

粒子法 (MLS-SPH 法) を用いた土/水連成解析

中道 洋平 杉江 茂彦

Simulation of Ground Behavior Using Smoothed Particle Hydrodynamics

Yohei Nakamichi Shigehiko Sugie

Abstract

To precisely predict ground behavior, the accurate evaluation of ground deformation and the behavior of ground water are of vital importance. Soil/water coupled Finite Element Method (FEM) analysis is an effective numerical analysis method for evaluating ground behavior. However, due to excessive mesh distortions FEM analysis is not ideal for the solution of large deformation problems such as slope failure, seepage failure, and liquefaction. Recently Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) has gained popularity for addressing the challenge of large deformed continua. In this research, formulation of soil/water coupled analysis was conducted using the SPH method, and a numerical analysis program was developed. This report discusses the formulation, verification, and validation of the numerical analysis program that we developed.

概要

地盤の挙動予測を精度良く行うための数値解析技術として、土/水連成 FEM が広く用いられている。しかしながら、FEM は計算格子を有する解析手法であることから、斜面崩壊、浸透破壊、液状化など地盤の大変形や崩壊に関わる現象を扱う場合には適していない。そこで、地盤の大変形や崩壊を解析する手法として注目されている粒子法について、Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) 法をとりあげ、土/水連成解析の定式化を行い、数値解析プログラムを作成した。本報告では、土/水連成 MLS-SPH 法の理論と定式化、ならびに数値解析プログラムによる浸透破壊の実験の再現解析について報告する。

1. はじめに

地盤工学の数値解析分野では、盛土や掘削、トンネルなどの実施工において、有限要素法(以下、FEM: Finite Element Method)による数値解析が地盤の挙動予測に広く用いられている。一方で、近年、東日本大震災や熊本地震などの大地震やゲリラ豪雨をはじめとした異常気象が多発しており、これに伴う斜面の大規模崩壊、河川堤防などの土構造物の浸透破壊、液状化など地盤の大変形や崩壊に関わる現象に対しては、FEM を用いて数値解析を行うことは難しいと言える。FEM は計算格子を用いた計算手法であることから、地盤が大変形するにつれ要素に大きなひずみが生じ、計算精度が低下してしまうためである。

大変形を扱うことができる解析手法の一つとして、個別要素法(以下、DEM: Discrete Element Method)がある。DEM は地盤を離散体として仮定し、要素間に設けたばねとダッシュポットにより地盤の挙動をモデル化する解析手法である。DEM は簡単な力学モデルで地盤挙動を表現するため、現場や室内試験で得られるパラメータと解析パラメータとの整合が難しい。また、厳密に地盤の挙動を再現するためには、地盤内の土粒子一つ一つをモデル化する必要があり、大規模な地盤の挙動を解析する手法としては扱いつらい側面があるため、実用的な問題への適用は難しい。

一方、近年、FEM や DEM に加えて粒子法と呼ばれる数値解析手法が注目されている。粒子法は、地盤を Lagrange 粒子という粒子群でモデル化するものであり、FEM のように計算格子を有していないため、要素に関する制約なく大変形領域まで取り扱うことができる。また、FEM と同様に、連続体力学に基づいているため、FEM で適用されてきた地盤の非線形構成式を用いることができる。さらに、粒子群だけで複雑な物体形状のモデル化が可能であるため、プレ・ポスト処理も容易である。

本研究では、粒子法の中でも代表的な手法である Smoothed Particle Hydrodynamics(以下、SPH)法に着目した。SPH 法は、Lucy¹⁾によって開発された手法であり、もともと宇宙物理学の分野で星雲の生成や衝突を計算するために提案された。地盤工学分野への応用研究として、前田ら²⁾、Bui et al.³⁾、Wang et al.⁴⁾の研究がある。例えば、前田ら²⁾は、固相、液相、気相の三相の相互作用を考慮した SPH 法を提案しており、浸透破壊現象や大きな流動変形を伴う進行破壊現象を、定性的にはあるが表現できることを確認している。

本報告では、まず SPH 法の理論概要と、計算精度の高度化を図るために用いた移動最小二乗法(以下、Moving Least Squares :MLS)による SPH 法について述べる。次に、土/水連成問題への SPH 法の導入方法、ならびに止水壁周りのボイリング現象を対象とした模型実験の検証解析について述べる。

2. SPH法の概要

2.1 SPH法による定式化

SPH法は、対象領域内部にランダムに分布した評価点(粒子)を用いて、Kernel積分と呼ばれる補間により、運動方程式や連続式などを近似的に解く。例えば、ある関数 $f(x)$ が与えられたとき、関数 $f(x)$ のKernel積分による近似 $\langle f(x) \rangle$ は、以下の式(1)で表される。

$$\langle f(x) \rangle = \int_{\Omega} f(x') W(x-x', h) dx' \quad (1)$$

ここに、 Ω は x および x' を含む積分領域、 h は影響半径であり $W(x-x', h)$ の大きさを規定するパラメータ、 $W(x-x', h)$ はKernel関数もしくは平滑化関数と呼ばれる重み関数である。Kernel関数は以下の3つの性質を満足しなければならない。

- ① 規格化されていること

$$\int_{\Omega} W(x-x', h) dx' = 1 \quad (2)$$

- ② Kernel関数の極限がDelta関数であること

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(x-x', h) = \delta(x-x') \quad (3)$$

- ③ 影響半径の範囲外で0になるコンパクト化が可能であること

$$W(x-x', h) = 0 \quad \text{when } |x-x'| > \kappa h \quad (4)$$

ここに、 κ は影響半径係数であり、Fig. 1に示すようにKernel積分の影響範囲を設定する係数である。

式(2)~式(4)を満足するKernel関数には、Gauss関数をはじめB-Spline関数など多くの関数が提案されている。SPH法ではKernel関数の選定は任意であるため、本研究では、解析精度を考慮して5次スプライン関数(以下、QSI: Quintic Spline Interpolation)を用いることとした。 x と x' の相対距離と影響半径を用いた $R = |x-x'|/h$ を定義すると、QSIは次のようになる。

$$W(R) = \frac{\alpha_d}{120} \times \begin{cases} \cdot 0 \leq R < 1 \text{ のとき,} \\ (3-R)^5 - 6(2-R)^5 + 15(1-R)^5 \\ \cdot 1 \leq R < 2 \text{ のとき,} \\ (3-R)^5 - 6(2-R)^5 \\ \cdot 2 \leq R < 3 \text{ のとき,} \\ (3-R)^5 \\ \cdot 3 \leq R \text{ のとき,} \\ 0 \end{cases} \quad (5)$$

