加的な張力が作用した状態にあるテザーに対し、その断面積をテザーに沿って適切に変化させることによって、テザー内部の引張応力を一定値にすることができる。引張応力一定は、強度に関する安全率の考え方や長期的な材料の健全性確保の観点から重要である。

テザーはヤング率 E [Pa]が一様な材質であるとする、引張応力 σ が一定である場合、伸びひずみ ε も一定となる。外力が働かず伸縮のない状態でのテザーの長さ、すなわち自然長を L_{00} とする。ひずみ ε 分だけ伸びた状態の長さが L であるとする、 L_{00} と L は、

$$L = L_{00}(1 + \varepsilon) \quad (6)$$

の関係にある。式の展開の便宜のため、伸び変形がない状態での弾性テザーの各部分の位置を表す物質座標 s を導入する。 s は $0 \leq s \leq L_{00}$ の範囲の値をとる。テザーが地球の固定点から直線的にひずみ ε 分だけ伸びた状態にあるとすると、物質座標が s であるテザー上の点の、地球中心

からの距離 r は次の式(7)で与えられる。

$$r(s) = (1 + \varepsilon)s + R_E \quad (7)$$

となる。 $s=0$ で $r(0)=R_E$ である。

物質座標 s におけるテザーの断面積を $A(s)$ 、密度は一律に ρ とすると、テザー素片 $[s, s+ds]$ の静力学的釣合いの式は微分形式で次のようにかかれる。

$$d(\sigma A) = -\left\{-G \frac{M_E}{r(s)^2} + \Omega_0^2 r(s)\right\} \rho A(s) ds \quad (8)$$

求めるべき解引張応力 σ が一定なので $d(\sigma A) = \sigma dA$ 、および式(7)から $ds = dr/(1+\varepsilon)$ となるので、式(8)は、

$$\frac{dA(s)}{A(s)} = -\left\{-G \frac{M_E}{r(s)^2} + \Omega_0^2 r(s)\right\} \frac{\rho}{(1+\varepsilon)\sigma} dr \quad (9)$$

と変数分離される。これは簡単に積分できて、 $s=0$ (地球への固定点)での断面積 $A(0)$ に対する、引張応力一定の断面積比の分布が次式のように求められる。

$$\frac{A(s)}{A(0)} = \exp\left[\frac{\rho}{(1+\varepsilon)\sigma} \left[-\left\{G \frac{M_E}{r(s)} + \frac{1}{2} \Omega_0^2 r(s)^2\right\} + \left\{G \frac{M_E}{r(0)} + \frac{1}{2} \Omega_0^2 r(0)^2\right\}\right]\right] \quad (10)$$

式(10)を r について微分して、それが0となる位置を求めると $r=r_{GEO}$ となり、静止軌道位置でテザー幅 A が最大値となることが示される。比率 $A(r_{GEO})/A(0)$ をテザーのテーパー比という。式(10)で示される宇宙エレベータのテザーの断面積は、静止軌道の位置で最も太く両端に向かって単調に減少する(Fig. 6参照)。

2.4 宇宙エレベータの力学要件設定の手順

まず、設計上の引張応力(設計張力応力) σ をテザーの引張破断強度 σ_* と、安全率 S_f の割合だけ軽減して、

$$\sigma = \frac{\sigma_*}{S_f} \quad (11)$$

のように決める。こうした引張応力を与えると、断面積 $A(0)$ が与えられれば式(10)からテザーに沿った断面積分布が得られる。設計張力に応じて一定張力を与える断面積分布が変わることになる。引張応力 σ を定めると、テザー材(CNT)のヤング率 E からひずみ ε が決まる。

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (12)$$

設計全長 L に対して式(12)で与えられるひずみを用いるとテザーの自然長 L_{00} が決まる。テザーの長さに応じて必要な引張応力を与えるためのカウンターウェイトの質量 M_c が次のように調整される。

伸び変形した状態の全長 $s=L$ に相当する位置にカウンターウェイトを置くわけであるが、その質量 M_c は、 $r=L=(1+\varepsilon)L_{00}$ でのカウンターウェイトに働く引力と遠心力との和に釣合う張力 T を断面積 $A(L)$ で除した値が設計応力 σ に等しくなるようする。 $A(s=L)$ は、次の手順で設定される $A(s=0)$ を利用して求められる。 $A(0)$ は走行させるクライマーの積載物を含む最大重量から決まる。最大限界積載時のクライマーの質量を m_c とすると、テザー最下端で

地上を離れた直後では、 $m_c g$ の重さ(g は地上における重力加速度)がテザーにかかることになる。その際の内部応力が、設計引張応力 σ を越えないような、テザー下端の断面積 $A(0)$ (最低限必要な値として)が次のように決まる。

$$A(0) = \frac{m_c g}{\sigma} = \frac{m_c g}{\sigma_* / S_f} \quad (13)$$

$A(0)$ が決まると $A(s)$ は式(10)から計算される。 $s=L$ における断面積 $A(L)$ が与えられると、カウンターウェイトの質量は次の式(14)を満足する M_c となる。

$$\sigma A(L) = \left\{-G \frac{M_E}{(R_E + L)^2} + \Omega_E^2 (R_E + L)\right\} M_c \quad (14)$$