ここに対象が1次元の場合 $\alpha_d = 1/h$ 、2次元の場合 $420/239\pi h^2$ 、3次元の場合 $1/\pi h^3$ である。

ある関数 $f(x)$ の空間勾配 $\nabla \cdot f(x)$ のKernel積分による近似は、式(1)の $f(x)$ を $\nabla \cdot f(x)$ に置き換えて、

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot f(x) \rangle &= \int_{\Omega} [\nabla \cdot f(x')] W(x-x', h) dx' \\ &= \int_{\Omega} \nabla \cdot [f(x') W(x-x', h)] dx' \\ &\quad - \int_{\Omega} f(x') \cdot \nabla W(x-x', h) dx' \end{aligned} \quad (6)$$

と表現される。式(6)にガウスの発散定理を用いると、次式のようになる。

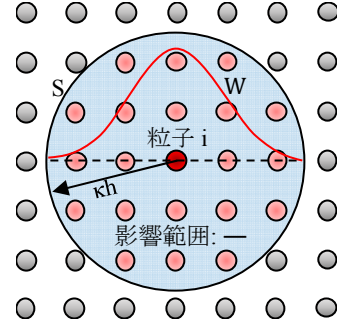


Fig. 1 粒子iの影響範囲
Support Domain of Particle i

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot f(x) \rangle &= \int_S f(x') W(x-x', h) \cdot \vec{n} dS' \\ &\quad - \int_{\Omega} f(x') \cdot \nabla W(x-x', h) dx' \end{aligned} \quad (7)$$

ここに、 S は境界を表し、 \vec{n} は境界 S の外向き単位法線ベクトルである。式(4)で表されるKernel関数の性質より、境界 S では $W(x-x', h) = 0$ であることから式(7)は、

$$\langle \nabla \cdot f(x) \rangle = - \int_{\Omega} f(x') \cdot \nabla W(x-x', h) dx' \quad (8)$$

となり、空間勾配 $\nabla \cdot f(x)$ のKernel積分による近似式が求められる。

SPH法では、対象領域を質量や密度、応力、速度といった物理量を持つ粒子の集合体として表す。Fig. 1に示すように、粒子 i のSupport domainと呼ばれる影響範囲内に N 個の粒子が存在し、Support domain内にある粒子 j の質量を m_j 、密度を ρ_j 、粒子の中心位置を x_j とすると、式(1)のKernel積分は以下のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} \langle f(x) \rangle &= \int_{\Omega} f(x') W(x-x', h) dx' \\ &\approx \sum_{j=1}^N f(x_j) W(x-x_j, h) \frac{m_j}{\rho_j} \end{aligned} \quad (9)$$

式(9)を用いると、粒子 i における $\langle f(x_i) \rangle$ は、次式のようになる。

$$\langle f(x_i) \rangle = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(x_j) W_{ij} \quad (10)$$

ここに、 $W_{ij} = W(x_i - x_j, h)$ である。粒子 i の空間勾配 $\langle \nabla \cdot f(x_i) \rangle$ は、

$$\nabla_i W_{ij} = -\nabla_j W_{ij} \quad (11)$$

であることに注意すると、式(8)より、

$$\langle \nabla \cdot f(x_i) \rangle = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(x_j) \nabla_i W_{ij} \quad (12)$$

と求められる。ここに、

$$\nabla_i W_{ij} = \frac{x_i - x_j}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} = \frac{x_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \quad (13)$$

である。ただし、 r_{ij} は粒子 i と粒子 j の相対距離である。式(12)は微分操作によって、以下の式(14)および式(15)に変形して用いられることもある。

$$\langle \nabla \cdot f(x_i) \rangle = \frac{1}{\rho_i} \sum_{j=1}^N m_j (f(x_j) - f(x_i)) \nabla_i W_{ij} \quad (14)$$

$$\langle \nabla \cdot f(x_i) \rangle = \rho_i \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{f(x_i)}{\rho_i^2} + \frac{f(x_j)}{\rho_j^2} \right) \nabla_i W_{ij} \quad (15)$$

2.2 MLS-SPH法

MLS-SPH法は、Dilts^{5) 6)}によって提案され、重み関数として用いられるKernel関数をQSIから変形させることで、SPH法における数値不安定性を回避し、SPH法の高精度化を図る手法である。

MLS-SPH法では、物理量 u を次のように多項式によって近似する。

$$u(x) = P(x) \cdot a(x) \quad (16)$$

ここに、 $P(x)$ は多項式基底ベクトルであり、次式で表される。

$$P^T(x) = [1, x, y, z, x^2, xy, \dots] \quad (17)$$

$P(x)$ の係数である $a(x)$ は、重み付き二乗誤差である

$$J = \sum_j (P_j \cdot a(x) - u_j)^2 W(x - x_j, h) \quad (18)$$

を最小にするよう定めるので、 $\partial J / \partial a = 0$ を解く。

$$\partial J / \partial a = \sum_j 2P_j (P_j \cdot a(x) - u_j) W(x - x_j, h) = 0 \quad (19)$$

より、

$$\begin{aligned} \left[\sum_j P_j \otimes P_j W(x - x_j, h) \right] \cdot a(x) \\ = \sum_j P_j u_j W(x - x_j, h) \end{aligned} \quad (20)$$

となることから、 $a(x)$ は次のように表される。

$$a(x) = A^{-1}(x) \cdot \sum_j P_j u_j W(x - x_j, h) \quad (21)$$

ここに、 $A(x)$ はモーメントマトリクスと呼ばれ、

$$A(x) = \sum_j P_j \otimes P_j W(x - x_j, h) \quad (22)$$

で定義される。式(21)を式(16)に代入すると、

$$u(x) = P(x) \cdot \left[A^{-1}(x) \cdot \sum_j P_j u_j W(x - x_j, h) \right] \quad (23)$$

となる。したがって、粒子 i における物理量 u_i は以下の近似式で表される。

$$u_i = \sum_{j=1}^N P_i \cdot A_i^{-1} \cdot P_j W_{ij} u_j \quad (24)$$

$$\phi_{ij} = P_i \cdot A_i^{-1} \cdot P_j W_{ij} \quad (25)$$

と置くと式(24)は、

$$u_i = \sum_{j=1}^N u_j \phi_{ij} \quad (26)$$

と表すことができる。つまり、式(26)と式(10)を比較すると、 ϕ はMLS-SPH法におけるKernel関数となることが分かる。SPH法の定式化における式(10)と式(12)の関係から、物理量 u の空間勾配は以下の式で表される。

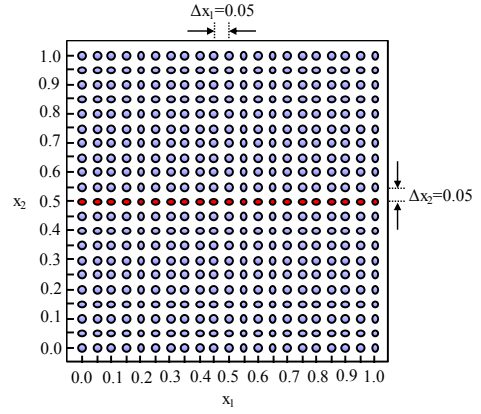


Fig. 2 2次元場における粒子の配置
Distribution of Particle for 2-D

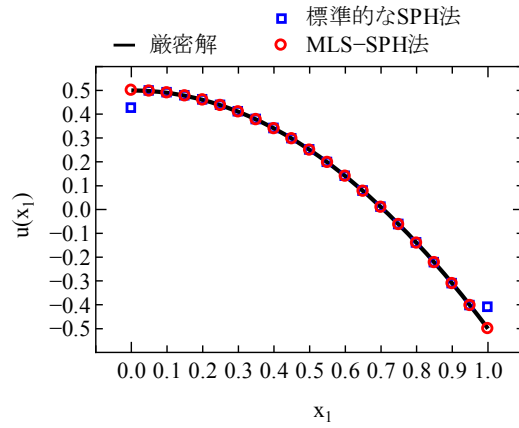


Fig. 3 SPH法とMLS-SPH法による関数の近似
SPH and MLS-SPH of Function u

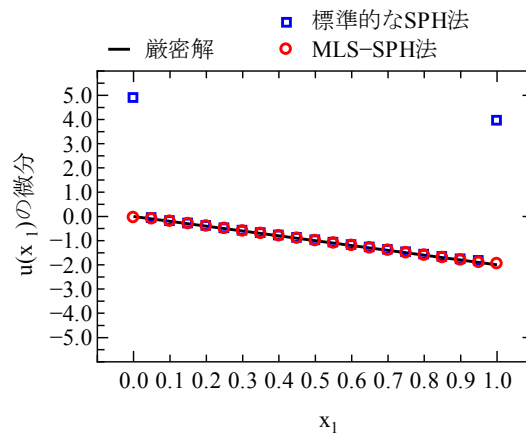


Fig. 4 SPH法とMLS-SPH法による関数微分の近似
SPH and MLS-SPH of Derivative of Function u

$$\nabla u_i = \sum_{j=1}^N u_j \nabla_i \phi_{ij} \quad (27)$$

また、ラプラシアンは、

$$\nabla^2 u_i = \sum_{j=1}^N u_j \nabla_i^2 \phi_{ij} \quad (28)$$

となる。

ここで、標準的な SPH 法と MLS-SPH 法の近似精度の比較を行うために、関数

$$u(x_1) = -x_1^2 + 0.5 \quad (29)$$

および関数の微分

$$u'(x_1) = -2x_1 \quad (30)$$

の再現性の比較を行う。関数の近似には Fig. 2 に示すように、2次元場において $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 0.05$ の等間隔に配置した粒子を用いた。ただし、粒子の配置は $0.0 \leq x_1 \leq 1.0$, $0.0 \leq x_2 \leq 1.0$ とした。影響半径はどちらの近似とも $h = 1.2\Delta x_1$ とし、標準的な SPH 法における質量と密度については、粒子の体積を考慮し、 $m/\rho = 0.05 \times 0.05$ を満足するよう設定した。

$x_2 = 0.5$ 上の 20 節点における関数の近似値を厳密解とともに Fig. 3 に示し、その微分の近似値を厳密解とともに Fig. 4 に示す。標準的な SPH 法では、領域境界付近で近似精度の低下が生じている。これは、標準的な SPH 法では、領域境界付近において近傍粒子が不足し、Kernel 関数の条件である式(2)を満たすことができなくなるためである。一方、MLS-SPH 法では、領域境界付近においても良好な近似精度であることが確認できる。ここでは、MLS-SPH 法を用いることで、近傍粒子の不足による近似精度低下を回避することを示したが、他にも粒子分布が不均一になることによる近似精度低下や、Tensile instability と呼ばれる粒子同士がくっついてしまい元に戻らなくなる数値的な不安定性を低減できるなどの利点がある。これらの説明は文献^{2),6)}を参照されたい。以降、本研究では、MLS-SPH 法を用いることとした。

3. 土/水連成 MLS-SPH 法

3.1 支配方程式と初期条件・境界条件

地下水を有する地盤変形を考える場合、地盤を土骨格(固相)と間隙水(液相)の二相混合体として考えるのが一般的である。これまでの地盤分野の SPH 法の研究^{2),3),4)}では、二相を別々粒子群に分けて設け、それを重ね合わせて相互作用を考慮する手法が多く採用されてきた。この手法を用いた場合、計算のアルゴリズムが分かりやすく、連立方程式を解く必要がないため計算速度も速くなるといった利点がある。しかし、間隙水圧の計算に状態方程式²⁾を用いていることから、基準圧力などのパラメータ設定が難しく、対象となる計算毎にパラメータを検討する必要が生じる。そこで、本研究では、土骨格と間隙水の二相を有する粒子群を用いて計算する土/水連成解析を試みた。土/水連成解析^{7),8)}は、Biot⁹⁾の多次元圧密理論に基づいており、FEM でも広く用いられている。そのため、SPH 法を幅広く適用する上でも有効であると考えた。

Fig. 5 に土/水連成解析の支配方程式を示す。ここに、 σ は全応力テンソル、 σ' は有効応力テンソル、 $\dot{\sigma}'$ は Jaumann

□支配方程式	
土の骨格	運動方程式 $\rho \dot{v} = \nabla \cdot \sigma + \rho g$ (31)
	適合条件 $\dot{\varepsilon} = (\nabla \otimes v)^{sym}$ (32)
	速度スピン関係 $\omega = (v \otimes \nabla)^{skw}$ (33)
	構成式 $\dot{\sigma}' = C : \dot{\varepsilon}$ (34)
	$\dot{\sigma}' = \dot{\sigma}' - \sigma' \cdot \omega + \omega \cdot \sigma'$ (35)
有効応力の原理 $\sigma = \sigma' - P_w I$ (36)	
間隙水	連続条件 $\dot{\varepsilon}_v + \nabla \cdot \dot{w} + \frac{n}{K_w} \dot{P}_w = 0$ (37)
	Darcy 則 $\dot{w} = -k \cdot \nabla h$ (38)
	$\left(h = \frac{P_w}{\gamma_w} + \Omega \right)$ Ω : 位置水頭