以上の過程を力学的な要件の設定手順として以下のようにまとめておく。

- ① 全長 L を決める(潮汐力との共振を避ける長さ)
- ② 設計引張応力 σ を材料強度 σ_* と安全率 S_f から決める。
- ③ 物質のヤング率 E から設計伸びひずみ ε が求まる。
- ④ 伸びひずみと全長からテザーの自然長 L_{00} が決まる。
- ⑤ 外力なしの自然状態での、テザー断面積の固定点における断面積 $A(0)$ に対する比率の分布が求まる。
- ⑥ 断面積の比率分布が決まると、前述のようにカウンターウェイトの質量 M_c が決まる。

3. 運動方程式とその離散化による数値モデル

3.1 数値モデルの運動方程式と離散化

本研究で扱う力学系は、Fig. 1で示したように完成時の全長が約96,000kmで、地球側の端部が地面に固定され、宇宙側端部のカウンターウェイトで張力が付加された状態にあるとする(Fig. 2)。地球側の固定点も、第1章で述べたように赤道にあるとした。

宇宙エレベータのテザーは本来は連続体であるが、離散的な数値計算のため、Fig. 4のように質量のないばねで連結され3次元的に運動できる質点系からなるとして近似した。テザー全体は軸方向に多数の区画に分割され、区画毎にそれと同じ大きさの質量と弾性を持つ質点とばねとが連結したもので置き換えている。曲げやたわみを陽に扱わず、伸縮変形を考慮するだけでもテザーの運動の重要な点は捉えられる。

Fig. 2のように地球中心を原点とし、地軸を回転軸とする回転座標系では、近似的な力学方程式はベクトル形式で、式(15)のように書かれる。

$$\begin{aligned} m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = & -2m_i \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} + m_i (\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{r}_i - m_i (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_i) \boldsymbol{\Omega} \\ & - GM_E m_i \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|^3} - GM_L m_i \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_L}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_L|^3} - GM_S m_i \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_S}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_S|^3} \\ & + k_{i,i+1} \frac{\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|} \Delta |\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i| - k_{i,i-1} \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}|} \Delta |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}| \\ & + \mathbf{F}_{drag} + \mathbf{F}_{lift} + \mathbf{F}_{clmb} + \mathbf{F}_{other} \quad (15) \end{aligned}$$

右辺第1, 2, 3項は順に地球の周りを公転することによ

るコリオリ力，遠心力，およびメトリック力，第4,5,6項は質点*i*と地球，月，太陽との間の引力である。右辺第7,8項は，ばねの伸縮の弾性力，第9項以降の F_{drag} ， F_{lift} ， F_{climb} ， F_{other} は順に大気圏内で働く風による抵抗力と揚力，クライマーから作用する力，その他の力(電流によるローレンツ力など)である。

$r_i=(x_i, y_i, z_i)$ および m_i は質点*i*の地球の中心に対する位置ベクトルと質量， Ω は回転座標系の*z*軸周りの回転角速度， M_L ， M_S ， r_l ， r_s は，それぞれ月，太陽の質量，地球の中心に対する位置ベクトルである。 Δl は質点*i,i+1*間のばねの自然長に対する伸び変形量， $k_{i,i+1}$ は対応するばね定数である。ばね定数 $k_{i,i+1}$ は，最も簡単に，CNTのヤング率 $E(0.9 \times 10^{12}[\text{Pa}]$)，区間 $[i,i+1]$ のテザー素片の平均断面積 $\langle A_{i,i+1} \rangle$ および長さ $l_{i,i+1}$ から次式で近似した。

$$k_{i,i+1} = E \frac{\langle A_{i,i+1} \rangle}{l_{i,i+1}} \quad (16)$$

テザーはCNT製の平たいリボン状の断面を仮定している。テザー素片に対する空気力は，風は水平成分のみ考慮し，その中に斜めに置かれた物体に作用する相対速度の2乗に比例する空気力の風方向・風直角方向の分力として抵抗力と揚力を扱っているが，そのときの抗力係数は風の作用が最も大きくなるよう(流れに垂直に置かれた平板の $C_D=1.2$ を使用)，リボンの幅広の面が常に風とテザーとの相対速度の向きに対面した状態にあると仮定している。

テザーには，Fig. 5 に示すように空気との相対運動による抗力と揚力が働く。これらの空気力は，次(17)，(18)のように得られる。

$$\text{揚力: } L = 0.5 \rho_{air} C_D S (V_{tether} - V_{air})^2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (17)$$

$$\text{抗力: } D = 0.5 \rho_{air} C_D S (V_{tether} - V_{air})^2 \sin^2 \alpha \quad (18)$$

S : テザーの風との相対速度に対する投影面積 $[\text{m}^2]$ ，

$V_{tether}-V_{air}$: テザーと風の相対速度 $[\text{m/s}]$

ρ_{air} : 空気密度 $[\text{kg/m}^3]$

3.2 クライマーの理想化された力学モデル

最も簡単なクライマーの力学モデルは，2つの車輪(あるいは偶数个の車輪)でリボン状のテザーを表裏の両面から挟み，駆動力によって車輪が回転してもテザーと車輪が滑らないような強さでケーブルを押さえてあるような機構である(Fig. 6)。クライマーの駆動源からの力がトルクとして車輪に与えられ，滑りなしの状態では車輪の回転とクライマー自身のテザーに沿った並進運動を起こす。滑り無しであるため，クライマーに作用する重力(引力+遠心力)はそのままケーブルに付加的な重力としてかかることになる。