Fig. 5 土/水連成 MLS-SPH 法の支配方程式
Governing Equation of Soil/Water Coupled MLS-SPH

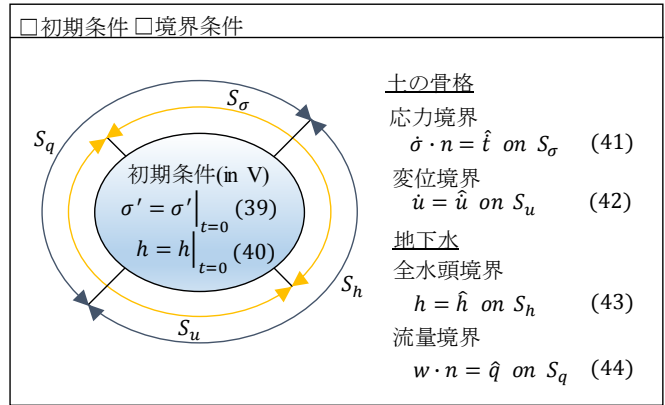


Fig. 6 初期条件と境界条件
Initial Condition and Boundary Condition

応力テンソル、 C は剛性マトリクス、 v は速度、 ε はひずみテンソル、 ω はスピンテンソル、 ρ は密度、 g は重力加速度、 ε_v は体積ひずみ、 w はダルシー速度、 K_w は間隙水の体積圧縮係数、 n は間隙率、 P_w は間隙水圧、 k は透水係数、 h は全水頭、 γ_w は水の単位体積重量である。変数上部のドット($\dot{\cdot}$)は時間微分、式(32)の sym は対称テンソル、式(33)の skw は反対称(歪対称)テンソル、 \otimes はテンソル積、 $:$ はテンソルの複内積を示す。また、応力とひずみの符号は引張を正、圧縮を負、間隙水圧は引張を負、圧縮を正と定義している。

本研究では対象を飽和地盤の問題に限定している。土骨格の変形を支配する式は、運動方程式、構成式、適合条件、速度-スピン関係である。間隙水の流れを支配する式は連続条件と Darcy 則である。有効応力の原理は、土骨格の変形と間隙水の流れの両方に関与し、相互の作用を関連付ける式である。

境界条件と初期条件を Fig. 6 に示す。変数上部のドット($\dot{\cdot}$)は時間微分、ハット($\hat{\cdot}$)は既知であることを意味し

ており、 \hat{i} は既知応力ベクトル、 \hat{u} は既知変位ベクトル、 \hat{h} は既知全水頭、 \hat{q} は既知流量である。初期条件は有効応力および全水頭を与える。これらの境界条件および初期条件のもとで支配方程式を連立させて解くことで、地盤と間隙水の流れの連続挙動を表現することができる。

3.2 土/水連成 MLS-SPH 法の定式化

運動方程式(31)に有効応力の原理(36)を代入すると、

$$\dot{v} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \sigma' - \frac{1}{\rho} \nabla P_w + g \quad (45)$$

である。ステップ n からステップ $n+1$ のタイムステップ ($\Delta t = t^{n+1} - t^n$) において、式(45)を時間離散化すると次のようになる。

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \sigma'^n - \frac{1}{\rho} \nabla P_w^n + g \quad (46)$$

式(46)の両辺の発散をとり整理すると、

$$\nabla \cdot v^{n+1} = \nabla \cdot v^n + \frac{\Delta t}{\rho} \nabla \cdot (\nabla \cdot \sigma'^n) - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla^2 P_w^n + \nabla \cdot g \quad (47)$$

となる。ここで、 h^e を位置水頭とすると、 $P_w = \gamma_w(h - h^e)$ であり、 $\nabla^2 P_w = \gamma_w \nabla^2 h$ および $\nabla \cdot g = 0$ であるから、式(47)は、

$$\nabla \cdot v^{n+1} = \nabla \cdot v^n + \frac{\Delta t}{\rho} \nabla \cdot (\nabla \cdot \sigma'^n) - \frac{\Delta t}{\rho} \gamma_w \nabla^2 h^n \quad (48)$$

となる。連続式(37)に Darcy 則(38)を代入すると、次式のようになる。

$$-\nabla \cdot (k \cdot \nabla h) + \nabla \cdot v + \frac{n}{K_w} \dot{P}_w = 0 \quad (49)$$

$\dot{P}_w = \gamma_w \dot{h}$ であり、透水係数は方向性によらないと仮定すると、式(49)は、

$$-k \nabla^2 h + \nabla \cdot v + \frac{\gamma_w n}{K_w} \dot{h} = 0 \quad (50)$$

となる。式(50)を時間離散化すると、

$$-k \nabla^2 h^{n+1} + \nabla \cdot v^{n+1} + \frac{\gamma_w n}{K_w} \frac{h^{n+1} - h^n}{\Delta t} = 0 \quad (51)$$

であり、式(51)に式(48)を代入すると、次の式が得られる。

$$\left[\frac{\gamma_w n}{\Delta t K_w} - k \nabla^2 \right] h^{n+1} = -\nabla \cdot v^n - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla \cdot (\nabla \cdot \sigma'^n) + \frac{\Delta t}{\rho} \gamma_w \nabla^2 h^n + \frac{\gamma_w n}{\Delta t K_w} h^n \quad (52)$$

次に、式(52)を MLS-SPH 法を用いて空間離散化することを考える。式(52)に式(27)～式(29)を適用すると、

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma_w n}{\Delta t K_w} h_i^{n+1} - k \sum_{j=1}^N (h_j^{n+1} - h_i^{n+1}) \nabla_i^2 \phi_{ij} \\ &= - \sum_{j=1}^N (v_j^n - v_i^n) \cdot \nabla_i \phi_{ij} \\ & \quad - \frac{\Delta t}{\rho_i} \sum_{j=1}^N \left\{ (\nabla \cdot \sigma'^n)_j - (\nabla \cdot \sigma'^n)_i \right\} \cdot \nabla_i \phi_{ij} \\ & \quad + \frac{\Delta t}{\rho_i} \gamma_w \sum_{j=1}^N (h_j^n - h_i^n) \nabla_i^2 \phi_{ij} + \frac{\gamma_w n}{\Delta t K_w} h_i^n \end{aligned} \quad (53)$$

となる。式(53)はすべての粒子について重ね合わせると、

$$[A] \{h^{n+1}\} = \{b\} \quad (54)$$

という形で表される各粒子の h^{n+1} を未知数とする連立一次方程式となる。ただし、 $[A]$ は係数マトリクス、 $\{b\}$ は

既知ベクトルである。したがって、これを解くことによって、 $n+1$ ステップにおける全水頭を求めることができる。

一方、運動方程式(31)を時間離散化すると、

$$v^{n+1} = v^n + \frac{\Delta t}{\rho} \nabla \cdot \sigma^n + \Delta t g \quad (55)$$

となる。式(55)を空間離散化すると、

$$v_i^{n+1} = v_i^n + \Delta t \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \sigma^n \right)_i + \Delta t g \quad (56)$$

となる。式(56)の右辺第二項については、

$$\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \sigma^n = \nabla \cdot \left(\frac{\sigma^n}{\rho} \right) + \frac{\sigma^n}{\rho^2} \cdot \nabla \rho \quad (57)$$

と変形することができ、これを式(27)および式(28)を用いて空間離散化する。空間離散化の際、数値振動を抑制するための Monaghan¹⁰⁾の人工粘性を加えると、次式のように表される。

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \sigma^n \right)_i &= \sum_{j=1}^N \left(\frac{\sigma_i^n}{\rho_i^2} \rho_j - \frac{\sigma_j^n}{\rho_j} \right) \cdot \nabla_i \phi_{ij} \\ & \quad - \sum_{j=1}^N \rho_j \Pi_{ij} l \cdot \nabla_i \phi_{ij} \end{aligned} \quad (58)$$

である。ここに、 Π_{ij} は Monaghan¹⁰⁾の人工粘性における粘性減衰項であり、

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{-\alpha c_{ij} \theta_{ij} + \beta \theta_{ij}^2}{\rho_{ij}} & v_{ij} \cdot x_{ij} < 0 \\ 0 & v_{ij} \cdot x_{ij} \geq 0 \end{cases} \quad (59)$$

$$\theta_{ij} = \frac{h_{ij} v_{ij} \cdot x_{ij}}{|x_{ij}|^2 + 0.01 h_{ij}^2}$$

$$c_{ij} = \frac{c_i + c_j}{2}$$

$$\rho_{ij} = \frac{\rho_i + \rho_j}{2}$$

$$h_{ij} = \frac{h_i + h_j}{2}$$

と表される。 α および β は任意の定数である。式(58)を式(56)に代入すると、次式のようになる

$$\begin{aligned} v_i^{n+1} &= v_i^n + \Delta t \sum_{j=1}^N \left(\frac{\sigma_i^n}{\rho_i^2} \rho_j - \frac{\sigma_j^n}{\rho_j} \right) \cdot \nabla_i \phi_{ij} \\ & \quad - \Delta t \sum_{j=1}^N \rho_j \Pi_{ij} l \cdot \nabla_i \phi_{ij} + \Delta t g \end{aligned} \quad (60)$$

粒子の速度については式(60)を用いて更新する。

3.3 流量境界条件について

各粒子の h^{n+1} を未知数とする連立一次方程式である式(53)について考える。この方程式を解くことは、

$$J = \frac{1}{2} \{h\}^T [A] \{h\} - \{h\}^T \{b\} \quad (61)$$

を最小とする $\{h\}$ を求めることと同義である。これは、

$$\frac{\partial J}{\partial h_1} = 0, \frac{\partial J}{\partial h_2} = 0, \dots, \frac{\partial J}{\partial h_N} = 0 \quad (62)$$

が成り立つためである。未知数に何らかの制約条件、例えば $h_1 = \hat{h}_1$ などがある場合は、 $G = h_1 - \hat{h}_1 = 0$ において、

$$\text{Lagrange 方程式: } J^* = J + \lambda G \quad (63)$$

を最小とする{h}を求める問題に帰着する。制約条件が複数ある場合には、

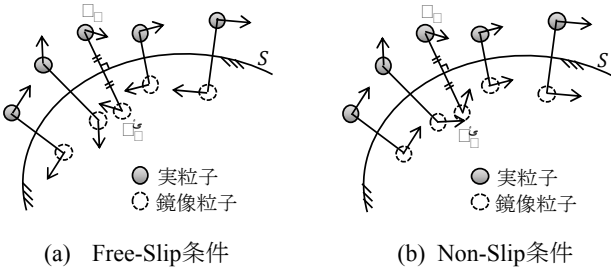


Fig. 7 鏡像粒子の速度条件
Velocity of Mirror Image Particles

$$J^* = J + \sum_m \lambda_m G_m \quad (64)$$

とすれば良い。このような方法を Lagrange の未定乗数法と呼ぶ。関・竹山¹¹⁾は SPH 法を用いた不飽和非常流解析において、Lagrange の未定乗数法を用いて流量境界条件を設定しており、本研究でもこの方法を踏襲することとした。

流量境界条件(44)に Darcy 則(38)を代入すると、

$$\hat{q} + k\nabla h \cdot n = 0 \quad (65)$$

となり、式(65)が制約条件となる。つまり、Lagrange 方程式は、

$$J^* = \frac{1}{2} \{h\}^T [A] \{h\} - \{h\}^T \{b\} + \sum_m \lambda_m (\hat{q}_m + k\nabla h_m \cdot n_m) \quad (66)$$

であり、

$$\frac{\partial J^*}{\partial h} = 0, \quad \frac{\partial J^*}{\partial \lambda} = 0 \quad (67)$$

を解くことで、流量境界条件を考慮した各粒子の h^{n+1} を求めることができる。

3.4 壁境界について

SPH 法における壁境界の表現は、壁粒子を配置する方法やペナルティー法などいくつか提案されているが、本研究では、秋元ら¹²⁾を参考に、鏡像粒子による壁境界表現を用いることとした。

壁境界を S とし、S と粒子中心との距離が影響範囲以下となる粒子についてのみ、鏡像粒子が必要となる。粒子 i の鏡像粒子の位置は、

$$x' = x - 2l_s n \quad (68)$$

である。ここに、 l_s は粒子 i と S の距離、 n は粒子 i 近傍の S における単位法線ベクトルである。Fig. 7 に示すように、鏡像粒子の速度は、摩擦を考慮しない Free-Slip 条件と、摩擦を考慮した Non-Slip 条件によって、それぞれ、

$$v' = \begin{cases} v - 2(v \cdot n)n & \dots \text{Free-Slip 条件} \\ -v & \dots \text{Non-Slip 条件} \end{cases} \quad (69)$$