テザーに沿って加速中のクライマーからは，対テザー加速度と反対向きに慣性力がテザーに作用する。また，宇宙エレベータは地球の周りを公転しているため，その回転運動によりクライマーの対地速度に比例するコリオリ力がクライマーの進行方向直角右向きにケーブルを押すように働く。クライマーがケーブルに対して一定の速

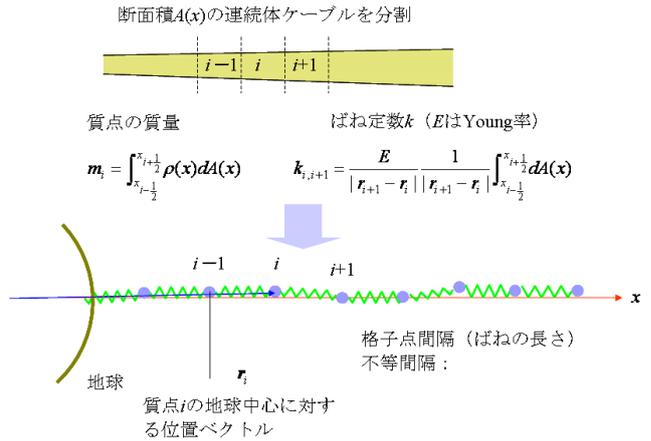


Fig. 4 ばね-質点系による連続体テザーの離散化
Discretization of Continuous Tether by the Series of Mass Points and Elastic Springs

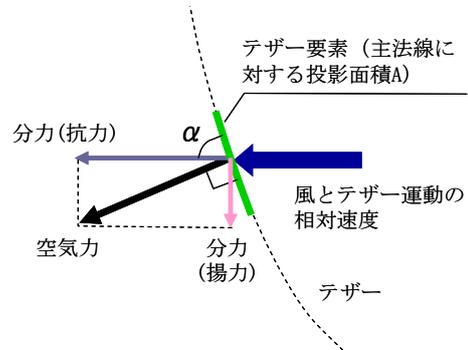


Fig. 5 ケーブルに作用する空気力
Aerodynamic Forces Acting on the Tether

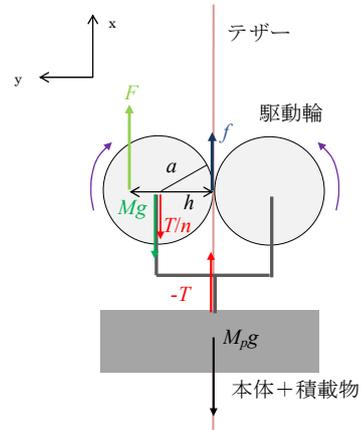


Fig. 6 車輪2個と積載物からなるクライマーのモデル
An Idealized Dynamical Model of a Climber

度で走行していても，摩擦力による減速を補うだけ常に加速し続ける必要がある。摩擦を打ち消す加速に相当する反力も，クライマーの走行と逆向きにケーブルに作用することになる。数値モデルの中ではクライマーの走行速度はケーブルに対する相対速度として扱われ，対地速度ではない。そのため，ケーブルに沿った地上からの，弾性伸縮を考慮した実長さを表す座標 s' を別に導入し，それによってクライマーの運転を記述している。

車輪と本体（質量 M_p の積載物含む）からなるクライマーの運動方程式を示す。同じ大きさの質量 M ，半径 a （慣性能率 $I=1/2Ma^2$ ）の円柱車輪が複数（ n 個）ある場合，個々の円柱に積載荷重 $M_p g$ が連結の張力 T を介して均等に分配されるとすると，各車輪および積載部分の重心の運動方程式は，それぞれ，

$$M \frac{d^2 s'}{dt^2} = -Mg - \frac{T}{n} + F + f \quad (19)$$

$$M_p \frac{d^2 s'_p}{dt^2} = T - M_p g - D_{aero} \quad (20)$$

$$g = G \frac{M_E}{r^2} - r\Omega_0^2 \quad (21)$$

M, M_p : 円柱（車輪）の質量

g : は重力加速度

D_{aero} : 大気圏内でクライマーにかかる空気力

F : 車輪への駆動力（作用点は $y=h$ ）

f : 円柱とケーブルとの間の摩擦力

クライマーは車輪と積載部分が剛的に連結されているとそれぞれの重心は同じ加速度で運動するとみてよいので $s' = s'_p$ と置くことができ，次の式(22)が成り立つ。

$$\frac{d^2 s'_p}{dt^2} = \frac{d^2 s'}{dt^2} \quad (22)$$

したがって，クライマーからケーブルへは，コリオリ力を含め次の力が作用する。

$$F_{cnb} = (M + M_p) \left\{ -\frac{d^2 s'}{dt^2} - 2\Omega_0 \times \frac{ds'}{dt} - g \right\} - f + D_{aero} \quad (23)$$