で与えられる。以下、鏡像粒子ではない粒子を実粒子と呼び、鏡像粒子と区別する。

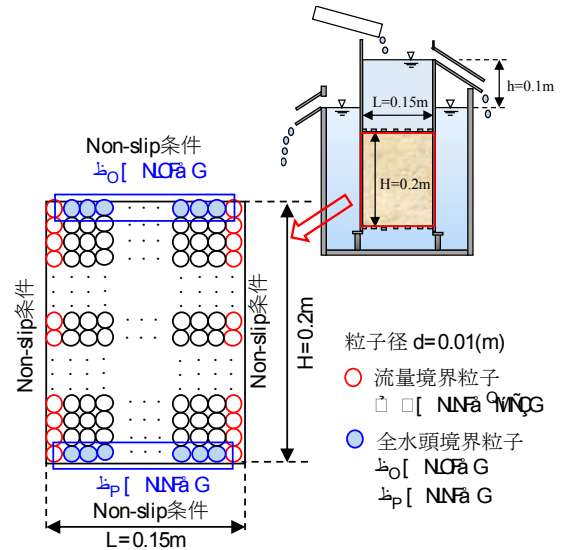


Fig. 8 飽和地盤中の浸透問題
Seepage Analysis in Saturated Soil

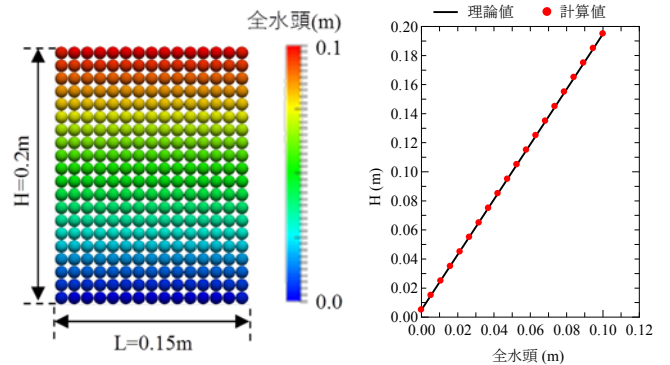


Fig. 9 全水頭コンター
Contour Plots of Total Water Head

Fig. 10 全水頭分布
Distribution of Total Water Head

4. 理論問題についての検証解析

4.1 飽和地盤中の定常流れの問題による検証解析

本手法の全水頭境界条件および流量境界条件が正しく設定できていることを検証するために、Fig. 8 に示す定水位透水試験のような土コラム中の浸透問題に対する解析を行った。本解析は、土骨格の運動を考慮せず、間隙水のみを考慮した解析とした。つまり、粒子の動きを拘束することから $\nabla \cdot v = 0$ であり、比貯留係数を S_s とし、

$$S_s = \frac{\gamma_w n}{K_w} \quad (70)$$

で定義すると、式(50)は飽和地盤の流れの基礎方程式となる。さらに、間隙水を完全非圧縮と仮定すると、 $S_s \cong 0$ となり、式(50)はラプラス式に帰着する。

土コラムは幅 0.15m, 高さ 0.2m とし, 粒子径を 0.01m として均一に配置した。実粒子の総数は 300 個である。土コラムの上下端には全水頭の境界条件を与えた粒子を配置し, 上下端の水頭差 0.1m を与えた。両側面には流量境界条件を与えた粒子を配置し, 非排水条件となるようにした。壁境界は Non-Slip 条件とし, 粒子の運動が拘束されるよう設定した。

Fig. 9 に全水頭のコンターを示し, Fig. 10 に高さ方向の全水頭分布を示す。土コラム中の全水頭は, 横方向には一様な分布を示すとともに, 上端から下端に向かって直線的に減少しており, 与えた水頭条件による理論値と

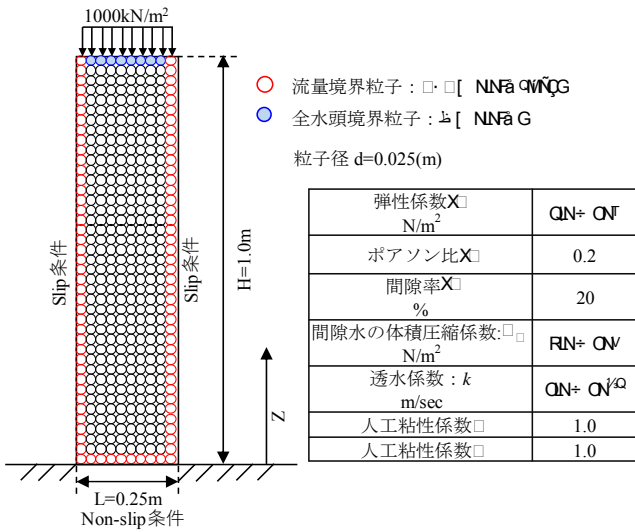


Fig. 11 一次元弾性圧密問題
1D Consolidation Model

も良く整合している。以上の結果から, 全水頭境界条件および流量境界条件が正しく設定できていることが確認できる。

4.2 一次元弾性圧密の問題による検証解析

次に, 土骨格と間隙水の連成挙動を検証するため, 一次元弾性圧密問題に対する解析を行い, 理論解との比較を行った。一次元弾性圧密の理論解は, Terzaghi による圧密方程式のフーリエ級数を用いた解とした。理論式の詳細については文献¹³⁾を参照されたい。

解析モデルを Fig.11 に示す。解析モデルは幅 0.25m, 高さ 1.0m とし, 粒子径を 0.025m として均一に配置した。実粒子の総数は 400 個である。解析モデルの両側面は Free-Slip 条件, 下端は Non-Slip 条件, 上端は自由とした。解析モデル上端の粒子には上載荷重として 1000kN/m² の応力境界条件を与えた。また, 片面排水条件を与えるために, 解析モデル上端の粒子にのみ全水頭の境界条件を与え, 下端および両側面の粒子には非排水条件を与えた。人工粘性パラメータは, Monaghan¹⁰⁾に基づき決定した。

Fig. 12 に上載荷重で正規化した過剰間隙水圧分布を示し, Fig. 13 に上端の変位についての圧密度を示す。過剰間隙水圧分布, 圧密度ともに Terzaghi の理論解と良く整合している。以上の結果から, 土骨格と間隙水の連成挙動が本手法を用いることで正確に解けることが確認された。