3.3 地球に対して静止した引張応力一定の初期条件

まず式(10)で $\varepsilon=0$ として $m_i = \rho \times A([s_i, s_{i+1}]) > dr$ に従うように質量を配分し，式(16)でばね定数を与えて離散化する。CNTの密度は $1.3 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ とした。現在得られているCNTの引張強度は，理論的な値として最大130GPaである¹¹⁾。安全率2，すなわち設計引張応力が65GPaになるようなカウンターウェイトの質量を求め，それによる張力と重力を作用させ，離散化系において地球に対し静止した平衡状態を求めた。得られた解をFig. 7に示す。離散化された系でも引張応力はテザーの全長にわたって65GPaでほぼ厳密に一定値が得られた。これは，Lang⁶⁾より一様性が高い。断面積比もほぼ厳密に式(10)に一致する。2.3節で述べたテーパー比は2.47となる。

以下に示すいずれのシミュレーションも，この平衡状態を初期状態として出発し，外力が作用した場合の挙動を時間的に追跡する。時間積分には2次のルンゲ・クッタ法を用いた。また，数値計算上のノイズを抑え計算を安定化させるため，質点間の速度差（変形速度）に対する2次の拡散型の弱い数値粘性を入れた。質点間隔は非一様で，高度100kmまでの大気圏内は2km，それ以降比例的に増加させ最大間隔は200kmとした。

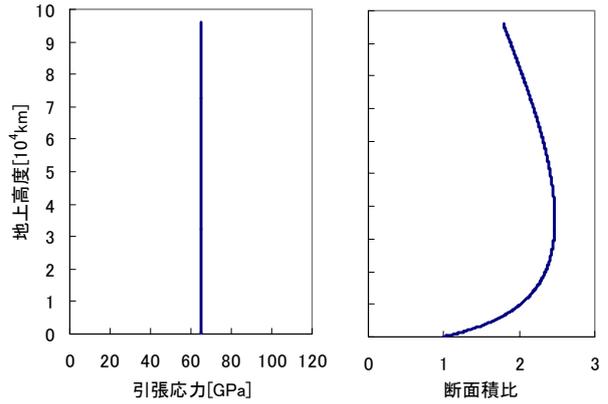


Fig. 7 力学平衡における引張応力と断面積比 Along-tether Distributions of Tensile Stress and Cross Sectional Area Ratio of the Tether

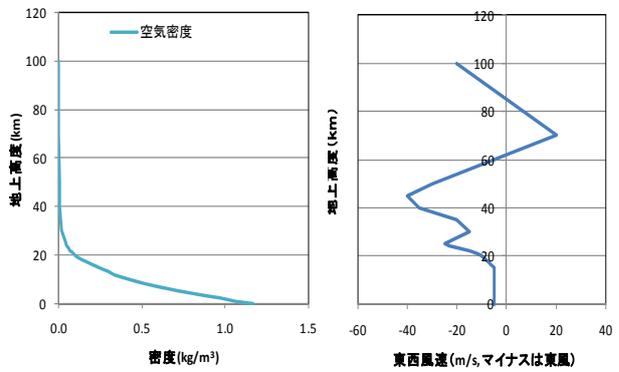


Fig. 8 空気密度および風速の高さ分布 Vertical Distributions of Air Density and Wind Speed

4. 計算結果

4.1 建設時の仕様によるいくつかの検討

石川ら⁴⁾が示したように，宇宙エレベータの建設ではまずロケットを用いて静止軌道にパイロットケーブルとなるテザーを送り，地球と宇宙の両側に向かってテザーを展開し，最初の細い1本のパイロットテザーからなる宇宙エレベータを完成させる。その後パイロットテザー上を工事用のクライマーを順次上昇させて断面積を増す補強を行い，完成体の太さにする。工事用のクライマーは，テザーの宇宙側先端に達すると，そこに残留してカウンターウェイトとなる。テザーの展開過程については，Taoら¹²⁾が最近数値モデルを用いた扱いを始めている。石川ら⁴⁾は，経済性も考慮しパイロットテザーは質量が20t，最初のカウンターウェイトの質量は18.5tとした。補強に用いるクライマーは0.44tで1回当たり，0.44tのテザーを延伸させながら補強する。この手順を510回行うことで100t級のクライマーが走行可能な宇宙エレベータが完成する。

4.1.1 ケーブルの断面形状と風の影響 地球側の固定点のある赤道域は，台風などの熱帯低気圧の襲来や中

緯度地域冬季偏西風のような強風からはずれた地域にあり、気象外力的には有利な地域であるが、対流圏内の偏東風や成層圏以上の高さでの高層風による持続的な空気を受けている。ここでは、Fig. 8のように松野ら¹³⁾の図4.3から読み取った高度100kmまでの東西平均風速場、McClatchy熱帯大気モデル¹⁴⁾の空気密度高さ分布をモデル化したものを用い、風に対するテザーの変位を調べた。

結果をFig. 9に示す。テザーは、下端の断面積が $7.27 \times 10^{-8} \text{m}^2$ であり、カウンターウェイトの質量は、 18.5t^5 である。ケーブル下端の断面形状は、厚さを $1 \mu\text{m}$ 、幅 0.0727m のリボン状とした。東風の作用とともに西向への変位が急速に進み、12時間経過時点で高度10kmの位置で、約60kmの西向き変位が得られた。車輪式のクライマーの走行にとっては、扁平度の高いリボン状のテザーが有利であると考えられるが、変位が大きいとテザーの傾斜が水平に近くなり走行への影響が大きくなる。Fig. 9には幅を4分の1、厚さを4倍にした時の12時間経過時点での変位も示すが、変位の大きさが大幅に減少しているのがわかる。