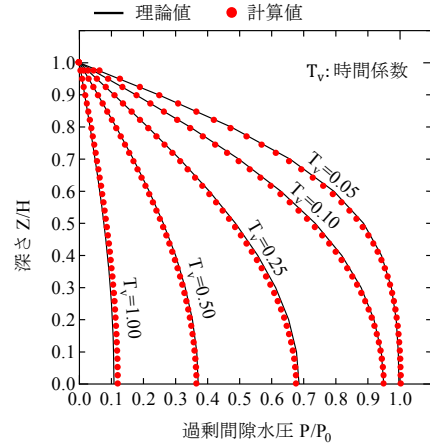


Fig. 12 過剰間隙水圧の分布
Distribution of Excess Pore Water Pressure

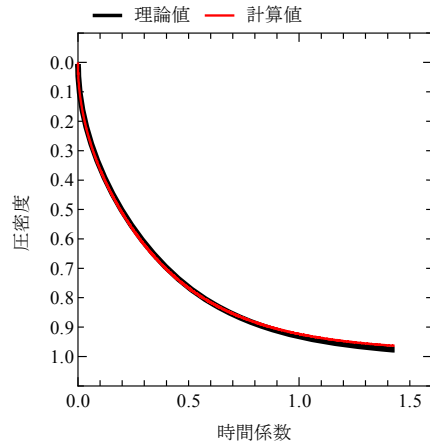


Fig. 13 圧密度の時間変化
Degree of Consolidation - Time Relationship

5. ボイリング実験を対象とした解析検証

土/水連成 MLS-SPH 法の妥当性を確認する目的で, 止水壁まわりのボイリングの模型実験を実施し, SPH 法によるボイリング発生過程の再現性を解析で検証した。

Fig.14 にボイリング実験の概要図を示す。模型地盤は珪砂 6 号を用い, 空中落下法で地盤を作製後, 緩速で浸水させた。模型地盤の厚さは 0.15m とし, 止水壁の根入れ長は 0.05m とした。実験では, 上流側の水位を一定に保ち, 排水孔を設置した下流側の水位を下げることで水頭差を与えた。投入した珪砂 6 号の重量と撤出した体積

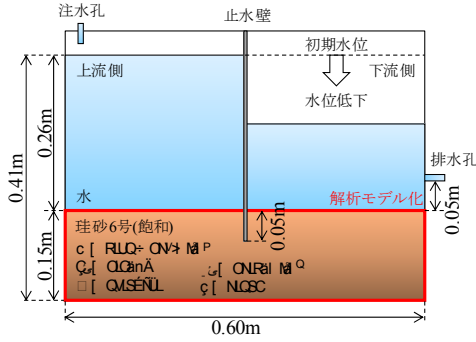


Fig. 14 ボイリング実験の概要図
Schematic View of Boiling Test

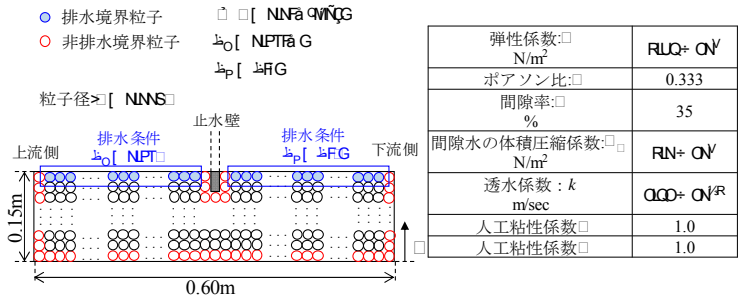


Fig. 15 SPH法の解析モデル
SPH Analysis Model

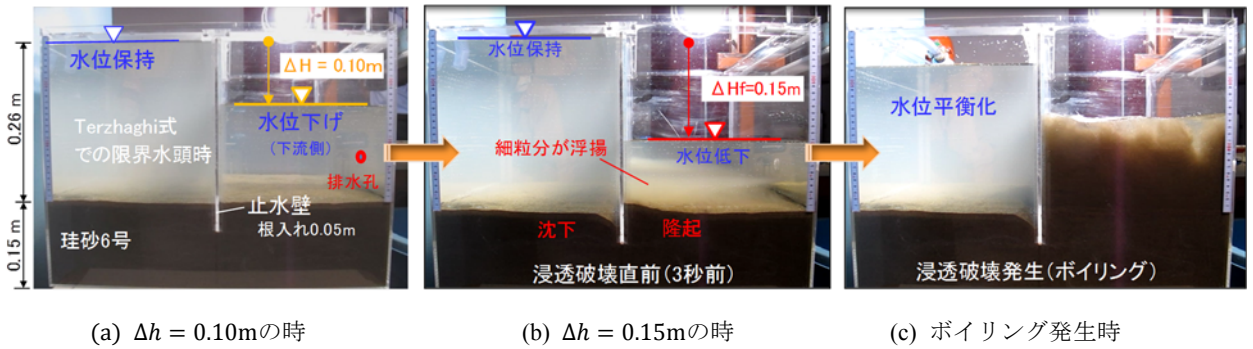


Photo 1 模型実験での浸透破壊の発生状況
Seepage Failure in Model Test

から、間隙率は 35%、水中単位体積重量は 10.4kN/m^3 と見込まれた。

Terzaghi の理論による検討方法では、ボイリング時の止水壁の内部における地盤中の過剰間隙水圧と抵抗する土の重量の関係は、

$$U = \gamma' L_d \quad (71)$$

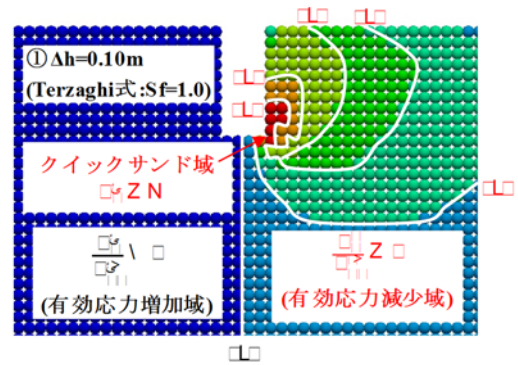
とされる。ここに、 U は平均過剰間隙水圧、 γ' は地盤の単位体積重量、 L_d は止水壁の根入れ長である。 U は水頭差 Δh_f の1/2とするのが一般的であることから、 Δh_f は、

$$\begin{aligned} \Delta h_f &= 2\gamma' L_d / \gamma_w \\ &= 2 \times 10.4 \times 0.05 / 10.0 = 0.104(\text{m}) \end{aligned} \quad (72)$$