後者についての全長にわたる変位と張力をFig. 10に示す。東風による西向きの空気抵抗力の影響は比較的短時間で高度約96,000kmのカウンターウェイトに達し、テザー全体にわたり西側に変位し、高度30,000kmより上では時間経過とともに変位は増えている。しかし、それより下方では、時間経過による西向き変位の回復がごくわずかであるが認められる。これは地球の重力が大きくなる低高度では、テザーの伸びによる地球向きの運動が大きく、コリオリ力の東への変位を増やそうとする作用が相対的に大きくなる影響によるものと考えられる。

Fig. 10の張力で $t=0\text{h}$ は風が作用しない状態の張力を表している。図から明らかなように風の作用があっても張力はほとんど変化していない。風はテザーをたわませると同時に引きずりおろそうとするように作用する。しかしながら、テザーは全長にわたるばね定数によって引きずり下ろしの力に適応するように、容易に伸び降りてくるため、張力の大きな増加は生じないと考えられる。

4.1.2 クライマーの上昇による張力 質量 0.44t の建設用クライマーを2.5日毎に断続的に上昇させた場合について、静止軌道高度においてテザーに作用する、地球側、宇宙側のテザー自身の重力、走行中のクライマーの与える重力の合計の時間変化をFig. 11に示す。クライマーが静止軌道高度より地球側にある時間帯のものが示されている。地球側に見られる鋸歯状の変動は、新たなクライマーの上昇開始に伴う重力増加と、クライマーの高度の増加による重力の漸減の両方の作用の結果である。地球側からの重力が宇宙側より常に小さく、その差は地面の固定点における張力が受け持っている。これは地球側の重力が小さいことにより、クライマーの走行によってケーブルが引きずり落とされることがないことを示している。

車輪が2つで積載荷重を支えているクライマーの簡単

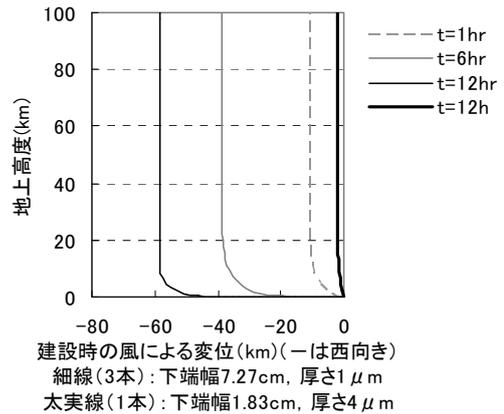


Fig. 9 風によるテザーの水平変位 (高度100km以下)
Horizontal Displacement of the Tether by Wind

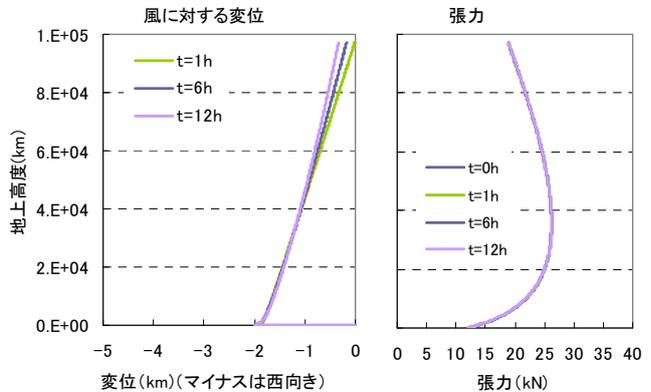


Fig. 10 テザー全長にわたる変位と張力
Wind Driven Displacement of the Tether

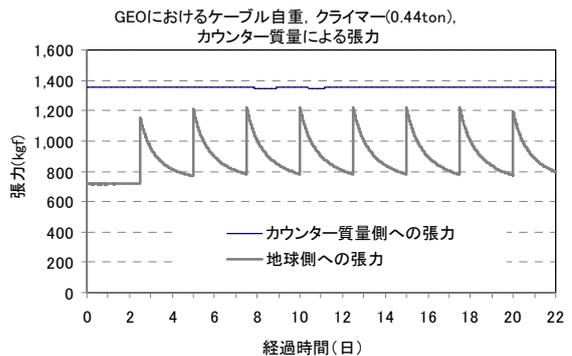


Fig. 11 静止軌道高度での宇宙向、地球向の重力の合計
Integrated Earthward Spaceward Gravity Forces at GEO

化された力学モデルはFig. 6に示したとおりである。完成時のテザー仕様に対し、総重量 100t のクライマーが走行した場合のテザーの内部応力(引張応力)およびケーブルの変位の分布をFig. 12, Fig. 13にそれぞれ示す。クライマーは、地面を出発して5分間かけて、対ケーブル速度 200km/h まで加速し、その後等速度で静止軌道高度に達する7.5日後までいくつかの時刻について書いてある。ここでは車輪とケーブルとの間の摩擦力、およびクライマーへの空気抵抗力は簡単のため無視している。

Fig. 12から、張力の最大はほぼ65GPaが保たれており、クライマーより下方がクライマーの高度に応じて引張応力が小さくなっている。また、Fig. 13では主にクライマーからのコリオリ力の作用でテザーに西向きの変位が現れており、クライマーの位置で折れ曲がっている。こうしたクライマーの作用とケーブルの力学的安定性のさらなる解析は今後の課題である。

4.2 長期的な風的作用に対する安定性

4.2.1 気象データと赤道地方の上空風の特徴

実際の風の時系列気象データを大気圏内の風の外力として数値モデルを積分し、テザーに対する長期的な外力作用について検討した。外力として用いる気象データは、米国立環境研究センター (NCEP, National Center for Environment Prediction) の、3次元全球再解析データ (ds083.2) を用いた。水平分解能は緯度・経度方向ともに1°であり、鉛直方向は地上から高度30km以上までの気象データが毎日世界標準時(UTC)00Z, 06Z, 12Z, 18Zの6時間毎に与えられている。本研究では、宇宙エレベータの建設地を任意に東京の真南にあたる経度135Eの赤道道上と仮定し、その地点での気象データを用いることにした。

低緯度地域の上空の風の特徴を示すため、Fig. 14, Fig. 15に地上から高度30kmまでの、風速U[m/s]成分(東西成分で西風が正)およびV[m/s]成分(南北成分で南風が正)の、2000年~2010年の11年間の月平均値の推移をそれぞれ示す。地上から高度17~18kmまでの高さ範囲の季節的な風速変化とは別に、それより上空では約2年程度の周期で風速20m/s以上の大きさを西風と東風とが入れ替わっている。これは、準2年振動(QBO; Quasi-Biennial Oscillation)と呼ばれる気象現象に相当する変動で、それが明瞭に認められる。南北成分については、高度10~15km程度の高さ範囲に南風、北風の入替わりがあるが、それ以外の高さでは風速変動幅は平均的に小さい。Fig. 16, Fig. 17に2001年1月1日から2年間730日間について、高度2kmと10kmを例として6時間毎の、それぞれ風速U, Vを示す。小刻みな変動をしていることがわかる。

4.2.2 気象データと赤道地方の上空風の特徴

長期計算としては、NCEP再解析データを風外力に用い、2001年1月1日から開始して、その後の2年間間の風によるテザーの変位の時間的な変化を調べた。ここでの検討では、宇宙エレベータのテザーは完成時の仕様とした。初期条件の引張応力65GPaと断面積比はFig. 7に与えたものと同じである。カウンターウェイトの質量は5,500t、テザーの厚さは350 μ m、テザーを含む総重量は6,973tとした。抗力係数は1.2を用いた。積分の時間刻みは0.01secとし、各時刻の風速は6時間毎のデータを時間方向に直線的に平滑化して外力とした。

Fig. 18, Fig. 19は、いくつかの高度(20km, 16,000km, 36,000km, および96,000km)における、テザーの東西(Y),

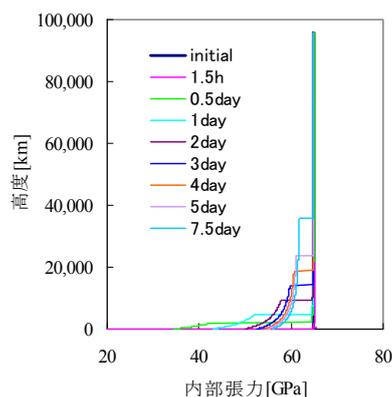


Fig. 12 クライマー走行時のテザーの引張応力の分布
Internal Tensile Stress with a Climber in Motion on the Tether

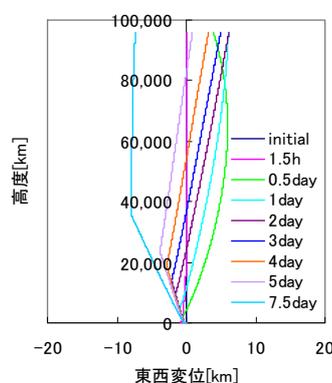


Fig. 13 クライマーからのコリオリ力によるテザー変位
East-West Displacements of the Tether with Effects of Coriolis Forces by a Moving Climber Included

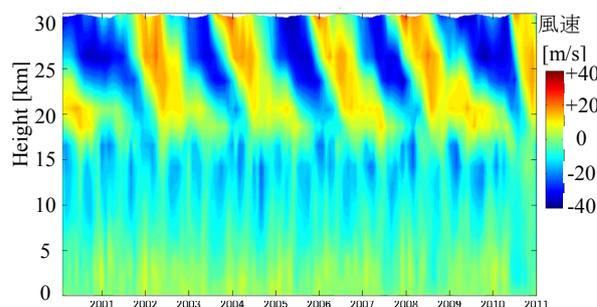


Fig. 14 風速東西成分の月平均の高度-時間断面
Height-time Cross Section of Monthly Mean Zonal Wind for the Period of 2001-2011

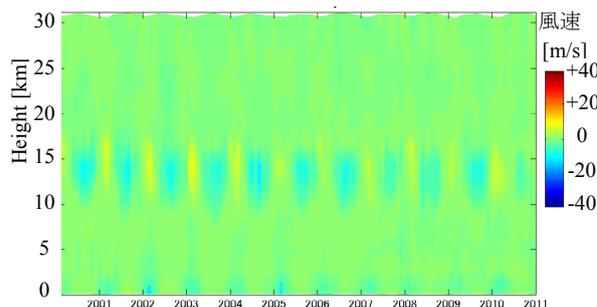


Fig. 15 風速南北成分の月平均の高度-時間断面
Same as Fig. 13 but for Meridional Wind.