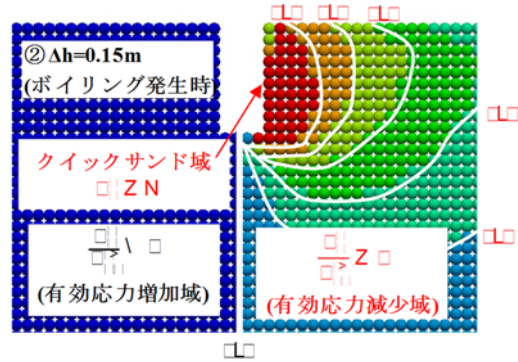
となる。ここに、 γ_w は間隙水の単位体積重量である。

MLS-SPH 法における解析モデルを Fig. 15 に示す。粒子径は 0.005m とし、実粒子の総数は 3560 個である。実験で用いた止水壁の厚みは 0.005m であったが、止水壁を隔てた粒子同士が影響を及ぼし合わないよう、解析では止水壁の厚みを 0.02m とした。止水壁のまわりおよび土槽境界部には流量境界条件を与えた粒子を配置し、非排水条件となるよう設定した。上流側および下流側の地表面には水頭境界条件を与えた粒子を配置した。下流側の水頭境界条件は、実験を模擬し、0.01m/min の速度で $h_2 = 0.26\text{m}$ から低下させた。砂地盤は線形弾性体でモデル化した。

Photo 1 に模型実験におけるボイリング発生の様子を示す。式(72)から求めた水頭差 0.10m のときには、ボイ



(a) $\Delta h = 0.10\text{m}$ の時



(b) $\Delta h = 0.15\text{m}$ の時

Fig. 16 鉛直有効応力分布
Distribution of Vertical Mean Effective Stress

リングは発生する様子はなく、地盤の変位はわずかであった。模型実験ではボイルリングは水頭差 0.15m のときに生じた。ボイルリングが発生する直前では、上流側の地盤は止水壁近傍で大きな沈下が生じており、下流側の地盤は止水壁周辺で隆起が顕著に生じた。また、ボイルリング発生直前には下流側で、細粒分が浮揚する現象が確認された。

Fig. 16 に MLS-SPH 法で得られた水頭差 0.10m および 0.15m 時の鉛直有効応力の分布を初期の値で除した比 (σ'_v/σ'_{v0}) で示す。Terzaghi の計算式から求めた水頭差 0.10m の時点では、鉛直有効応力比が負となっている領域(以下、クイックサンド域と呼ぶ)は、下流側の止水壁先端付近のみであり、実験と同じくボイルリングは生じていない。一方、水頭差 0.15m のときには、クイックサンド域は地表面まで進展しており、実験でのボイルリング発生と概ね一致している。

6. まとめ

本研究では、粒子法の一つである SPH 法を用いて土/水連成解析の定式化を行い、数値解析プログラムを作成した。同プログラムの理論解による検証とボイルリング実験の再現解析検証を行い以下の知見が得られた。

- 1) SPH 法の定式化について、標準的な SPH 法と MLS-SPH 法の比較を行い、MLS-SPH 法を用いることで、近傍粒子の不足に起因する近似精度の低下を回避できることを確認した。
- 2) Biot の多次元圧密理論にもとづく土/水連成 MLS-SPH 法の定式化を行った。ここで、流量境界条件の設定には Lagrange の未定乗数法を用い、壁境界の表現には鏡像粒子を用いた。
- 3) 理論解による検証解析では、飽和地盤中の定常流れの問題および一次元圧密の問題について、理論解との整合を確認した。
- 4) ボイルリング実験の再現を試みた検証解析では、ボイルリングが発生した水頭差は、実験と概ね整合した。

今後は弾塑性構成式の導入などによる大変形や破壊を含む地盤の変形挙動の再現性についての検討を行う予定である。

謝辞

本研究を行うにあたり、神戸大学竹山智英准教授に多大なご指導、ご鞭撻を頂きました。ここに感謝の意を表します。

参考文献

- 1) Lucy, L.B.:A numerical approach to the testing of the fission hypothesis, *Astronomical Journal* volume 82, number12, pp.1013-1024, 1977. 9
- 2) 前田健一, 坂井守:Smoothed Particle Hydrodynamics 法による粒状地盤の浸透破壊解析手法の開発, 応用力学論文集, Vol. 7, pp. 775-786, 2004.8
- 3) Bui, H.H. and Fukagawa, R.: An improved SPH method for saturated soils and its application to investigate the mechanisms of embankment failure: Case of hydrostatic pore-water pressure, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, Vol. 37, No. 1, pp. 31-50, 2011.7
- 4) Wang, C., Wang, Y., Peng, C. and Meng, X.:Smoothed Particle Hydrodynamics Simulation of Water-Soil Mixture Flows, *Journal of Hydraulic Engineering* 142(10), 04016032, pp. 1-16, 2016.3
- 5) Dilts,G.A.:Moving-least-squares-particle hydrodynamics-I.consistency and stability, *International journal for numerical methods in engineering* 44, pp. 1115-1155, 1999.2
- 6) Dilts,G.A.:Moving least-squares particle hydrodynamics II:conservation and boundaries, *International journal for numerical methods in engineering* 48, pp. 1503-1524, 2000.6
- 7) Iizuka, A. and Ohta, H.:A determination procedure of input parameter in elasto-viscoplastic finite element analysis, *Soils and Foundation*, Vol. 27, No. 3, pp. 71-87, 1987.9
- 8) Sandhu, R. S. and Wilson, E. L.:Finite-element of seepage in elastic media, *Proc.ASCE.EM* 3, pp. 641-652, 1969.4
- 9) Biot, M.A.:Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media, *J. of Applied Physics*, Vol. 33, No. 4, pp. 1482-1498, 1962.4
- 10) Monaghan, J.J.:Smoothed Particle Hydrodynamics, *Annu Rev Astron Astrophys*, pp. 543-574, 1992.9
- 11) 関一, 竹山智英:SPH法を使用した不飽和非定常浸透流における流量境界条件の改良, 第51回地盤工学発表会概要集, pp. 969-970, 2016.9
- 12) 秋元博路, 飯田恵一郎, 久保昇三:粒子法による柱状水上滑走体まわり流れの数値シミュレーション, 第196号日本造船学会論文集, pp. 81-89, 2004.9
- 13) 山口柏樹:土質力学(全改訂)講義と演習, 技報堂出版, pp.114-125, 1969.9