および南北(Z)方向の変位である(座標の定義は Fig. 2 参照)。変位がゼロの初期条件から出発し、両方向とも風に応答する変位が生じている。Fig. 18 の東西方向変位は、低いほうの2高度でははじめの数日間のうちにほぼ横ばいになるが、36,000km, 96,000km の高い高度では、それは30~40日程度要している。それ以後は、基本的には風の変動に追随している。低い高度では変位に時間的に小刻みな変動があるが、高度とともに次第に滑らかになっている。また、変位の時間的な変動はごくわずかであるが、高度20kmでの変動に対し、高い高度で遅れが認められる。Fig. 19の南北方向変位は東西方向との風速の違いを反映し変位が全体的に小さい。低高度がやや南へ、高度が増すにつれやや北に変位した状態が続いている。

ケーブル全長にわたる変位の高度分布の東西、南北成分をそれぞれ Fig. 20, Fig. 21 に示す。Fig. 20 の day_61 などは計算開始からの経過日数を表しており、時刻はその日の00Zである。day_2, 61, 160, 244, 500, および600について鉛直分布が示してある。テザーの変位の東西方向では day_2 のような初期の段階で低高度に現れた風の影響による西への変位が高々度に伝播し、終端のカウンターウェイトの位置にいたるまでほぼ直線的に増加している。day_500では、Fig. 18の500日目に対応するように、全体にわずかに東に変位している。大気圏は宇宙エレベータの全長に対し、1,000分の1以下の長さしか占めないが、空気力の影響は全長に容易におよぶことがわかる。宇宙空間にはケーブルの運動を抑制する要因がないためである。南北変位には北方向へのわずかな傾きが持続的に見られる。これは、ケーブルが風の影響で主に西

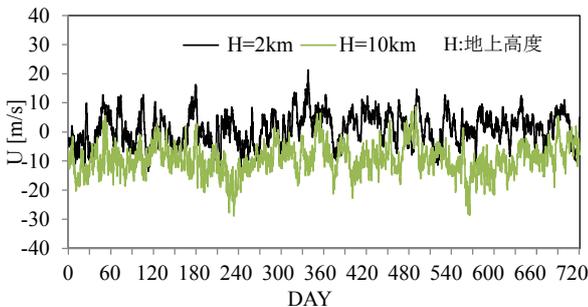


Fig. 16 6時間毎の東西風速(2001/01/01から2年分)
Six Hourly Zonal Wind of NCEP Reanalysis

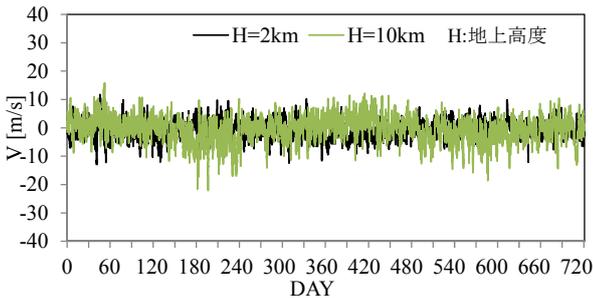


Fig. 17 6時間毎の南北風速(2001/01/01から2年分)
Same as Fig. 15 but for North-South Wind

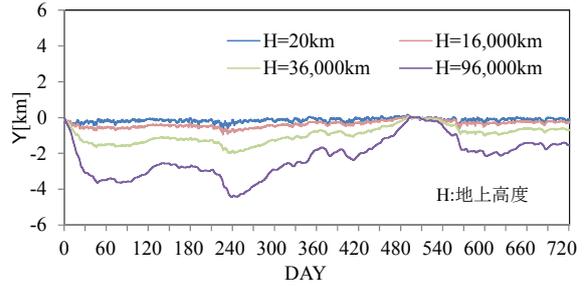


Fig. 18 テザーの東西変位 Y[km]の時間変化
Time Series of Displacement Y at Several Heights

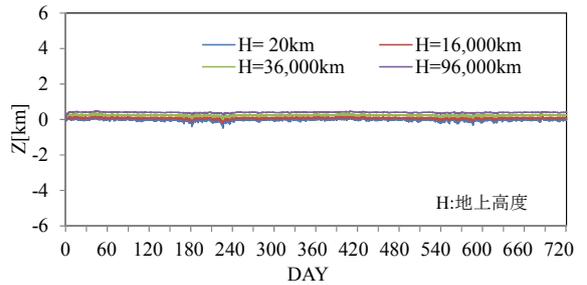


Fig. 19 テザーの南北変位 Z[km]の時間変化
Same as Fig. 17 but for Displacement Z

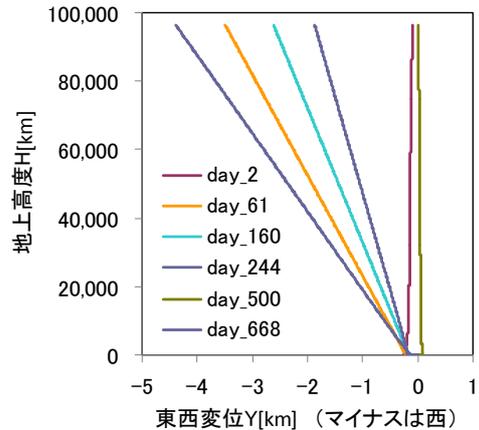


Fig. 20 テザーの東西変位の高度分布
Vertical Distributions of East-West Displacement Y

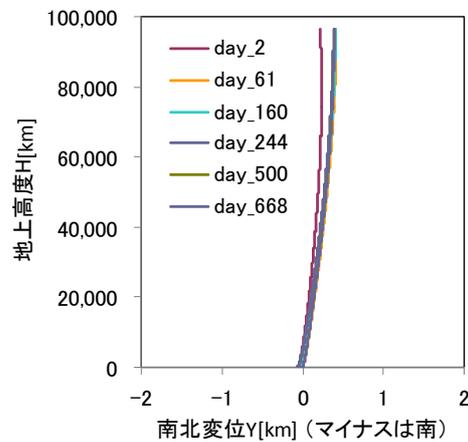


Fig. 21 テザーの南北変位の高度分布
Same as Fig. 19 but for North-South Displacement Z

向きに変位し、あわせて赤道から南北方向にわずかにずれることにより、本来赤道上では厳密にゼロであるコリオリ力の影響が出て、西向きの移動に対しケーブルを北にずらす作用が現れていることによる可能性が考えられる。

これらの計算から、風による変位は宇宙エレベータの全長にわたって容易に伝播するが、ここで行った長期計算では変位が一方向的に増加することではなく、例えば Fig. 20 の day_500 のように、変位がほとんど回復する時期もある。このように風の作用は宇宙エレベータのケーブルの安定性を損なうものではないと見ることができる。

5. まとめ

宇宙エレベータの力学方程式をばね-質点系で近似して離散化した数値モデルを開発した。あわせて、宇宙エレベータの力学の基礎を示すと共に、成立するための力学的要件を示した。結果は以下のようにまとめられる。

- 1) 地球の自転と同じ速さで地球の周りを公転する力学系は、静止軌道よりも外側では地球向きの張力を、静止軌道より内側では宇宙向きの張力を付加することで数学的に成立することが示された。
- 2) 地球との間の万有引力、回転運動の遠心力、弾性テザーの伸びの張力の3者が釣合った状態にあり、引張応力が一定となるような、テザーの断面積分分布を理論的に導出した。
- 3) 宇宙エレベータに持続的に作用する大気圏内の風によるケーブルの変位について数値的に調べた。その結果、断面形状の取り方によって風による変位に大きな違いが現れることが示された。
- 4) 2年分の気象データを用いて、赤道上に設置された宇宙エレベータのテザーに作用する空気力学的作用に対するテザーの応答を調べた。その結果、テザーは風の作用に対して比較的受動的であり、風による変位は容易に宇宙エレベータの先端まで達するものの、変位が一方向的に増幅するなどはみられなかった。大気圏内の風の作用に対しては、ケーブルは安定的に応答することが示された。

参考文献

- 1) 宇宙エレベータが人類にもたらすもの、

<http://www.jsea.jp/about-se/what-is-spaceelevator-04.html>,
宇宙エレベータ協会 HP, 2016.6.19 閲覧

- 2) Edwards, B. C., Design and deployment of a space elevator, *Acta Astronautica*, vol. 47, No.10, pp.735-744, 2000.11
- 3) Iijima, S., Carbon nanotubes: past, present, and future, *Physica B* 323, pp.1-5, 2002.10
- 4) 石川洋二等, 宇宙エレベータ建設構想, 季刊大林 55号, 大林組, 2012.3
- 5) Edwards, B. C. and E. A. Westling: The space elevator: a revolutionary earth-to-space transportation system, Spageo Inc, San Fransisco, CA, 2003.11
- 6) Lang, D. :Space elevator dynamics reference manual, Nasa Technical Report, pp.155, 2006.4
- 7) Cohen, S.S. and A.K. Misra :The effect of climber transit on the space elevator dynamics, *Acta Astronautica*, No.64, pp.538-553, 2009.8
- 8) Williams P.:Dynamics of multibody modeling for tethered space elevators, *Acta Astronautica*, No.65, pp.399-422, 2009.3.
- 9) Kaithi, V. :Design of space elevator, Master of Science thesis, Texas Tech Univ., pp.133, 2008.12
- 10) Williams, P. and W. Ockels :Climber motion optimization for the tethered space elevator, AIAA /AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit , Honolulu, Hawaii, pp.18-21, 2008.8
- 11) Demczyk, B. G., Y. M. Wang, J. Cumings, M. Hetman, W. Han, A. Zettl, R. O. Ritchie :Direct mechanical measurement of the tensile strength and elastic modulus of multi-walled carbon nanotubes. *Materials Science and Engineering A*, 334 (1-2): pp.173-178, 2002.9
- 12) Tao, K., Y. Yamagiwa, K. Otsuka and Y. Ishikawa, Study about the simultaneous deployment of performances of the cable from GEO station at the space elevator construction, Fifth International Conference on Tethers in Space, 24-26 May 2016, Ann Arbor, Michigan, USA
- 13) 松野太郎, 島崎達夫, 岸保勘三郎 : 成層圏と中間圏の大気, 大気科学講座 3, 東京大学出版会, pp.179, 1981
- 14) McClatchy, R.A., R.W.Fenn, J.E.A.Selby, F.E.Voltz and J.S.Garing : Optical properties of the atmosphere (3rd ed.), AFCRL Environ. Res. Papers No.411, pp.108, 1972.8